Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL-LIBRARY

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Fünf und dreifsigster Band.

In vier Heften.

Mit fünf lithographirten Tafeln.

Berlin, 1847.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier),
Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des fünf und dreifsigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung. — Heft. Seite.

1. **B**eitrag zur Theorie der Function

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-v} v^{x-1} dv.$$

Von Herrn Dr. ***E. E. Kummer,*** Professor in Breslau. . . . . I. 1

3. Untersuchungen über die analytischen Facultäten. Von dem Herrn Prof. ***Öttinger*** zu Freyburg i. Br. (Fortsetzung von No. 1., 7., 11. und 17. Band XXXIII.) . . . . . I. 13

4. Sur la formule

$$h u'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2} \cdot \Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1 \cdot 2} \cdot \Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1 \ldots 4} \cdot \Delta u^{\text{IV}}_x + \text{etc.}$$

Par ***C. J. Malmstén,*** profess. des math. à Upsala. . . . . I. 55

9. Neue Theoreme der höheren Arithmetik. Von Herrn Dr. phil. ***G. Eisenstein,*** Privatdocent zu Berlin. . . . . II. 117

10. Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen. Von Demselben.
IV. Über einen allgemeinen Satz, welcher das Additionstheorem für elliptische Functionen als speciellen Fall enthält. . . . . II. 137
V. Über die Differentialgleichungen, welchen der Zähler und der Nenner bei den elliptischen Transformationsformeln genügen. . . . . II. 147
VI. Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind, und der mit ihnen zusammenhangenden Doppelreihen. . . . . II. 153

11. Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen. Von Demselben.
VI. Fortsetzung der vorigen Abhandlung. . . . . III. 185

12. Aufgaben und Lehrsätze. Von Demselben. . . . . III. 275

13. Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis. Auctore Dr. ***A. Göpel.*** . . . . . IV. 277

15. Zur Theorie der complexen Zahlen. Von dem Herrn Prof. Dr. ***Kummer.*** (Auszug aus den Berichten der Königl. Akad. der Wiss. zu Berlin vom März 1845.) IV. 319

16. Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihre Primfactoren. Von Demselben. . . . . IV. 327

Nr. der Abhandlung. Heft. Seite.

17. Note sur la représentation d'un nombre par la somme de cinq carrés. Par Mr. *G. Eisenstein.* . . . . . IV. 368

2. Geometrie.

2. Über Systeme von Curven, welche einander überall rechtwinklig durchschneiden. Von Herrn Dr. *E. E. Kummer,* Professor in Breslau. . . . . I. 5

5. Bemerkungen zu einer gewissen Methode, die Gleichung eines durch vier Puncte gehenden Kegelschnitts auszudrücken. Von dem Herrn Dr. *Arndt* in Stralsund. . . . . I. 83

II. Angewandte Mathematik.

6. Über das Ohmsche physicalische Gesetz. Vom Herrn Professor Dr. *Plücker* zu Bonn. . . . . II. 93

7. Sur la Réflexion de la Lumière, dans le cas des surfaces du second degré, analogue à celle qui aux foyers des sections coniques a donné le nom. Par le même. . . . . II. 100

III. Allgemeines.

8. *Leonardi Eulcri* Commentatio de Matheseos sublimioris utilitate, ex autographo edidit *G. Friedlaenderus.* Berolini MDCCCXLVII. . . . . II. 106

14. Notiz über *A. Göpel.* . . . . . IV. 313

Fac simile einer Handschrift von *Viviani.* . . . . . I.
– – – – – – *F. F. Pfaff.* . . . . . II.
– – – – – – *Tralles.* . . . . . III.
– – – – – – *Bessel.* . . . . . IV.

1.

Beitrag zur Theorie der Function $\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-v}v^{x-1}dv$.

(Von Herrn Dr. *E. E. Kummer*, Professor in Breslau.)

Stellt man sich irgend eine Function $f(x)$ in eine nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von $2\pi x$ geordnete Reihe entwickelt vor, so dass

$$f(x)=A+2A_1\cos 2\pi x+2A_2\cos 4\pi x+2A_3\cos 6\pi x+\ldots.$$
$$+2B_1\sin 2\pi x+2B_2\sin 4\pi x+2B_3\sin 6\pi x+\ldots.$$

in den Grenzen $x=0$ bis $x=1$ ist, verwandelt sodann x in $x+\frac{1}{n}$, $x+\frac{2}{n}\ldots.x+\frac{n-1}{n}$, und addirt diese Gleichungen, so fallen alle Glieder der Reihen-Entwicklung mit Ausnahme derer heraus, welche Sinus oder Cosinus von Bogen enthalten, die Vielfache von $2n\pi x$ sind, und man erhält

$$f(x)+f(x+\tfrac{1}{n})+f(x+\tfrac{2}{n})+\ldots.+f(x+\tfrac{n-1}{n})$$
$$=n(A+2A_n\cos 2n\pi x+2A_{2n}\cos 4n\pi x+2A_{3n}\cos 6n\pi x+\ldots.$$
$$+n(2B_n\sin 2n\pi x+2B_{2n}\sin 4n\pi x+2B_{3n}\sin 6n\pi x+\ldots.,$$

in den Grenzen $x=0$ bis $x=\frac{1}{n}$. Setzt man nun weiter

$$F(x)=A+2A_n\cos 2\pi x+2A_{2n}\cos 4\pi x+2A_{3n}\cos 6\pi x+\ldots.$$
$$+2B_n\sin 2\pi x+2B_{2n}\sin 4\pi x+2B_{3n}\sin 6\pi x+\ldots.,$$

so ergiebt sich

$$f(x)+f(x+\tfrac{1}{n})+f(x+\tfrac{2}{n})+\ldots.+f(x+\tfrac{n-1}{n})=nF(nx).$$

Setzt man ferner $f(x)=l\varphi(x)$ und $nF(x)=l\Phi(x)$, so ist

$$\varphi(x)\varphi(x+\tfrac{1}{n})\varphi(x+\tfrac{2}{n})\ldots.\varphi(x+\tfrac{n-1}{n})=\Phi(nx).$$

Man hat also so zwei allgemeine Formen von Gleichungen erhalten, die in der Analysis häufig vorkommen; namentlich in der Theorie der transcendenten Functionen. Die Entwickelung einer Function $f(x)$ in eine nach Cosinus und Sinus der Vielfachen von $2\pi x$ geordnete Reihe führt jedesmal zu einer solchen

Formel, welche aber nur dann von besonderem Interesse ist, wenn die Function $F(x)$ einen anderweiten einfachen Zusammenhang mit $f(x)$ hat.

Auf die obige Art lässt sich auch ein leichter Beweis der bekannten Formel für die Function Gamma finden, welche eine sehr einfache, wie ich glaube bisher noch nicht bekannte Reihen-Entwicklung nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von $2\pi x$ enthält.

Setzt man nemlich

$$l\Gamma(x) = A_0 + 2A_1\cos 2\pi x + 2A_2\cos 4\pi x + 2A_3\cos 6\pi x + \ldots.$$
$$+ 2B_1\sin 2\pi x + 2B_2\sin 4\pi x + 2B_3\sin 6\pi x + \ldots.,$$

in den Grenzen $x=0$ bis $x=1$, so ergiebt sich bekanntlich

$$A_k = \int_0^1 l\Gamma(x)\cos.2k\pi x.dx, \qquad B_k = \int_0^1 l\Gamma(x)\sin.2k\pi x.dx.$$

Die Coefficienten A_k lassen sich leicht bestimmen, ohne dass man der Ausdrücke durch bestimmte Integrale bedarf; nämlich vermittelst der Grund-Eigenschaft der Function Gamma:

$$l\Gamma(x) + l\Gamma(1-x) = l(2\pi) - l(2\sin\pi x).$$

Setzt man in dieser Formel für $l\Gamma(x)$ und $l\Gamma(1-x)$ ihre Reihen-Entwickelungen, und auch für $l(2\sin\pi x)$ die bekannte Reihe

$$-l(2\sin\pi x) = \cos 2\pi x + \tfrac{1}{2}(\cos 4\pi x) + \tfrac{1}{3}(\cos 6\pi x) + \ldots.,$$

so erhält man

$$2A_0 + 4A_1\cos 2\pi x + 4A_2\cos 4\pi x + 4A_3\cos 6\pi x + \ldots.$$
$$= l(2\pi) + \cos 2\pi x + \tfrac{1}{2}(\cos 4\pi x) + \tfrac{1}{3}(\cos 6\pi x) + \ldots.,$$

in den Grenzen $x=0$ bis $x=1$; und da nun nach bekannten Sätzen beide Entwickelungen identisch sein müssen, so findet sich

$$A_0 = \tfrac{1}{2}l(2\pi) \qquad \text{und} \qquad A_k = \frac{1}{4z}.$$

Um weiter die Coefficienten B_k zu bestimmen, setzen wir in dem Ausdrucke

$$B_k = \int_0^1 l\Gamma(x)\sin.2k\pi x.dx$$

statt $l\Gamma(x)$ den bekannten, oder wenigstens aus bekannten leicht zu entwickelnden Ausdruck durch ein bestimmtes Integral:

$$l\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\frac{1-z^{x-1}}{1-z} - x + 1\right)\frac{dz}{l(z)} \qquad (x>0).$$

Dieser giebt

$$B_k = \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-z^{x-}}{1-z} - x + 1\right)\frac{\sin 2k\pi x\,dz\,dx}{l(z)}.$$

Wird nun die Integration in Beziehung auf x ausgeführt, so erhält man

$$\int_0^1 \sin.2k\pi x.dx = 0, \qquad \int_0^1 x\,\sin.2k\pi x.dx = \frac{-1}{2k\pi},$$

$$\int_0^1 z^{x-1}\sin.2k\pi x.dx = \frac{(1-z)2k\pi}{z(l(z)^2+4k^2\pi^2)},$$

also

$$B_k = \int_0^1 \left(\frac{-2k\pi}{z(l(z)^2+4k^2\pi^2)} + \frac{1}{2k\pi}\right)\frac{dz}{l(z)},$$

oder, wenn $z = e^{-2k\pi t}$ gesetzt wird:

$$B_k = \frac{1}{2k\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t^2} - e^{-2k\pi t}\right)\frac{dt}{t}.$$

Hieraus folgt:

$$kB_k - B_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty (e^{-2\pi t} - e^{-2k\pi t})\frac{dt}{t},$$

und da bekanntlich

$$\int_0^\infty (e^{-t} - e^{-kt})\frac{dt}{t} = l(k),$$

so ist

$$kB_k - B_1 = \frac{1}{2\pi}l(k).$$

Es bleibt jetzt nur noch B_1 zu suchen; zu welchem Zwecke das Integral

$$\int_0^\infty \left(e^{-t} - \frac{1}{1+t}\right)\frac{dt}{t} = C = 0{,}577\,215\,664\,9$$

dient, welches die bekannte Constante des Integral-Logarithmen giebt. Dieses, mit dem Ausdrucke des B_1 verbunden, giebt

$$B_1 - \frac{1}{2\pi}C = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t} + e^{-t} - e^{-2\pi t}\right)\frac{dt}{t},$$

also

$$B_1 - \frac{1}{2\pi}C = \frac{1}{2\pi}l(2\pi) - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t}\right)\frac{dt}{t}.$$

Dieses letzte Integral hat aber den Werth Null, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man t in $\frac{1}{t}$ verwandelt, wodurch es ungeändert bleibt, aber das entgegengesetzte Vorzeichen bekommt. Also ist endlich

$$B_1 = \frac{1}{2\pi}C + \frac{1}{2\pi}l(2\pi).$$

Da jetzt alle Coefficienten der Reihen-Entwickelung für $l\Gamma(x)$ gefunden sind, so können wir dieselbe folgendermaassen darstellen:

$$l\Gamma(x) = \tfrac{1}{2}l(2\pi) + \tfrac{1}{2}(\cos 2\pi x) + \tfrac{1}{4}(\cos 4\pi x) + \tfrac{1}{6}(\cos 6\pi x) + \ldots.$$
$$+ \frac{1}{\pi}(C + l(3\pi))\,(\sin 2\pi x + \tfrac{1}{2}(\sin 4\pi x) + \tfrac{1}{3}(\sin 6\pi x) + \ldots.)$$
$$+ \frac{1}{\pi}(l(1)\sin 2\pi x + \tfrac{1}{2}(l(2))\sin 4\pi x + \tfrac{1}{3}(l(3))\sin 6\pi x + \ldots.),$$

in den Grenzen $x=0$ bis $x=1$. Anstatt der beiden ersten Reihen kann man auch die bekannten Summenausdrücke derselben setzen und erhält

$$l\Gamma(x)-\tfrac{1}{2}l(2\pi)+\tfrac{1}{2}l(2\sin\pi x)-(C+l(2\pi))(1-2x)$$
$$=\frac{1}{\pi}(l(1)\sin 2\pi x+\tfrac{1}{2}l(2)\sin 4\pi x+\tfrac{1}{3}l(3)\sin 6\pi x+\ldots.),$$

in den Grenzen $x=0$ bis $x=1$.

Aus dieser Reihen-Entwickelung findet sich nun die erwähnte Hauptformel für die Function Gamma durch Verwandlung des x in $x+\frac{1}{n}$, $x+\frac{2}{n}$, ... $x+\frac{n-1}{n}$, und durch Addition dieser Gleichungen. Diese Operation giebt

$$l\Gamma(x)+l\Gamma(x+\frac{1}{n})+l\Gamma(x+\frac{2}{n})+\ldots.+l\Gamma(x+\frac{n-1}{n})$$
$$=\tfrac{1}{2}nl(2\pi)+\tfrac{1}{2}n(\frac{\cos 2n\pi x}{n}+\frac{\cos 4n\pi x}{2n}+\frac{\cos 6n\pi x}{6n}+\ldots.)$$
$$+\frac{n}{\pi}(C+l(2\pi))(\frac{\sin 2n\pi x}{n}+\frac{\sin 4n\pi x}{2n}+\frac{\sin 6n\pi x}{6n}+\ldots.)$$
$$+\frac{n}{\pi}(\frac{l(n)}{n}\sin 2n\pi x+\frac{l(2n)}{2n}\sin 4n\pi x+\frac{l(3n)}{3n}\sin 6n\pi x+\ldots.),$$

in den Grenzen $x=0$ bis $x=\frac{1}{n}$. Subtrahirt man hiervon $l\Gamma(nx)$, so bleibt

$$l\Gamma(x)+l\Gamma(x+\frac{1}{n})+l\Gamma(x+\frac{2}{n})+\ldots.+l\Gamma(x+\frac{n-1}{n})-l\Gamma(nx)$$
$$=\tfrac{1}{2}(n-1)l(2\pi)+\frac{l(n)}{\pi}(\sin 2n\pi x+\tfrac{1}{2}(\sin 4n\pi x)+\tfrac{1}{3}(6n\pi x)+\ldots.);$$

und wenn für diese Reihe wieder der bekannte Summen-Ausdruck gesetzt wird, so erhält man

$$l\Gamma(x)+l\Gamma(x+\frac{1}{n})+l\Gamma(x+\frac{2}{n})+\ldots.+l\Gamma(x+\frac{n-1}{n})-l\Gamma(nx)$$
$$=\tfrac{1}{2}(n-1)l(2\pi)+\tfrac{1}{2}(1-2nx)l(n).$$

Geht man endlich von den Logarithmen zu den Zahlen über, so erhält man die gesuchte Formel

$$\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{n})\Gamma(x+\frac{2}{n})\ldots.\Gamma(x+\frac{n-1}{n})=(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}\cdot n^{\frac{1}{2}(1-2nx)}\Gamma(nx).$$

Nach der oben ausgeführten Herleitung dieser Formel ist deren Gültigkeit zwar nur in den Grenzen $x=0$ bis $x=\frac{1}{n}$ bewiesen: es ist aber damit zugleich die Allgemeingültigkeit gegeben, da vermöge der Fundamental-Eigenschaft $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ die Formel bei der Verwandlung des x in $x+\frac{1}{n}$ ungeändert bleibt.

2.

Ueber Systeme von Curven, welche einander überall rechtwinklig durchschneiden.

(Von Herrn Dr. *F. F. Kummer*, Professor zu Breslau.)

Bekanntlich hat, wie von *Leibnitz* zuerst bemerkt worden ist, ein System von confocalen Kegelschnitten die merkwürdige Eigenschaft, dass alle Hyperbeln, welche es enthält, mit allen Ellipsen sich überall rechtwinklig durchschneiden. Eben so hat ein System von Parabeln, welche den Brennpunct und die Hauptaxe gemein haben, die Eigenschaft, dass alle nach der einen Richtung der Axe liegenden Parabeln mit allen nach der entgegengesetzten Richtung liegenden sich stets unter rechten Winkeln schneiden. Da mit diesen Sätzen über die confocalen Kegelschnitte viele andere sehr schöne Eigenschaften derselben zusammenhangen, so schien es mir der Mühe werth, dergleichen Systeme einander überall rechtwinklig schneidender Curven auch für beliebige höhere Grade zu suchen. Es ist mir gelungen, die unmittelbare Quelle für dergleichen Systeme von Curven zu finden, aus welcher sich eine unendliche Anzahl derselben herleiten lässt; wie sich in dem Folgenden zeigen wird.

Es sei $f(x,y,\alpha)=0$ die Gleichung eines Systems von Curven, in welcher α ein veränderlicher Parameter ist: so ist der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ ebenfalls eine Function von α, x und y. Giebt man nun den Coordinaten x und y beliebige, aber constante Werthe, so kann man aus der Gleichung $f(x,y,\alpha)=0$, wenn dieselbe algebraisch und vom $n$ten Grade ist, n Werthe des α finden. Diese sodann in dem Ausdrucke des ersten Differentialquotienten substituirt, giebt n Werthe desselben; d. h. durch einen in der Ebene des Systems beliebig gewählten Punct gehen immer n Aeste (reale oder imaginäre) hindurch. Dass n durch einen Punct gehende Aeste sich rechtwinklig durchschneiden, hat keinen Sinn; die Bedeutung passt nur für *zwei* derselben, oder auch für mehrere *Paare* unter sich. Es seien also α_1, α_2, α_3, ... α_n die n Wurzeln der Gleichung $f(x, y, \alpha) = 0$, so lässt sich dieselbe auf die Form

$(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)(\alpha-\alpha_3)\ldots(\alpha-\alpha_n)=0$ bringen, und wenn nun α_1 und α_5 zwei Werthe des α sind, für welche die zugehörigen, in dem Puncte x, y sich schneidenden Aeste rechtwinklig auf einander stehen sollen, so kann man von den übrigen Factoren der Gleichung $f(x,y,\alpha)=0$ ganz absehen und nur die Gleichung $(\alpha-\alpha_r)(\alpha-\alpha_s)=0$ in Betracht ziehen: das heisst, man hat es überall nur mit Systemen von Curven zu thun, welche in Beziehung auf den veränderlichen Parameter vom *zweiten* Grade sind. Dieselben können freilich, wenn sie dazu vorbereitet sind, in Beziehung auf x und y alle die Irrationalitäten enthalten, welche die Auflösung von Gleichungen höherer Grade mit sich führt, und wenn sie sodann rational gemacht werden, kann auch der Parameter α in ihnen zu beliebig hohen Graden aufsteigen. Die allgemeinste zu untersuchende Form der in Rede stehenden Systeme wird also $u\alpha^2+v\alpha+w=0$ sein, wo u, v, w Functionen von x und y sind; dividirt man aber durch u und setzt $\frac{v}{u}=2z$, $\frac{w}{u}=-z_1^2$ (die Form eines negativen Quadrates für dieses letzte Glied erweiset sich in dem Folgenden als die passendste), wo z und z_1 wieder Functionen von x und y sein können, so erhält man

$$1. \qquad \alpha^2+2\alpha z-z_1^2=0$$

für die weiter zu behandelnde Gleichung des Systems, in welcher z und z_1 die zu bestimmenden Grössen sind. Setzt man, nach der gewohnten Art der Bezeichnung der partiellen Differentialquotienten, $dz=p\,dx+q\,dy$ und $dz_1=p_1\,dx+q_1\,dy$, so giebt die Differentiation in Beziehung auf x und y:

$$\alpha(p\,dx+q\,dy)-z_1(p_1\,dx+q_1\,dy)=0,$$

also

$$2. \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{p\alpha-p_1z_1}{q\alpha-q_1z_1}.$$

Die Bedingung des rechtwinkligen Schneidens der beiden durch den Punct x,y gehenden Aeste des Systems ist nun die, dass das Product der beiden Differentialquotienten, welche den beiden Werthen des α angehören, gleich -1 sei. Also hat man, wenn die beiden aus der Gleichung (1.) zu entnehmenden Werthe von α durch α_1 und α_2 bezeichnet werden:

$$\left(\frac{p\alpha_1-p_1z_1}{q\alpha_1-q_1z_1}\right)\cdot\left(\frac{p\alpha_2-p_1z_1}{q\alpha_2-q_1z_1}\right)=-1,$$

oder, entwickelt,

$$(p^2+q^2)\alpha_1\alpha_2-z_1(pp_1+qq_1)(\alpha_1+\alpha_2)+(p_1^2+q_2^2)z_1^2=0;$$

und da aus der quadratischen Gleichung (1.) $\alpha_1\alpha_2 = -z_1^2$, $\alpha_1+\alpha_2 = -2z$ folgt, so erhält man, nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors z_1:

3. $$z_1(p^2+q^2-p_1^2-q_1^2) - 2z(pp_1+qq_1) = 0.$$

Die Bestimmung von z und z_1, und mit ihr die vollständige Lösung der Aufgabe, hangt also von der Integration dieser partiellen Differentialgleichung von vier Variabeln, den zwei abhängigen z und z_1 und den zwei unabhängigen x und y ab.

Die allgemeine Integration der Gleichung (3.) lässt sich enweder gar nicht, oder doch sicherlich nur in einer Form ausführen, welche dem Zwecke, einfache Systeme von Curven zu finden, nicht entsprechen würde. Dies zeigt sich schon darin, dass das vollständige Integral, wie leicht zu sehen, eine unendliche Anzahl willkürlicher Functionen enthalten müsste. Wir verzichten deshalb auf die vollständige Allgemeinheit und suchen nur einfache, wenn auch besondere Auflösungen der Differentialgleichung.

Zu diesem Zwecke bietet sich zunächst das Mittel dar, der Gleichung (3.) durch folgende zwei zu entsprechen:

4. $$p^2 + q^2 - p_1^2 - q_1^2 = 0 \quad \text{und} \quad pp_1 + qq_1 = 0.$$

Aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen folgt, wenn q_1 eliminirt wird: $q^2 = p_1^2$, also

$$p_1 = \pm q \quad \text{und} \quad q_1 = \mp p.$$

Nennt man nun, wie gewöhnlich, r, s, t die drei zweiten partiellen Differentialquotienten des z, und r_1, s_1, t_1 die des z_1, so geben diese beiden Gleichungen, wenn die erste nach y, die andere nach x differentiirt wird:

$$s_1 = \mp t \quad \text{und} \quad s_1 = \mp r, \quad \text{also} \quad r + t = 0.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist bekanntlich

5. $$z = f(x+iy) + f(x-iy) - iF(x+iy) + iF(x-iy),$$

wo $i = \sqrt{-1}$. Hieraus folgt dann, vermittelst der Gleichung $p = \mp q_1$, der Werth des z_1, nämlich:

6. $$z_1 = if(x+iy) - if(x-iy) + F(x+iy) + F(x-iy);$$

wo das doppelte Vorzeichen, auf welches hier nichts ankommt, weggelassen ist. Diese Werthe des z und z_1, welche den beiden Gleichungen (4.) und folglich auch der Gleichung (3.) genügen, geben, in der Gleichung $\alpha^2 + 2\alpha z - z_1^2 = 0$ substituirt, die erste allgemeine Formel für die gesuchten Systeme einander rechtwinklig schneidender Curven. Bestimmt man die beiden willkürlichen Functionen so, dass $f(x+iy) = \frac{1}{2}(x+iy)$ und $F(x+iy) = 0$ ist, so erhält man, als speciellen Fall:

$$\alpha^2 + 2\alpha x - y^2 = 0,$$

welches das System der confocalen Parabeln ist. Nimmt man, etwas allgemeiner, $f(x+iy) = \frac{1}{2}a(x+iy)^m$ und $F(x+iy = \frac{1}{2}b(x+iy)^n$ und führt die Polarcoordinaten, $x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$ ein, so erhält man folgende Gleichung:

7. $$\alpha^2 + 2\alpha(a\varrho^m \cos m\varphi + b\varrho^n \sin n\varphi) - (a\varrho^m \sin m\varphi - b\varrho^n \cos n\varphi)^2 = 0.$$

Wir wollen uns auf eine nähere Discussion der durch diese Formel ausgedrückten Curven, welche, je nachdem m und n ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen sind, stets einen andern Character haben, nicht einlassen, sondern gehen zur Integration der Gleichung (3.) zurück.

Das bisher angewendete Integrations-Verfahren lässt sich nämlich erweitern, dadurch, dass z als Function von z_1 und einer neuen, später passend zu bestimmenden Variabel z_2 angenommen wird. Wenn $dz_2 = p_2 dx + q_2 dy$ gesetzt wird, so erhält man durch Differentiation nach x und nach y:

$$p = \frac{\partial z}{\partial z_1} p_1 + \frac{\partial z}{\partial z_2} p_2, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial z_1} q_1 + \frac{\partial z}{\partial z_2} q_2.$$

Diese Werthe von p und q in der Gleichung (3.) substituirt, geben

$$(z_1(\frac{\partial z}{\partial z_1})^2 - z_1 - 2z\frac{\partial z}{\partial z_1})(p_1^2 + q_1^2) + z_1(\frac{\partial z}{\partial z_2})^2(p_2^2 + q_2^2)$$
$$+ 2(z_1\frac{\partial z}{\partial z_1}\frac{\partial z}{\partial z_1} - z\frac{\partial z}{\partial z_2})(p_1 p_2 + q_1 q_2) = 0.$$

Bestimmt man jetzt die beiden Variabeln z_1 und z_2 durch die Gleichungen $p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2 = 0$ und $p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0$, deren vollständige Lösung gefunden ist, so geht diese Gleichung in

8. $$z_1((\frac{\partial z}{\partial z_1})^2 + (\frac{\partial z}{\partial z_2})^2 - 1) - 2z\frac{\partial z}{\partial z_1} = 0$$

über. Ein particuläres Integral derselben, welches sich von selbst ergiebt, ist

$$2z = 1 - z_1^2 - z_2^2.$$

Dieses giebt sogleich folgende neue allgemeine Formel für Systeme rechtwinklig einander sich schneidender Curven:

$$\alpha^2 + \alpha(1 - z_1^2 - z_2^2) - z_1^2 = 0,$$

welcher auch folgende Form gegeben werden kann:

9. $$\frac{z_1^2}{\alpha} + \frac{z_2^2}{\alpha+1} = 1,$$

wo

$$z_1 = f(x+iy) + f(x-iy) - iF(x+iy) + iF(x-iy),$$
$$z_2 = if(x+iy) - if(x-iy) + F(x+iy) + F(x-y).$$

Der einfachste besondere Fall dieser Formel, nämlich wenn $f(x+iy) = \frac{1}{2}(x+iy)$

und $F(x+iy)=0$ angenommen wird, giebt das System der Kegelschnitte mit zwei gemeinschaftlichen Brennpuncten, nämlich:

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\alpha+1}=1.$$

Setzt man ferner, wie oben, etwas allgemeiner, $f(x+iy)=\frac{1}{2}a(x+iy)^m$ und $F(x+iy)=\frac{1}{2}b(x+iy)^n$, und führt Polarcoordinaten ein, so erhält man folgende Gleichung:

$$10.\qquad \frac{(a\varrho^m\cos m\varphi+b\varrho^n\sin n\varphi)^2}{\alpha}+\frac{(a\varrho^m\sin m\varphi+b\varrho^n\sin n\varphi)^2}{\alpha+1}=1,$$

welche eine sehr reiche Auswahl einfacher und interessanter Curven bezeichnet.

Die partielle Differentialgleichung (8.) lässt sich auch allgemein integriren, und liefert dann eine noch weit allgemeinere, drei willkürliche Functionen enthaltende Formel für die gesuchten Systeme von Curven. Man findet durch die bekannten Methoden das Integral der Gleichung (8.), als Resultat der Elimination der Grösse c, aus folgenden beiden Gleichungen:

$$11.\qquad \begin{cases} 2cz-c^2z_1^2-(cz_2+\varphi(c))^2+1=0 & \text{und} \\ z-cz_1^2-(cz_2+\varphi(c))(z_2+\varphi'(c))=0, \end{cases}$$

wo $\varphi(c)$ die willkürliche Function und $\varphi'(c)$ der erste Differentialquotient derselben ist. Wird der aus der zweiten dieser Gleichungen entnommene Werth von z in der Gleichung $a^2+2az-z_1^2=0$ substituirt, und ausserdem z aus den beiden Gleichungen (11.) eliminirt, so erhält man

$$12.\qquad \begin{cases} a^2+2a(cz_1^2+(cz_2+\varphi(c))(z_2+\varphi'(c))-z_1^2=0, \\ c^2z_1^2+(cz_2+\varphi(c))(cz_2+2c\varphi'(c)-\varphi(c))+1=0. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen enthalten die gesuchte Formel mit drei willkürlichen Functionen, wenn nämlich c eliminirt wird und für z_1 und z_2 die bei (9.) angegebenen Werthe gesetzt werden. Auf ähnliche Weise lassen sich noch viele andere, mehr oder weniger complicirte Integrationen der Differentialgleichung (3.) ausführen und dadurch allgemeine Formeln für Systeme sich selbst rechtwinklig schneidender Curven finden. Wir wollen diese Formeln nicht häufen, sondern in dieser Beziehung nur eine allgemeine Bemerkung machen, zu welcher die beiden Formeln

$$a^2+2az_1-z_2^2=0 \quad \text{und} \quad \frac{z_1^2}{\alpha}+\frac{z_2^2}{\alpha+1}=1$$

Anlass geben. Dieselben entstehen aus den bekannten beiden Systemen von confocalen Kegelschnitten, nämlich:

$$a^2 + 2ax - y^2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a+1} = 1$$

unmittelbar, wenn z_1 statt x und z_2 statt y gesetzt wird. Im Allgemeinen lässt sich nun leicht zeigen, dass, wenn in der die Coordinaten x und y enthaltenden Gleichung irgend eines Systems sich selbst rechtwinklig schneidender Curven z_1 statt x und z_2 statt y gesetzt wird, dadurch wieder die Gleichung eines ebenso beschaffenen Systems hervorgeht. Es sei nämlich, wie oben, $dz_1 = p_1 dx + q_1 dy$ und $dz_2 = p_2 dx + q_2 dy$; ferner seien u und u_1 zwei Functionen von x und y, welche machen, dass $a^2 + 2au - u_1^2 = 0$ die Gleichung eines der sich selbst rechtwinklig schneidenden Systeme von Curven ist: so muss, wie wir oben sahen, folgende Gleichung Statt haben:

$$13. \quad u_1\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2\right) - 2u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = 0;$$

und umgekehrt: wenn diese Gleichung befriedigt ist, so ist $a^2+2au-u_1^2=0$ die Gleichung eines solchen Systems. Betrachtet man nun u und u_1 als Functionen von z_1 und z_1, welche wieder die bekannten, durch die Gleichungen bei (9.) bestimmten Functionen von x und y sind, so erhält man durch Differentiation:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z_1} p_1 + \frac{\partial u}{\partial z_2} p_2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z_1} q_1 + \frac{\partial u}{\partial z_2} q_2,$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial z_1} p_1 + \frac{\partial u_1}{\partial z_2} p_2, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial z_1} q_1 + \frac{\partial u_1}{\partial z_2} q_2.$$

Substituirt man diese Werthe der nach x und y genommenen Differentialquotienten in der Gleichung (13.), und macht von den beiden Gleichungen $p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2 = 0$ und $p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0$ Gebrauch, so erhält man die Gleichung:

$$14. \quad u_1\left(\left(\frac{\partial u}{\partial z_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_2}\right)^2\right) - 2u\left(\frac{\partial u}{\partial z_1}\frac{\partial u_1}{\partial z_1} + \frac{\partial u}{\partial z_2}\frac{\partial u_1}{\partial z_2}\right) = 0,$$

welche sich von der Gleichung (13.) nur dadurch unterscheidet, dass statt x und y hier z_1 und z_2 steht. Mit der Gleichung (13.) wird nun allemal diese Gleichung (14.) befriedigt; woraus die Richtigkeit der obigen Bemerkung klar ist.

Nachdem wir hinlänglich die Mittel gezeigt haben, wie man Systeme einander überall rechtwinklig schneidender Curven finden kann, wollen

wir noch eine allgemeine Eigenschaft dieser Systeme nachweisen, nämlich die, dass sie immer eine bestimmte Anzahl von Brennpuncten haben, welche allen Curven eines Systems gemeinsam sind. Bekanntlich hat *Plücker* zuerst eine allgemeine Definition für die Brennpuncte der Curven beliebiger Ordnungen gegeben, welcher zufolge sie diejenigen Puncte in der Ebene einer Curve sind, von denen aus sich zwei imaginäre Tangenten an die Curve ziehen lassen, welche mit der Abscissenaxe (also mit einer beliebigen Graden) Winkel bilden, deren trigonometrische Tangenten die Werthe $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ haben. Für unsern gegenwärtigen Zweck, wo es sich nur um die allen Curven eines Systems gemeinsamen Brennpuncte handelt, werden wir zwar auf eine andere Weise zu den Brennpuncten gelangen, aber dann nachweisen, dass dieselben auch in dem allgemeinen Sinne Brennpuncte sind, welchen *Plücker* diesen Puncten treffend gegeben hat.

In einem Systeme von Curven, welche einander überall rechtwinklig schneiden, dürfen zwei unendlich nahe Curven durchaus nicht reale Durchschnittspuncte haben: denn wären dergleichen vorhanden, so würden in ihnen die sich schneidenden unendlich nahen Curven nicht einen rechten, sondern einen verschwindend kleinen Winkel bilden. Das System darf darum keine reale Grenzcurve haben. Sucht man nun die Grenzcurve unseres Systems, so erhält man durch Elimination des α aus den beiden Gleichungen

$$\alpha^2 + 2\alpha z - z_1^2 = 0 \quad \text{und} \quad \alpha + z = 0,$$

folgende Gleichung der Grenzcurve:

$$z^2 + z_1^2 = 0 \text{ *)},$$

welche wirklich, weil wir dem dritten Gliede unserer allgemeinen Gleichung die Form eines negativen Quadrats gaben, wenn z und z_1 nicht etwa einen gemeinschaftlichen Factor haben, eine reale Linie *nicht* giebt. Die imaginären Aeste derselben aber haben reale Durchschnittspuncte, welche durch die beiden Gleichungen

$$z = 0 \quad \text{und} \quad z_1 = 0$$

bestimmt werden und welche eben die für alle Curven des Systems constanten Brennpuncte sind, um welche es sich handelt. Um nun nachzuweisen, dass dieselben auch nach der Definition von *Plücker* Brennpuncte sind, betrachte ich zwei Curven des Systems, nämlich

*) Es ist kaum nöthig, zu erinnern, dass hier z und z_1 nicht die beschränkte, durch die Gleichungen (5.) und (6.) angegebene Bedeutung haben, sondern dass es irgend Functionen von x und y sind, welche der Gleichung (3) genügen.

$$\alpha^2 + 2\alpha z - z_1^2 = 0 \quad \text{und} \quad \beta^2 + 2\beta z - z_1^2 = 0.$$

Die respectiven Differentialquotienten für dieselben sind

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p\alpha - p_1 z_1}{q\alpha - q_1 z_1} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{p\beta - p_1 z_1}{q\beta - q_1 z_1}.$$

Für diejenigen Puncte nun, in welchen diese beiden Curven sich schneiden, es geschehe real oder imaginair, ist das Product dieser Differentialquotienten gleich -1: nimmt man also β unendlich wenig verschieden von α an, so werden die beiden Differentialquotienten einander gleich, also das Product derselben zu einem Quadrate, und man erhält

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -1 \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-1},$$

für alle Puncte, in welchen zwei unendlich nahe Curven eines Systems sich schneiden, mithin auch für alle Puncte der Grenzcurve. Legt man nun Tangenten an die Grenzcurve, in den durch die Gleichungen $z = 0$ und $z_1 = 0$ bestimmten Puncten, so sind dieselben zugleich Tangenten gewisser Curven des Systems: die von ihnen mit der Abscissenaxe gebildeten Winkel haben die trigonometrischen Tangenten $\pm\sqrt{-1}$; sie sind also Brennpuncte für diese bestimmten Curven des Systems, und da dieses Resultat von α ganz unabhängig ist, so sind es gemeinsame Brennpuncte für alle Curven des Systems.

Breslau im September 1847.

3.

Untersuchungen über die analytischen Facultäten.

(Von dem Herrn Prof. *Oettinger* zu Freyburg i. Br.)

(Fortsetzung von No. 1., 7., 11. und 17. Band XXXIII.)

VI.

§. 33.

Die Facultäten lassen sich auch noch mit Vortheil zum Ausdruck *bestimmter Integrale* benutzen. Um dies zu zeigen, wollen wir von den Facultäten direct ausgehen, obgleich dies gerade nicht nöthig ist. Es lässt sich nämlich unmittelbar von den *unbestimmten* Integralen zu den *bestimmten* übergehen. Auch in diesem Falle werden die Facultäten ihre Brauchbarkeit bewähren, wie sich im Folgenden zeigen wird, und wie es auch bekannt ist. Nach dem Vorgange von *Euler* hat man bei hierher gehörigen Entwicklungen Zuflucht zu den unendlichen Factorenfolgen genommen; dies ist nach den bisher hier angestellten Untersuchungen nicht nöthig. Da nämlich gezeigt wurde, dass die Facultäten mit gebrochenen Exponenten sich als unendliche Factorenfolgen, und umgekehrt, darstellen lassen, so ist der Uebergang überflüssig, und sogar ein Umweg; denn es lassen sich sehr kurz alle Sätze von bestimmten Integralen, welche bisher auf die eben bemerkte Art gewonnen wurden, nicht nur viel einfacher auf dem hier angedeuteten directen Wege ableiten, sondern auch auf allgemeinere Formen und Gesetze zurückführen. Schon *Kramp* hat dies angedeutet, aber nicht nachgewiesen. *Legendre* würde gewiss in seinen Untersuchungen über die *Euler*'schen Integrale auf Einfacheres gekommen sein, wenn er die Facultäten einer besondern Vor-Untersuchung unterworfen, und nicht, wie er häufig that, die bestimmten Integrale benutzt hätte, um Eigenschaften der Facultäten daraus abzuleiten. Vielleicht war die von ihm gewählte, weniger geeignete *Bezeichnung* der Facultäten mit ein Hinderniss, dass es nicht geschahe. Aus diesem Grunde scheint auch der Tadel, den *Binet* in seiner Abhandlung über die Eulerschen Integrale (Journ. d. l'éc. polyt. T. XVI. pg. 227.) gegen *Kramp* ausspricht, nicht gerecht. Die Facultäten sind bei diesen Integralen nicht bloss Mittel zum Zweck, sondern in der That die trans-

cendenten Grössen selbst, auf welche die Integrale führen. Sie haben also hier einen doppelten Dienst zu leisten, und zwar in *formeller* und in *materieller* Hinsicht: in *formeller*, indem sie dazu dienen, die Integrale von einer Form auf eine andere zu übertragen, oder die Beziehungen, worin sie zu einander stehen, anzudeuten: in *materieller*, indem sie dienen, den Werth der Integrale selbst darzustellen. Wir wenden uns nun zur Sache.

Soll das Integral

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x$$

dargestellt werden, so ist, wenn man das Binomium $(1-x^q)^n$ entwickelt:

$$\int x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \int (x^{p-1} - nx^{p+q-1} + (n)_2 x^{p+q2-1} - (n)_3 x^{p+3q-1} + \ldots.) \partial x.$$

Wird nun, nach der Integration, $x = 1$ gesetzt, so ergiebt sich

$$1. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \frac{1}{p} - \frac{n}{p+q} + (n)_2 \frac{1}{p+2q} - (n)_3 \frac{1}{p+3q} + \ldots.$$

Diese Gleichung fällt genau mit der (21. §. 32.) zusammen, wenn dort $b=p$, $q = d$ gesetzt wird. Demnach ist

$$2. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \frac{q^{n|q}}{p^{n+1|q}} = \frac{q^n . 1^{n|1}}{p^{n+1|q}}.$$

Dieses Integral lässt sich auf verschiedene Formen bringen und man erhält

$$3. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \frac{1^{n|1}}{q(\frac{p}{q})^{n+1|1}} = \frac{1^{n|1}}{p(\frac{p}{q}+1)^{n|1}} = \frac{1^{\frac{p}{q}-1|1} . 1^{n|1}}{q . 1^{\frac{p}{q}+n|1}}$$

$$= \frac{1^{\frac{p}{q}|1} . 1^{n|1}}{p . 1^{\frac{p}{q}+n|1}} = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{p(n+1)^{\frac{p}{q}|1}}.$$

Auf gleiche Weise findet sich

$$4. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^{-q})^n \partial x = \frac{1^{n|1}}{p(\frac{p}{-q}+1)^{n|1}} = \frac{1^{\frac{p}{-q}|1} . 1^{n|1}}{p . 1^{\frac{p}{-q}+n,1}} = \frac{1^{\frac{p}{-q}|1}}{p(n+1)^{\frac{p}{-q}|1}}.$$

Stellt man die Gleichung, aus welcher $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x$ abgeleitet wurde, wieder her, multiplicirt mit x^q und integrirt wiederholt zwischen den Grenzen 0 und 1, so ergiebt sich

$$\int_0^1 x^q \partial x \int x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \frac{1}{p^{2|q}} - (n)_1 \frac{1}{(p+q)^{2|q}} + (n)_2 \frac{1}{(p+2q)^{2|q}}$$

$$- (n)_3 \frac{1}{(p+3q)^{2|q}} + \ldots.,$$

und hieraus, wenn man in (24. §. 32) $r = 2$, $q = d$, $b = p$ setzt:

$$5. \quad \int_0^1 x^q \partial x \int x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \frac{q^n . 2^{n|1}}{p^{n+2|q}}.$$

Es lässt sich auch folgender Ausdruck aufstellen:

$$6. \quad \int_0^1 x^q \partial x \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \frac{q^n . 2^{n|1}}{p^{n+2|q}},$$

wenn man erwägt, dass die Wiederherstellung der ursprünglichen Reihe, aus welcher $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x$ entsprang, der zweiten Integration vorhergehen muss. Auf gleiche Weise erhält man, unter der angegebenen Bedingung:

$$\int_0^1 x^q \partial x \int_0^1 x^q \partial x \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \frac{q^n . 3^{n|1}}{p^{n+3|q}}.$$

Fährt man auf diese Weise fort und wiederholt die Integration $r$mal, nachdem bei jeder spätern Integration die Reihen, aus welchen die vorhergehenden bestimmten Integrale entstanden, wiederhergestellt wurden, so findet sich nach (24. §. 32.) folgende Gleichung:

$$7. \quad \int_r^1 x^q \partial x \int_{r-1}^1 x^q \partial x \int_{r-2}^1 x^q \partial x \ldots \int_3^1 x^q \partial x \int_2^1 x^q \partial x \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \frac{q^n \, r^{n|1}}{p^{n+r|q}}.$$

Hier wurde das Wiederholen der Integration durch Zahlen, welche den Integralzeichen untergeschrieben sind, angedeutet. Man kann die Wiederholung des Integrirens auch dadurch andeuten, dass man das Zeichen nur einmal schreibt, und oben rechts die Zahl anschreibt. Dieses giebt mit Hülfe von (25. §. 32.):

$$8. \quad \int_0^{1\,(r-1)} x^q \partial x \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}-1|1} 1^{r+n-1|1}}{q^r 1^{r-1|1} 1^{\frac{p}{q}+n+r-1|1}} = \frac{r^{n|1}}{q^r \left(\frac{p}{q}\right)^{n+r|1}}$$

$$= \frac{1^{\frac{p}{q}-1|1}}{q^r 1^{r-1|1} (r+n)^{\frac{p}{q}|1}} = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{q^{r-1} 1^{r-1|1} . p (r+n)^{\frac{p}{q}|1}}.$$

Man sieht leicht, dass die Gleichung (3.) ein besonderer Fall von (8.) ist, und hat zu dem Ende $r = 1$ zu setzen, oder nur eine Integration zu machen. Die Gleichung (7.) oder (8.) gilt noch, wenn $-q$ statt q gesetzt wird.

Ein anderes wichtiges Integral findet sich auf folgende Art. Es ist

$$e^{-x^q} = 1 - x^q + \frac{x^{2q}}{1.2} - \frac{x^{3q}}{1.2.3} + \frac{x^{4q}}{1.2.3.4} - \frac{x^{5q}}{1.2.3.4.5} + \ldots.$$

Ferner ist

$$9. \quad \int x^{p-1} e^{-x^q} \partial x = \frac{x^p}{p} - \frac{x^{p+q}}{p+q} + \frac{x^{p+2q}}{1.2.(p+2q)} - \frac{x^{p+3q}}{1.2.3(p+3q)} + \frac{x^{p+4q}}{1.2.3.4(p+4q)} - \ldots.$$

Nun ist, wenn in (30. §. 33.) $r = 1$, $b = p$, $d = q$ gesetzt wird:

$$10. \quad \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{p} = \frac{x^p}{p} - \frac{x^{p+q}}{p+q} + \frac{x^{p+2q}}{1.2\,(p+2q)} - \frac{x^{p+3q}}{1.2.3(p+3q)} + \ldots.,$$

unter der Voraussetzung, dass $x = \infty$ ist. Nimmt man nun das Integral (9.) zwischen den Grenzen 0 und ∞, so erhält man

$$11. \quad \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^q} \partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{p}.$$

Eben so ist

$$12. \quad \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^{-q}} \partial x = \frac{1^{\frac{p}{-q}|1}}{p}.$$

Ausser diesen beiden Arten von bestimmten Integralen lassen sich auch noch andere auf Facultäten bringen. Behandelt man z. B. das Integral

$$\int x^{m-1} (\lg x)^n \partial x$$

nach der allgemeinen Reductionsformel

$$\int XZ \partial x = X \int Z \partial x - \int (\partial X \int Z \partial x),$$

und nimmt das Integral zwischen den Grenzen 0 und 1, so findet sich

$$13. \quad \int_0^1 x^{m-1} (\lg x)^n \partial x = (-1)^n \frac{1^{n|1}}{m^{n+1}}.$$

Auf gleiche Weise erhält man

$$14. \quad \int_0^1 x^{m-1} \left(\frac{1}{\lg x}\right)^n \partial x = \frac{1^{n|1}}{m^{n+1}}.$$

§. 34.

Die Gleichungen im vorigen Paragraph lassen eine Menge Anwendungen zu. Sie sind schon von *Euler* (Integral-Rechnung 1ter und 4ter Theil), von *Legendre* (Exerc. d. calc. intégr. T. I. und II.), von *Plana* (s. d. Journ. 17ter Bd.), von *Binet* (Journ. d. l'écol. polyt. T. XVI.: sur les intégrales définies Euleriennes) u. A. behandelt worden. Eine wiederholte Untersuchung könnte daher überflüssig scheinen, wenn nicht, wie schon bemerkt wurde, die weiter oben gewonnenen Entwicklungen Mittel abgäben, die bekannten Resultate auf eine einfachere und zweckmässigere Weise, und überhaupt allgemeiner durch (wie ich glaube) *neue* Sätze abzuleiten. Die folgenden Untersuchungen haben daher den Zweck, die zwei eben berührten Aufgaben zu lösen. Wir beginnen mit dem ersten Theile der Aufgabe, schliessen zur Erleichterung der Uebersicht unsere Untersuchung an die von *Euler* im 8ten und 9ten Cap. des ersten Theils der Integral-Rechnung behandelten Gegenstände an, und behalten seine Anordnung zur Auffindung der Sätze bei. Wir gehen hiebei von der vierten Form der in (3. §. 33.) angegebenen Gleichung

$$1. \quad \int_0^1 x^{p-1} (1-x^q)^n \partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1} . 1^{n|1}}{p . 1^{\frac{p}{q}+n|1}}$$

aus. Wird hierin $n=-\frac{1}{2}$, $p=1$, $q=2$ gesetzt, so ist nach (25. u. 26. §. 13.):

$$2. \quad \int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(-x^2)}} = 1^{\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{1}{2}|1} = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Wird in (1.) $q=2$, $n=-\frac{1}{2}$, $p=2n+1$ und dann $p=2n$ gesetzt, so erhält man

$$3. \quad \int_0^1 \frac{x^m \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1^{n+\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{1}{2}|1}}{(2n+1).1^{n|1}} = \frac{1^{\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{1}{2}|1}.1^{n|2}}{2^{n|2}} = \frac{1.3.5.7....(2n-1)}{2.4.6.8....2n}.\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$4. \quad \int_0^1 \frac{x^{2n-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1^{n|1}.1^{-\frac{1}{2}|1}}{2n.1^{n-\frac{1}{2}|1}} = \frac{2^{n-1|2}}{1^{n|2}} = \frac{2.4.6....(2n-2)}{1.3.5....(2n-1)}.$$

Setzt man in (4.) $n+1$ statt n und verbindet (3. und 4.) mit einander, so wird

$$5. \quad \int_0^1 \frac{x^{2n}\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} \int_0^1 \frac{x^{2n+1}\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{\pi}{2(2n+1)}.$$

Diese Gleichungen sind in (§. 330—332.) von *Eulers* Integralrechnung entwickelt. No. 2. wurde als bekannt vorausgesetzt und (3. und 4.) wurden aus der Analogie geschlossen.

Der Satz lässt sich leicht verallgemeinern. Aus (1.) erhält man nämlich für $q=2s$, $n=-\frac{1}{2}$, $p=p+1$ und $p=p+s+1$:

$$\int_0^1 \frac{x^p \partial x}{\sqrt{(1-x^{2s})}} \int_0^1 \frac{x^{p+s}\partial x}{\sqrt{(1-x^{2s})}} = \frac{1^{\frac{p+1}{2s}|1}.1^{-\frac{1}{2}|1}}{(p+1).1^{\frac{p+1}{2s}-\frac{1}{2}|1}} \cdot \frac{1^{\frac{p+1}{2s}-\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{1}{2}|1}}{(p+s+1).1^{\frac{p+1}{2s}|1}}.$$

Nun ist

$$1^{\frac{p+1}{2s}-\frac{1}{2}|1} = 1^{\frac{p+1}{2s}+\frac{1}{2}|1}.\frac{2s}{p+s+1}.$$

Wird dieser Werth substituirt, so ergiebt sich

$$6. \quad \int_0^1 \frac{x^p \partial x}{\sqrt{(1-x^{2s})}} \int_0^1 \frac{x^{p+s}\partial x}{\sqrt{(1-x^{2s})}} = \frac{\pi}{2s(p+1)}.$$

Hierin unterliegt weder p noch s irgend einer Beschränkung. Setzt man in (1.) $p+n$ statt p, so wird

$$7. \quad \int_0^1 x^{p-1}(x-x^{q+1})^n \partial x = \frac{1^{\frac{p+n}{q}|1}.1^{n|1}}{(p+n).1^{\frac{p+n}{q}+n|1}}.$$

Wird hierin $n=-\frac{1}{2}$, $\gamma=1$ gesetzt, so ergiebt sich

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt{(x-x^2)}} = \frac{1^{p-\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{1}{2}|1}}{(p-\frac{1}{2})1^{p-1|1}} = \frac{3^{p-1|2}\pi}{(2p-1)2^{p-2|2}}.$$

Für $p=p+1$ entsteht hieraus

$$8. \quad \int_0^1 \frac{x^p \partial x}{\sqrt{(x-x^2)}} = \frac{1^{p|2}}{2^{p|2}}\pi = \frac{1.3.5....(2p-1)}{2.4.6....2p}.\pi.$$

Dieses Integral wurde von *Euler* (§. 335. u. ff.) in der speciellen Form (8.) entwickelt. Die Gleichung (7.) ist ein viel allgemeineres Integral, weil

darin p, q und n keiner Beschränkung unterliegen. Die Gleichung lässt sich auch noch allgemeiner stellen, wenn in (1.) $p + rn$ statt p gesetzt wird. Man erhält

$$9. \quad \int_0^1 x^{p-1}(x^r - x^{q+r})^n \partial x = \frac{\mathbf{1}^{\frac{p+rn}{q}|1}\mathbf{1}^{n|1}}{(p+rn)\mathbf{1}^{\frac{p+rn}{q}|1}}.$$

Wird in (1.) $\frac{n}{m}$ statt n eingeführt, so erhält man

$$10. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}} \partial x = \frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{q}|1}.\mathbf{1}^{\frac{n}{m}|1}}{p.\mathbf{1}^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}.$$

Wird hierin $p + q$ statt p gesetzt, so ergiebt sich

$$\int_0^1 x^{p+q-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}} \partial x = \frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{q}+1|1}.\mathbf{1}^{\frac{n}{m}|1}}{(p+q).\mathbf{1}^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}+1|1}}.$$

Nun ist $\mathbf{1}^{\frac{p}{q}+1|1} = \mathbf{1}^{\frac{p}{q}|1}(\frac{q+p}{q})$ und $\mathbf{1}^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}+1|1} = \mathbf{1}^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}(1+\frac{p}{q}+\frac{n}{m})$. Durch Einführung dieser Werthe in die vorstehende Gleichung und mit Rücksicht auf (10.) ergiebt sich

$$11. \quad \int_0^1 x^{p+q-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}} \partial x = \frac{mp}{qm+pm+nq} \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}} \partial x.$$

Für $n = -m + k$ und $q = m$ folgt hieraus

$$12. \quad \int_0^1 \frac{x^{p+m-1}\partial x}{(1-x)^{\frac{m-k}{m}}} = \frac{p}{p+k}\int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{m-k}{m}}}.$$

Für $q = m$ und $-\frac{m-k}{m} = n$ wird aus (1.):

$$13. \quad \int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{m-k}{m}}} = \frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{m}|1}.\mathbf{1}^{-\frac{m-k}{m}|1}}{p.\mathbf{1}^{\frac{p+k}{m}-1|1}}.$$

Setzt man hierin $p + hm$ statt p, so findet sich

$$\int_0^1 \frac{x^{p+hm-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{m-k}{m}}} = \frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{m}+h|1}.\mathbf{1}^{-\frac{m-k}{m}|1}}{(p+hm)\mathbf{1}^{\frac{p}{m}+\frac{k}{m}-1+h|1}}.$$

Nun ist $\mathbf{1}^{\frac{p}{m}+h|1} = \frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{m}|1}(p+m)^{h|m}}{m^h}$ und $\mathbf{1}^{\frac{p}{m}+\frac{k}{m}-1+h|1} = \mathbf{1}^{\frac{p+k}{m}-1|1}.\frac{(p+k)^{h|m}}{m^h}$. Durch Einführung dieser Werthe in die vorstehende Gleichung ergiebt sich hieraus, mit Rücksicht auf (13.):

14. $$\int_0^1 \frac{x^{p+hm-1}\partial x}{(1-x^n)^{\frac{m-k}{m}}} = \frac{p(p+m)(p+2m)\ldots(p+(h-1)m)}{(p+k)(p+k+m)\ldots(p+k(+(h-1)m)}\int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{m-k}{m}}}$$
$$= \frac{(p+m)^{h-1|m}}{(p+k)^{h|m}} \cdot \frac{1^{\frac{p}{m}|1}.1^{-\frac{m-k}{m}|1}}{1^{\frac{p+k}{m}-1|1}}.$$

Aus (1.) ergiebt sich ferner für $n = -\frac{k}{m}$ und $p + k$ statt p:

15. $$\int_0^1 \frac{x^{p+k-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{n}{m}}} = \frac{1^{\frac{p+k}{m}|1}.1^{-\frac{k}{m}|1}}{(p+k).1^{\frac{p}{m}|1}}.$$

Ferner ist, wenn hierin $p + hm$ statt p gesetzt wird:

$$\int_0^1 \frac{x^{p+k+hm-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{k}{m}}} = \frac{1^{\frac{p+k}{m}+h|1}.1^{-\frac{k}{m}|1}}{(p+k+hm)^{\frac{p}{m}+h|1}} = \frac{(p+k+m)^{h|m}}{(p+k+hm).(p+m)^{h|m}} \cdot \frac{1^{\frac{p+k}{m}|1}\ 1^{-\frac{k}{m}|1}}{1^{\frac{p}{m}|1}}.$$

Hieraus ergiebt sich nach (16.):

16. $$\frac{x^{p+k+hm-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{k}{m}}} = \frac{(p+k)^{h|m}}{(p+m)^{h|m}} \int_0^1 \frac{x^{p+k-1}}{(1-x^m)^{\frac{k}{m}}}.$$

Aus der Verbindung von (16.) mit (14.) folgt

17. $$\int_0^1 \frac{x^{p+hm-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{m-k}{m}}}\int_0^1 \frac{x^{p+k+hm-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{k}{m}}} = \frac{p}{p+hm}\int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{m-k}{m}}}\int_0^1 \frac{x^{p+k-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{k}{m}}}.$$

Die Gleichungen (11., 13., 14. und 17.) hat *Euler* (§. 341—348.) entwickelt. Es sind dies die Integrale, welche er im 8ten Capitel der Integral-Rechnung 1ter Theil untersuchte; mit Ausnahme der zwei:

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\partial x \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^n};$$

welche hier, später in Verbindung mit andern, abgeleitet werden sollen.

§. 35

Im 9ten Capitel bringt *Euler* Integrale von bestimmter Form auf unendliche Factorenfolgen, und benutzt dieselben, um weitere, für die Integrale geltende Beziehungen daraus abzuleiten. Diese Beziehungen lassen sich durch die in (§. 12. und 13.) aufgestellten Sätze leicht ableiten, da dort der Zusammenhang zwischen unendlichen Factorenfolgen und Facultäten mit gebrochenen Exponenten nachgewiesen ist.

Werden die Facultäten $1^{\frac{1}{2}|1}$ und $1^{-\frac{1}{2}|1}$ nach (20. und 18. §. 13.) entwickelt, so geht der Ausdruck (2. §. 34.) in folgenden über:

1. $$\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8....}{1.3.3.5.5.7.7.9....}.$$

Diese Gleichung giebt *Euler* (§. 356.). Nach (13. §. 34.) ist

$$2.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{k-m}{m}}\partial x = \frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{m}|1}.\mathbf{1}^{\frac{k}{m}-1|1}}{p.\mathbf{1}^{\frac{pk}{m}-1|1}}.$$

Werden die Facultäten mit gebrochenen Exponenten nach (14. und 18. §. 13.) entwickelt, so erhält man

$$3.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{k-m}{m}}\partial x = \frac{m}{p.k}\cdot\frac{2m(p+k)}{(p+m)(k+m)}\cdot\frac{3m(p+k+m)}{(p+2m)(k+2m)}\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Eben so ist

$$4.\quad \int_0^1 x^{r-1}(1-x^m)^{\frac{k-m}{m}}\partial x = \frac{\mathbf{1}^{\frac{r}{m}|1}.\mathbf{1}^{\frac{k}{m}-1|1}}{p.\mathbf{1}^{\frac{r+k}{m}-1|1}}$$

$$= \frac{m}{r.k}\cdot\frac{2m(r+k)}{(r+m)(k+m)}\cdot\frac{3m(r+k+m)}{(r+2m)(k+2m)}\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Hieraus ergiebt sich das Verhältniss beider Integrale zu einander durch folgende Gleichung:

$$5.\quad \frac{\int_0^1 x^{p-1}(1+x^m)^{\frac{k-m}{m}}\partial x}{\int_0^1 x^{r-1}(1-x^m)^{\frac{k-m}{m}}\partial x} = \frac{r}{p}\cdot\frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{m}|1}.\mathbf{1}^{\frac{r+k}{m}-1|1}}{\mathbf{1}^{\frac{r}{m}|1}.\mathbf{1}^{\frac{p+k}{m}-1|1}}$$

$$= \frac{r}{p}\cdot\frac{(p+k)}{(r+k)}\cdot\frac{(r+m)(p+k+m)}{(p+m)(r+k+m)}\cdot\frac{(r+2m)(p+k+2m)}{(p+2m)(r+k+2m)}\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Diese Gleichungen findet *Euler* (§. 360 — 364.). Es ist bekanntlich $\mathbf{1}^{\frac{p}{m}|1} = \frac{p}{m}\mathbf{1}^{\frac{p}{m}-1|1}$. Wird dieser Werth in (2.) eingeführt, so erhält man

$$6.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{k-m}{m}}\partial x = \frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{m}-1|1}.\mathbf{1}^{\frac{k}{m}-1|1}}{m.\mathbf{1}^{\frac{p}{m}+\frac{k}{m}-1|1}}.$$

Vertauscht man in diesem Ausdruck die Buchstaben p und k, so erhält man

$$7.\quad \int_0^1 x^{k-1}(1-x^m)^{\frac{p-m}{m}}\partial x = \frac{\mathbf{1}^{\frac{k}{m}-1|1}.\mathbf{1}^{\frac{p}{m}-1|1}}{m.\mathbf{1}^{\frac{k+p}{m}-1|1}}.$$

Aus (6. und 7.) ist

$$8.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{k-m}{m}}\partial x = \int_0^1 x^{k-1}(1-x^m)^{\frac{p-m}{m}}\partial x.$$

Setzt man in (1. §. 34.) $\frac{n-m}{m}$ statt n und behandelt das Resultat auf die in (6.) angegebene Weise, so ergiebt sich

$$9.\quad \int_0^a x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-1}\partial x = \frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{q}|1}.\mathbf{1}^{\frac{n}{m}-1|1}}{p.\mathbf{1}^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}-1|1}} = \frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{q}-1|1}.\mathbf{1}^{\frac{n}{m}-1|1}}{q.\mathbf{1}^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}-1|1}}.$$

Vertauscht man hier die Grössen $\frac{p}{q}$ und $\frac{n}{m}$, so wird

$$10. \quad \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-1}\partial x = \frac{1^{\frac{n}{m}-1|1}.1^{\frac{p}{q}-1|1}}{m.1^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}-1|1}}.$$

Die Gleichungen (9. und 10.) führen zu folgender Formel:

$$11. \quad q.\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-1}\partial x = m\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-1}\partial x.$$

Diese Gleichungen hat *Euler* (§. 369—374.) behandelt. Die folgenden Paragraphen dieses Capitels sind der Untersuchung des Ausdrucks

$$\frac{1^{\frac{p}{m}-1|1}.1^{\frac{k}{m}-1|1}}{1^{\frac{p+k}{m}-1|1}} = \left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+k}{p.k}\cdot\frac{m(p+k+m)}{(p+m)\,(k+m)}\cdot\frac{2m(p+k+2m)}{(p+2m)\,(k+2m)}\cdots$$

und den damit zusammenhängenden Ableitungen gewidmet. Da die hierher gehörigen Sätze schon in (§. 13. 43 u. ff.) betrachtet wurden, so verweisen wir dorthin. Die dort gefundenen Sätze lassen sich auch auf Integrale übertragen und man erhält

$$12. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{q}{m}-1}\partial x\int_0^1 x^{p+q-1}(1-x^m)^{\frac{r}{m}-1}\partial x$$
$$= \int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{r}{m}-1}\partial x\int_0^1 x^{p+r-1}(1-x^m)^{\frac{q}{m}-1}\partial x$$
$$= \int_0^1 x^{q-1}(1-x^m)^{\frac{r}{m}-1}\partial x\int_0^1 x^{q+r-1}(1-x^m)^{\frac{p}{m}-1}\partial x.$$

Eben so ist

$$13. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{q}{m}-1}\partial x\int_0^1 x^{p+q-1}(1-x^m)^{\frac{r}{m}-1}\partial x.\int_0^1 x^{p+q+r-1}(1-x^m)^{\frac{s}{m}-1}\partial x$$
$$= \int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{q}{m}-1}\partial x.\int_0^1 x^{p+q-1}(1-x^m)^{\frac{s}{m}-1}\partial x\int_0^1 x^{p+q+s-1}(1-x^m)^{\frac{r}{m}-1}\partial x =$$
$$= \int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{r}{m}-1}\partial x\int_0^1 x^{p+r-1}(1-x^m)^{\frac{s}{m}-1}\partial x.\int_0^1 x^{p+r+s-1}(1-x^m)^{\frac{q}{m}-1}\partial x = \ldots.$$

u. s. w.

Aus den in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen mitgetheilten Entwicklungen dürfte sich der Beweis für die Einfachheit und Zweckmässigkeit der hier aufgestellten Ableitungsart ergeben. Eben so dürften die Entwicklungen dieses Paragraphs die Behauptung rechtfertigen, dass der Uebergang zu unendlichen Factorenfolgen ein Umweg und also überflüssig ist, da alle Sätze, welche durch die eben angedeutete Methode abgeleitet werden, viel einfacher durch ihre unmittelbare Beziehung, worin sie zu den Facultäten stehen, erlangt werden; wie hier deutlich vorliegt.

§. 36.

Die in (§. 33.) gefundenen Integrale sollen nun noch näher betrachtet

werden. Hebt man zuerst die Integrale (11. und 12.) hervor, und stellt sie durch unendliche Factorenfolgen dar, so erhält man folgende Formeln:

$$1. \quad \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^q} \partial x = \frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{q}|1}}{p} = \frac{q.2q.3q.4q.5q....}{p(p+q)(p+2q)(p+3q)....},$$

$$2. \quad \int_0^x x^{p-1} e^{-x^{-q}} \partial x = \frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{-q}|1}}{p} = \frac{q.2q.3q.4q.5q}{p(-p+q)(-p+2q)(-p+3q)....}.$$

Hier soll hauptsächlich die Gleichung

$$3. \quad \int_0^x x^{p-1} e^{-x^q} \partial x = \frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{q}|1}}{p}$$

betrachtet werden. Ist $q = 1$, so ergiebt sich

$$4. \quad \int_0^x x^{p-1} e^{-x} \partial x = \mathbf{1}^{p-1|1} = 1.2.3.4 \ldots. (p-1) = \frac{\mathbf{1}^{p|1}}{p}.$$

Diese Gleichung gilt auch, wenn p eine *gebrochene* Zahl ist. Für $p=1$ wird aus (3.)

$$5. \quad \int_0^\infty e^{-x^q} \partial x = \mathbf{1}^{\frac{1}{q}|1} = \frac{q.2q.3q.4q.5q....}{1.(1+q)(1+2q)(1+3q)....}.$$

Setzt man $x = az$, so wird $\partial x = a\partial z$ und man erhält aus (3.)

$$6. \quad \int_0^\infty z^{p-1} e^{-(az)^q} \partial z = \frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{q}|1}}{p.a^p}.$$

In dieser Gleichung kann auch z durch x vertreten werden. Man kann übrigens auch e^{a^q} auf der linken Seite ausstossen. Dann geht (6.) für $z = \frac{x}{a}$ in

$$7. \quad \int_0^\infty z^{p-1} e^{-z^q} \partial z = \frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{q}|1}}{pa^p.e^{a^q}}$$

über. Ist $q = 1$, so wird aus (6.)

$$8. \quad \int_0^\infty z^{p-1} e^{-(az)} \partial z = \frac{1.2.3....(p-1)}{a^p} = \frac{\mathbf{1}^{p-1|1}}{a^p}.$$

Für $p = 1$ wird

$$9. \quad \int_0^\infty e^{-az} \partial z = \frac{1}{a}.$$

Ist in (3.) $p > q$, also $\frac{p}{q}$ ein unächter Bruch, so lässt sich das Integral auf ein einfacheres bringen. Es sei für diesen Fall $\frac{p}{q} = m + \frac{n}{q}$. Dann ergiebt sich aus (3.)

$$\int_0^x x^{p-1} e^{-x^q} \partial x = \frac{\mathbf{1}^{m+\frac{n}{q}|1}}{mq+n} = \frac{\mathbf{1}^{\frac{n}{q}|1}(q+n)^n q}{(mq+n).q^m}.$$

Nun ist aus (3.)

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^q} \partial x = \frac{\mathbf{1}^{\frac{n}{q}|1}}{n}.$$

Wird dieser Werth in die vorstehende Gleichung auf der rechten Seite eingeführt, so entsteht folgende Reductionsformel:

$$\mathbf{10.} \quad \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^q} \partial x = \frac{n^{mq}}{q^m} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x^q} \partial x.$$

Diese Gleichung gilt unter der oben genannten Bedingung. Führt man nun den Werth $p = mq + n$ ein, so ergiebt sich folgender Ausdruck:

$$\mathbf{11.} \quad \int_0^\infty x^{mq+n-1} e^{-x^q} \partial x = \frac{n(n+q)(n+2q)\ldots(n+(m-1)q)}{q^m} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x^q} \partial x.$$

Ist p ein Vielfaches von q oder $p = mq$, so wird aus (3.)

$$\mathbf{12.} \quad \int_0^\infty x^{mq-1} e^{-x^q} \partial x = \frac{\mathbf{1.2.3}\ldots(m-1)}{q} = \frac{\mathbf{1}^{m|1}}{mq}.$$

Das nämliche Resultat würde man erhalten, wenn man in (14.) $n = 0$ setzte und die nöthigen Reductionen machte. Für $n = 1$ wird aus (11.)

$$\mathbf{13.} \quad \int_0^\infty x^{mq} e^{-x^q} \partial x = \frac{\mathbf{1}^{m|q}}{q^m} \int_0^\infty e^{-x^q} \partial x.$$

Wird p negativ genommen, so entsteht aus (3.):

$$\mathbf{14.} \quad \int_0^x \frac{e^{-x^q} \partial x}{x^{p+1}} = -\frac{\mathbf{1}^{-\frac{p}{q}|1}}{p} = -\frac{q.2q.3q.4q.5q\ldots}{p(-p+q)(-p+2q)(-p+3q)\ldots}.$$

Wird nun wie früher $p = mq + n$ gesetzt, so erhält man

$$\mathbf{15.} \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x^q} \partial x}{x^{mq+n+1}} = -\frac{\mathbf{1}^{-\frac{n}{q}|1}\left(\mathbf{1}-\frac{n}{q}\right)^{-m|1}}{mq+n} = (-\mathbf{1})^{m+1} \frac{q^m.\mathbf{1}^{-\frac{n}{q}|1}}{n^{m+1|q}}.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn (14.) benutzt wird:

$$\mathbf{16.} \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x^q} \partial x}{x^{mq+n+1}} = (-\mathbf{1})^m \frac{q^m}{(n+q)^{m|q}} \int_0^\infty \frac{e^{-x^q} \partial x}{x^{n+1}}.$$

Ist $n = 0$ oder p ein Vielfaches von m, so wird in Rücksicht auf (15. §. 4.)

$$\mathbf{17.} \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x^q}}{x^{mq+1}} = \frac{\mathbf{1}^{-m|1}}{-mq} = (-\mathbf{1})^m \frac{\infty}{\mathbf{1}^{m|1}.q}.$$

Alle Integrale dieser Art sind unendlich gross. Das Gleiche gilt nicht von Integralen von der Form

$$\mathbf{18.} \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x^{-q}} \partial x}{x^{p+1}} = \frac{\mathbf{1}^{\frac{-p}{-q}|1}}{-p} = \frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{q}|1}}{-p}.$$

Vergleicht man (2. und 14.) mit einander, so erhält man

$$\mathbf{19.} \quad \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^{-q}} \partial x = -\int_0^\infty \frac{e^{-x^q} \partial x}{x^{p+1}} = \int_0^\infty \frac{e^{-x^q}}{x^{p+1}}.$$

Eben so ist aus (18. und 3.):

$$20. \quad \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^q} \partial x = -\int_0^\infty \frac{e^{-x^{-q}}}{x^{p+1}} = \int_0^\infty \frac{e^{-x^{-q}} \partial x}{x^{p+1}}.$$

Bisher wurde vorausgesetzt, dass $1^{\frac{-p}{q}|1} = 1^{\frac{p}{q}|1}$ sei. Dies rechtfertigt sich einerseits aus den Elementen der Algebra, andererseits lässt es sich auch auf folgende Art zeigen. Es ist aus (16. §. 13.)

$$1^{-\frac{p}{q}|1} = \frac{q.2q.3q.4q....}{(-p+q)(-p+2q)(-p+3q)(-p+4q)....}.$$

Wird die Facultät $1^{\frac{p}{-q}|1}$ nach (14. §. 13.) dargestellt, so ist

$$1^{\frac{p}{-q}|1} = \frac{(-q).2(-q).3(-q).4(-q)....}{(p-q)(p-2q)(p-3q)(p-4q)....} = \frac{(-1)^\infty q.2q.3q.4q....}{(-1)^\alpha(-p+q)(-p+2q)(-p+3q)(-p+4q)....}.$$

Hiernach ist

$$21. \quad 1^{\frac{p}{-q}|1} = 1^{\frac{-p}{q}|1} = 1^{-\frac{p}{q}|1}.$$

Ist $\frac{p}{q}$ ein ächter Bruch und $\frac{p}{q} + \frac{r}{q} = 1$, also $q-p=r$ und $q-r=p$, so ist bekanntlich aus (§. 22.):

$$1^{\frac{p}{q}|1} = 1^{1-\frac{r}{q}|1} = \frac{p}{q}.1^{-\frac{r}{q}|1}.$$

Nun ist

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^q} \partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{p} = \frac{1}{q}.1^{-\frac{r}{q}|1}.$$

Ferner ist aus (2.)

$$\int_0^\infty x^{r-1} e^{-x^{-q}} \partial x = \frac{1^{\frac{r}{-q}|1}}{r}.$$

Diese beiden Gleichungen geben

$$22. \quad q\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^q} \partial x = r\int_0^\infty x^{r-1} e^{-x^{-q}} \partial x,$$

oder

$$23. \quad q\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^q} \partial x = (q-p)\int_0^\infty x^{q-p-1} e^{-x^{-q}} \partial x.$$

Setzt man in (1.) $mq+p$ statt p und dann $-mp+r$ in (2.), unter der Bedingung, dass $\frac{p}{q} + \frac{r}{q} = 1$ ist, so erhält man folgende zwei Ausdrücke:

$$\int_0^\infty x^{mq+p-1} e^{-x^q} \partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}+m|1}}{mq+p} = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{mq+p}.\frac{(p+q)^{m|q}}{q^m} = 1^{-\frac{r}{q}|1}\frac{p^{m|q}}{q^{m+1}} \text{ und}$$

$$\int_0^\infty x^{-mq+r-1} e^{-x^{-q}} \partial x = \frac{1^{-\frac{r}{q}+m|1}}{-mq+r} = \frac{1^{-\frac{r}{q}|1}}{-mq+r}\frac{p^{m|q}}{q^m}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich folgende:

$$24. \quad q\int_0^\infty x^{mq+p-1} e^{-x^q} \partial x = (-mq+r)\int_0^\infty x^{-mq+r-1} e^{-x^{-q}} \partial x.$$

Die Gleichungen (**22.** und **23.**) lassen sich leicht aus dieser ableiten. Verbindet man (**11.**) mit (**16.**), so erhält man

$$\textbf{25.}\quad \int_0^\infty x^{mq+n-1}e^{-x^q}\partial x\int_0^\infty \frac{e^{-x^q}}{x^{mq+n-1}}\partial x=(-1)^m\frac{n}{n+qm}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x^q}\partial x\int_0^\infty \frac{e^{-x^q}\partial x}{x^{n+1}}.$$

Specielle Fälle ergeben sich aus den hier aufgestellten Resultaten leicht. Ist z. B. $q=2$, so wird aus (**5.**)

$$\textbf{26.}\quad \int_0^\infty e^{-xx}\partial x=\mathbf{1}^{\frac{1}{2}|1}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Für $q=2$, $p=1$ wird aus (**14.**)

$$\textbf{27.}\quad \int_0^\infty \frac{e^{-xx}\partial}{x^2}=-\mathbf{1}^{-\frac{1}{2}|1}=-\sqrt{\pi}.$$

Für $q=2$ ist aus (**12.**, **13.** und **16.**)

$$\textbf{28.}\quad \int_0^\infty x^{2m-1}e^{-xx}\partial x=\tfrac{1}{2}(\mathbf{1}.\mathbf{2}.\mathbf{3}.\mathbf{4}\ldots.(m-1),$$

$$\textbf{29.}\quad \int_0^\infty x^{2m}e^{-xx}\partial x=\frac{\mathbf{1}^{m|2}}{\mathbf{2}^m}\int_0^\infty e^{-xx}\partial x=\frac{\mathbf{1}.\mathbf{3}.\mathbf{5}\ldots.(\mathbf{2}m-\mathbf{1})}{\mathbf{2}^{m+1}}\sqrt{\pi},$$

$$\textbf{30.}\quad \int_0^\infty \frac{e^{-xx}\partial x}{x^{2m+2}}=(-1)^m\frac{2^m}{3^{m|2}}\int_0^\infty \frac{e^{-xx}\partial x}{x^2}=(-1)^{m+1}\frac{2^m\sqrt{\pi}}{\mathbf{3}.\mathbf{5}.\mathbf{7}\ldots.(\mathbf{2}m+\mathbf{1})}.$$

Aus (**22.** oder **23.**) ist für $q=6$ und $p=3$, $p=4$:

$$\textbf{31.}\quad 6\int_0^\infty x^2e^{-x^6}\partial x=3\int_0^\infty x^2e^{-x^{-6}}\partial x=\sqrt{\pi},$$

$$6\int_0^\infty x^3e^{-x^6}\partial x=2\int_0^\infty xe^{-x^{-6}}\partial x=\mathbf{1}^{-\frac{1}{3}|1}$$

u. s. w. Aus (**29.** und **30.**) wird

$$\textbf{32.}\quad \int_0^\infty x^{2m}e^{-xx}\partial x\int_0^\infty \frac{e^{-xx}\partial x}{x^{2m+2}}=(-1)^{m+1}\cdot\frac{\pi}{\mathbf{2}(\mathbf{2}m+\mathbf{1})}.$$

Hieraus und aus (**5.** §. **34.**) ergiebt sich folgende Beziehung:

$$\textbf{33.}\quad \int_0^1\frac{x^{2m}\partial x}{\sqrt{(\mathbf{1}-x^2)}}\int_0^1\frac{x^{2m+1}\partial x}{\sqrt{(\mathbf{1}-x^2)}}=(-1)^{m+1}\int_0^\infty x^{2m}e^{-xx}\partial x\int_0^\infty\frac{e^{-xx}\partial x}{x^{2m+2}}$$

Setzt man $\frac{p}{q}$ statt p in (**4.**), so erhält man

$$\int_0^\infty x^{\frac{p}{q}-1}e^{-x}\partial x=\frac{q.\mathbf{1}^{\frac{p}{q}|1}}{p}.$$

Hieraus ergiebt sich, mit Rücksicht auf (**3.**), folgende Relation:

$$\textbf{34.}\quad \int_0^\infty x^{p-1}.e^{-x^q}\partial x=\frac{\mathbf{1}}{q}\int_0^\infty\frac{\sqrt[q]{x^p}e^{-x}\partial x}{x}.$$

Wird in (**4.**) $\frac{p}{q}+\mathbf{1}$ statt p gesetzt, so erhält man

$$\int_0^\infty x^{\frac{p}{q}}e^{-x}\partial x=\mathbf{1}^{\frac{p}{q}|1}.$$

Hieraus und aus (**3.**) ergiebt sich die Relation

$$\textbf{35.}\quad p\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x=\int_0^\infty\sqrt[q]{x^p}.e^{-x}\partial x.$$

§. 37.

Die im vorigen Paragraph aufgestellten Gleichungen sind noch weiterer Anwendungen fähig. Verbindet man (1.) mit (2.), so ergiebt sich

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^q}\,\partial x \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^{-q}}\,\partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}.1^{-\frac{p}{q}|1}}{p^2}.$$

Hieraus entsteht, mit Rücksicht auf (21. §. 26.),

$$1.\quad \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^q} \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^{-q}}\,\partial x = \frac{\pi}{p.q \sin\frac{p}{q}\pi}.$$

Wird in (1. §. 36.) $p - q$ statt p gesetzt, so entsteht hieraus und aus (14.), mit Rücksicht auf (20. §. 26.),

$$2.\quad \int_0^\infty \frac{x^p e^{-x^q}}{x^{q+1}}\,\partial x \int_0^\infty \frac{e^{-x^q}}{x^{p+1}}\,\partial x = \frac{\pi}{p(q-p)\sin\frac{p}{q}\pi}.$$

Wird in (1. und 2. §. 36.) $-p+q$ statt p gesetzt, so entsteht, in Rücksicht auf (22. §. 26.),

$$3.\quad \int_0^\infty \frac{x^q e^{-x^{-q}}}{x^{p+1}}\,\partial x \int_0^\infty \frac{x^q e^{-x^q}}{x^{p+1}}\,\partial x = \frac{\pi}{q(q-p)\sin\frac{p}{q}\pi}.$$

Wird in (3. §. 36.) $-p+q$ statt p gesetzt und das Resultat mit (3.) verbunden, so ergiebt sich, mit Rücksicht auf (23. §. 29.),

$$4.\quad \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^q}\,\partial x = \int_0^\infty \frac{x^q e^{-x^q}}{x^{p+1}}\,\partial x = \frac{\pi}{q^2 \sin\frac{p}{q}\pi}.$$

Wird in (3. §. 36.) $-p-q$ statt p und $p+q$ statt p gesetzt, so findet sich, mit Rücksicht auf (22. §. 26.),

$$5.\quad \int_0^\infty \frac{e^{-x^q}}{x^{p+q+1}}\,\partial x \int_0^\infty x^{p+q-1} e^{-x^q}\,\partial x = \frac{\pi}{q(p+q)\sin\frac{p}{q}\pi}.$$

Wird in (3. §. 36.) $-p$ statt p und $p+q$ statt p gesetzt, so erhält man, mit Rücksicht auf (25. §. 26.),

$$6.\quad \int_0^\infty \frac{e^{-x^q}\,\partial x}{x^{p+1}} \int_0^\infty x^{p+q-1} e^{-x^q}\,\partial x = -\frac{\pi}{q^2 \sin\frac{p}{q}\pi}.$$

Wird in (3. §. 36.) $-p-q$ statt p gesetzt und das Resultat mit (3.) verbunden, so ergiebt sich, mit Rücksicht auf (26. §. 26.),

$$7.\quad \int_0^\infty \frac{e^{-x^q}}{x^{p+q+1}}\,\partial x \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^q}\,\partial x = \frac{\pi}{p(p+q)\sin\frac{p}{q}\pi}.$$

Wird in (3. §. 36.) $p+q$ statt p, $-q$ statt q, und dann $p-q$ statt p gesetzt, so erhält man, mit Rücksicht auf (27. §. 26.),

$$8. \quad \int_0^\infty x^{p+q-1} e^{-x^{-q}} \partial x \int_0^\infty \frac{x^p}{x^{q+1}} e^{-x^q} \partial x = \frac{q}{p(p+q)(q-p)} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{p}{q} \pi}.$$

So wurden hier aus den Gleichungen des vorigen Paragraphs und aus den Gleichungen (20. bis 27. §. 26.) acht Relationen abgeleitet. Benutzt man die Gleichungen (2., 3., 14. und 18. §. 36.), so lassen sich durch Einführung schicklicher Werthe für jede der genannten Formeln in (§. 26.) drei Gleichungen aufstellen, die, wegen der verschiedenen Entstehungsart, auf verschiedene Formen führen, aber im Allgemeinen häufig die nämlichen Resultate geben werden; wie sich dies in (4. und 6.) zeigte. Wendet man diese Bemerkung auf (21. §. 26.) an, so erhält man aus (3. und 14., 14. und 18. §. 36.) folgende Relationen:

$$9. \quad \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^q} \partial x \int_0^\infty \frac{e^{-x^q}}{x^{p+1}} \partial x = -\frac{\pi}{pq \sin \frac{p}{q} \pi},$$

$$10. \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x^q}}{x^{p+1}} \partial x \int_0^\infty \frac{e^{-x^{-q}}}{x^{p+1}} \partial x = \frac{\pi}{pq \sin \frac{p}{q} \pi}.$$

In (1., 9. und 10.) ist die Form verschieden, der Inhalt gleich. Man kann endlich auch dadurch noch mehr Mannigfaltigkeit in diese Relationen bringen, dass man bei den Ableitungen das nachstehende Integral benutzt:

$$11. \quad \int_0^\infty x^{tp-1} e^{-x^{tq}} \partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{tp} = \frac{1}{t} \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^q} \partial x.$$

Eine etwas allgemeinere, hieher gehörige Relation ergiebt sich aus (25. §. 36.), nämlich:

$$12. \quad \int_0^\infty x^{mq+n-1} e^{-x^q} \partial x \int_0^\infty \frac{e^{-x^q} \partial x}{x^{mq+n-1}} = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{q(n+qm) \sin \frac{n}{q} \pi}.$$

Eine Reihe solcher Relationen lassen sich aus der Gleichung (4. §. 36.) und aus den Gleichungen (20. bis 27. §. 26.) finden. Sie sollen hier bloss zusammengestellt werden, da ihre Ableitung nach der eben angegebenen Methode keine weitere Schwierigkeit hat. Es sind folgende:

$$13. \quad \int_0^\infty \frac{\sqrt[q]{x^p} e^{-x}}{x} \partial x \int_0^\infty \frac{e^{-x} \partial x}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{\pi}{\sin \frac{p}{q} \pi},$$

14. $$\int_0^\infty \frac{x^p \cdot e^{-x}\,\partial x}{\sqrt[q]{x^p}} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-x}\,\partial x}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{p\pi}{q \cdot \sin\frac{p}{q}\pi},$$

15. $$\int_0^\infty \frac{x \cdot e^{-x}\,\partial x}{\sqrt[q]{x^p}} \int_0^\infty \frac{\sqrt[q]{x^p} \cdot e^{-x}}{x} = \frac{q-p}{q} \frac{\pi}{\sin\frac{p}{q}\pi},$$

16. $$\int_0^\infty \frac{x \cdot e^{-x}\,\partial x}{\sqrt[q]{x^p}} \int_0^\infty \sqrt[q]{x^p} \cdot e^{-x}\,\partial x = \frac{p(q-p)}{q^2} \frac{\pi}{\sin\frac{p}{q}\pi},$$

17. $$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,\partial x}{x\sqrt[q]{x^p}} \int_0^\infty x\sqrt[q]{x^p} \cdot e^{-x}\,\partial x = -\frac{p+q}{q} \frac{\pi}{\sin\frac{p}{q}\pi},$$

18. $$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,\partial x}{\sqrt[q]{x^p}} \int_0^\infty x\sqrt[q]{x^p} \cdot e^{-x}\,\partial x = \frac{p(p+q)}{q^2} \frac{\pi}{\sin\frac{p}{q}\pi},$$

19. $$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,\partial x}{x\sqrt[q]{x^p}} \int_0^\infty \sqrt[q]{x^p} \cdot e^{-x}\,\partial x = -\frac{\pi}{\sin\frac{p}{q}\pi},$$

20. $$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,\partial x}{x\sqrt[q]{x^p}} \int_0^\infty \frac{\sqrt[q]{x^p} \cdot e^{-x}\,\partial x}{x} = -\frac{q}{p} \frac{\pi}{\sin\frac{p}{q}\pi}.$$

Auf ganz gleiche Weise erhält man aus (§. 36. und §. 27.) folgende Relationen:

21. $$\int_0^\infty \frac{x^{2p}\, e^{-x^{2q}}}{x^{q+1}}\,\partial x \int_0^\infty \frac{e^{-x^{2q}}\,\partial x}{x^{2p+q+1}} = \frac{\pi}{(q^2-4p^2)\cos\frac{p}{q}\pi},$$

22. $$\int_0^\infty x^{2p+q-1} e^{-x^{2q}}\,\partial x \int_0^\infty \frac{e^{-x^{2q}}\,\partial x}{x^{2p+q+1}} = -\frac{\pi}{2q(q+2p)\cos\frac{p}{q}\pi},$$

23. $$\int_0^\infty x^{2p+q-1} e^{-x^{2q}}\,\partial x \int_0^\infty x^{2p+q-1} e^{-x^{-2q}}\,\partial x = \frac{\pi}{2q(2p+q)\cos\frac{p}{q}\pi},$$

24. $$\int_0^\infty \frac{x^{2p}\, e^{-x^{2q}}\,\partial x}{x^{q+1}} \int_0^\infty \frac{x^q\, e^{-x^{2q}}\,\partial x}{x^{2p+1}} = \frac{\pi}{2q(2p-q)\cos\frac{p}{q}\pi},$$

25. $$\int_0^\infty x^{2p+q-1} e^{-x^{2q}}\,\partial x \int_0^\infty \frac{x^q\, e^{-x^{2q}}\,\partial x}{x^{2p+1}} = \frac{\pi}{4q^2\cos\frac{p}{q}\pi},$$

26. $$\int_0^\infty \frac{\sqrt[q]{x^p}\, e^{-x}\,\partial x}{\sqrt{x}} \int_0^\infty \frac{e^{-x}\,\partial x}{\sqrt[q]{x^p}\sqrt{x}} = \frac{\pi}{\cos\frac{p}{q}\pi},$$

$$27.\quad \int_0^\infty \sqrt{x^p}\,.\sqrt{x}\,e^{-x}\partial x \int_0^\infty \frac{e^{-x}\,\partial x}{\sqrt[q]{x^p}\sqrt{x}} = \frac{q+2p}{2q}\,\frac{\pi}{\cos\frac{p}{q}\pi},$$

$$28.\quad \int_0^\infty \frac{\sqrt[q]{x^p}\,e^{-x}\partial x}{\sqrt{x}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,.e^{-x}\partial x}{\sqrt{x^p}} = \frac{q-2p}{2q}\,\frac{\pi}{\cos\frac{p}{q}\pi},$$

$$29.\quad \int_0^\infty \sqrt[q]{x^p}\sqrt{x}\,e^{-x}\partial x \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,e^{-x}\partial x}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{q^2-4p^2}{4q^2}\,\frac{\pi}{\cos\frac{p}{q}\pi}$$

u. s. w. Auch auf Tangenten lassen sich diese Beziehungen ausdehnen. Sie werden dann etwas zusammengesetzter.

Legendre hat das Integral $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x$, welches in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen betrachtet wurde, nicht behandelt, sondern nur bemerkt (Exerc. d. c. calc. intégr. T. I. pg. 300. und 301.), dass man dasselbe auf Facultäten (fonctions Γ) zurückführen könne. Er bringt es auf die von ihm genannten *Euler*'schen Integrale zweiter Art und stellt es in der speciellen Form $\int_0^\infty e^{-x^q}\partial x$ (5. §. 36) dar, indem er behauptet, dass es durchaus nichts an seiner Allgemeinheit verliere, wenn es unter dieser speciellen Form betrachtet wird. Es lässt sich nun leicht das Integral $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x$ auf die Form $\int_0^\infty e^{-x^n}\partial x$ bringen, wenn man $\frac{q}{p}$ statt q in (5. §. 36.) setzt. Hiedurch und aus (3. §. 36.) erhält man folgende Reductionsformel:

$$30.\quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^{\frac{q}{p}}}\partial x = \frac{1}{p}\,.\,1^{\frac{p}{q}|1}.$$

Eine zweite Reductionsformel ergiebt sich unmittelbar aus (35. §. 36.), nämlich:

$$31.\quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = \frac{1}{p}\int_0^\infty \sqrt[q]{x^p}\,e^{-x}\partial x;$$

wie denn auch

$$32.\quad \int_0^\infty e^{-x^{\frac{q}{p}}}\partial x = \int_0^\infty e^{-x}\sqrt[q]{x^p}\,\partial x$$

ist. Nun hat *Legendre* weiter folgende Reductionsformel angegeben:

$$33.\quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = \int_0^\infty \frac{q}{p}\,.\,e^{-x^{\frac{p}{q}}}\partial x.$$

Sie ist unrichtig, wie sich selbst aus der von ihm angegebenen Reductionsmethode zeigen lässt. Setzt man nämlich $\frac{q}{p}$ statt q, $z = x^p$ in $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x$, so ist $x = z^{\frac{1}{p}}$, $\partial x = \frac{1}{p}\,.\,z^{\frac{1}{p}-1}\partial z$, $x^{p-1} = z^{1-\frac{1}{p}}$, $x^q = z^{\frac{q}{p}}$ und man erhält

$$34.\quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-z^{\frac{q}{p}}}\partial z.$$

Diese Gleichung stimmt mit (30.), aber nicht mit der von *Legendre* gegebenen (33.) überein. Was *Legendre* behauptet, dass allgemein

$$\int_0^\infty e^{-x^q}\,\partial x = \frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)$$

sei, ist insofern richtig, als die vorstehende Gleichung in dieser Form allgemeine Gültigkeit hat, unrichtig aber insofern, als hiedurch und durch seine Reductionsformel das hier in Frage stehende allgemeine Integral nicht repräsentirt wird. Dass das fragliche Integral auf Facultäten zurückgebracht werden kann, hat keinen Zweifel: dass es aber auch besondere Eigenthümlichkeiten darbietet, die Beachtung verdienen, dürfte sich aus den Mittheilungen dieses und des vorhergehenden Paragraps ergeben.

Da *Legendre* eine Facultät, deren Exponent ein ächter positiver Bruch ist, direct nicht bezeichnen kann, so muss er es indirect thun, und sie umformen. Dies geschieht auch in dem vorliegenden Falle. Die Umformung ist

$$1^{\frac{1}{q}|1} = 1^{\frac{1}{q}-1+1|1} = \frac{1}{q}.1^{\frac{1}{q}-1|1} = \frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{1}{q}\right).$$

Das fragliche Integral kann daher nicht mehr in der ursprünglichen Gestalt bleiben, sondern muss in eine andere umgeformt werden. Dies führt zu folgender, von *Legendre* weiter angegebenen Reductions-Formel, die sich aus (14. §. 33.) leicht rechtfertigen lässt, nämlich zu der Formel:

$$35.\quad \int_0^\infty e^{-x^q}\,\partial x = \frac{1}{q}\int_0^1 \partial x\,(\lg\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{q}-1} = \frac{1}{q}.1^{\frac{1}{q}-1|1} = \frac{1}{q}\Gamma(\tfrac{1}{q}) = {}^{\frac{1}{q}}|^1.$$

Einfacher hätte *Legendre* das Integral auf folgende Weise darstellen können:

$$36.\quad \int_0^\infty e^{-x^q} = \Gamma(1+\frac{1}{q}) = 1^{\frac{1}{q}|1}.$$

Eine Reduction dieses Integrals auf ein *Euler*'sches von der zweiten Art, in der ursprünglichen Form, ist

$$37.\quad \int_0^\infty e^{-x^q} = \int_0^1 (\lg\tfrac{1}{x})^{\frac{1}{q}}\,\partial x = 1^{\frac{1}{q}|1}.$$

Die Reduction des allgemeinen Integrals (1. §. 36.), im Sinne *Legendre*'s auf ein *Euler*'sches von der zweiten Art, ist:

$$38.\quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\,\partial x = \frac{1}{p}\int_0^1 (\lg\tfrac{1}{x})^{\frac{p}{q}}\,\partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{p} = \frac{1}{p}\Gamma(1+\tfrac{p}{q}).$$

Legendre giebt a. a. O. eine Notiz über die Geschichte des fraglichen Integrals, indem er sagt: „Il n'est pas inutile pour l'histoire de la science, „d'observer que l'intégrale $\int \partial x\,(\lg\frac{1}{x})^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$ que l'on trouve §. 28. du mémoire

„d'*Euler,* imprimé dans le tom. XVI. de Novi Comm. Petrop., avait été donné „long-temps auparavant par le même auteur, dans le tom. V. des anciens mé- „moires de Petersbourg, pg. 44. C'est donc à cette époque que remonte la „découverte de l'integrale $\int_0^\infty e^{-xx}\,\partial x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, puisque la simple substitution „$e^{-xx} = z$ suffit pour ramener l'intégrale $\int_0^\infty e^{-xx}\,\partial x$ à la forme $\frac{1}{2}\int_0^1 \partial z\,(\lg \frac{1}{z})^{-\frac{1}{2}}$." *Kramp* hat (Anal. d. réfr. pg. 64.) die Gleichungen (3., 4., 12., 13., 19) und specielle Fälle von (28. bis 30. §. 36. und 11. dieses Paragraphs) gegeben.

§. 38.

Es lässt sich nun das Integral (3. §. 33.) einer näheren Betrachtung unterwerfen und es lassen sich leicht allgemeinere Relationen für Integrale dieser Art finden. Dabei ergeben sich vier Formen, die in folgendem Ausdruck begriffen sind:

$$\int_0^1 x^{p\pm tq-1}\,\partial x\,(1-x^q)^{\frac{n}{m}\pm r}.$$

Hier sind t und r ganze Zahlen. Auch p und n können negativ genommen werden. Die besondern Fälle werden sich leicht aus den allgemeinen Gleichungen ableiten lassen. Der Fall, wenn t und r positiv sind, soll zuerst betrachtet werden. Man erhält sofort aus (1. §. 30.)

$$\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}+t|1}\,.\,1^{\frac{n}{m}+r|1}}{(p+tq)\,1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}+t+r|1}}.$$

Trennt man die Facultäten, so ergiebt sich

$$1.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x = \frac{1}{p+tq}\cdot\frac{(m+n)^{r|m}\,(q+p)^{t|q}\,.\,q^r\,.\,m^t}{(pm+qn+qm)^{r+t|qm}}\cdot\frac{1^{\frac{n}{m}}\,.\,1^{\frac{p}{q}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}.$$

Es lässt sich in diese Gleichung das Integral nach (3. §. 33.) einführen. Dies giebt folgende Reductionsformel:

$$2.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x = \frac{(n+m)^{r|m}\,(p+q)^{t|q}\,q^r\,.\,m^t}{(pm+qn+qm)^{r+t|qm}}\cdot\frac{p}{p+tq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x$$

$$= \frac{(1+\frac{n}{m})^{r|1}\,.\,1+\frac{p}{q})^{t|1}}{(1+\frac{p}{q}+\frac{n}{m})^{r+t|1}}\cdot\frac{p}{p+tq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x.$$

Wird hierin $r = t$ gesetzt, so erhält man

$$3.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+t}\partial x = \frac{(n+m)^{t|m}(p+q)^{t|q}q^t.m^t}{(pm+qn+qm)^{2t|qm}}\cdot\frac{p}{p+tq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x$$

$$= \frac{(n+m)^{t|m}(p+q)^{t|q}q^t m^t}{(pm+qn+qm)^{2t|qm}}\cdot\frac{1}{p+tq}\cdot\frac{1^{\frac{p}{q}|1}.1^{\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}.$$

Werden hier $\frac{p}{q}$ und $\frac{n}{m}$ vertauscht, so ergiebt sich

$$4.\quad \int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+t}\partial x = \frac{(p+q)^{t|q}(n+m)^{t|m}m^t.q^t}{(qn+pm+qm)^{2t|mq}}\cdot\frac{n}{n+tm}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x$$

$$= \frac{(p+q)^{t|q}(n+m)^{t|m}m^t.q^t}{(qn+pm+qm)^{2t|mq}}\cdot\frac{1}{n+tm}\cdot\frac{1^{\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{p}{q}|1}}{1^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}|1}}.$$

Aus (3. und 4.) findet sich folgende bemerkenswerthe allgemeine Beziehung:

$$5.\quad (p+tq)\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+t}\partial x = (n+tm)\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+t}\partial x.$$

Setzt man $t=0$, so ergiebt sich ferner

$$6.\quad p\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x = n\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x.$$

Die Gleichung (6.), welche hier als ein specieller Fall einer allgemeinen erscheint, kann auch auf eine ganz einfache Weise aus (3. §. 33.) abgeleitet werden. Aus (3. und 4.) folgt ferner nachstehende Relation:

$$7.\quad \frac{n}{n+tm}\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+t}\partial x\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x$$

$$= \frac{p}{p+tq}\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^q)^{\frac{p}{q}+t}\partial x\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x.$$

Allgemeiner werden diese Relationen, wenn man in (2.) $\frac{p}{q}$ und $\frac{n}{m}$ vertauscht. Dann ist aus (1. und 2.)

$$8.\quad \int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+r}\partial x = \frac{(p+q)^{r|q}(n+m)^{t|m}m^r.q^t}{(nq+mp+mq)^{r+t|mq}}\cdot\frac{n}{n+tm}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x$$

$$= \frac{(1+\frac{p}{q})^{r|1}(1+\frac{n}{m})^{t|1}}{(1+\frac{n}{m}+\frac{p}{q})^{r+t|1}}\cdot\frac{1}{n+tm}\cdot\frac{1^{\frac{p}{q}|1}1^{\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}|1}}.$$

Aus (1. und 8.) folgt nun

$$9.\quad \frac{p+tq}{(m+n)^{r|m}(q+p)^{r|q}q^r.m^t}\cdot\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x$$

$$= \frac{n+tm}{(p+q)^{r|q}(n+m)^{t|m}m^r.q^t}\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+r}\partial x.$$

Aus (2. und 8.) folgt

$$\textbf{10.}\quad \frac{n(p+q)^{r|b}(n+m)^{t|m}m^r q^t}{n+tm}\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x\int_0^1 x^{n-1}(1-x^q)^{\frac{p}{q}}\partial x$$
$$=\frac{p(n+m)^{r|m}(p+q)^{t|q}q^r m^t}{p+tq}\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^q)^{\frac{p}{q}+r}\partial x\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x,$$

Setzt man $-t$ statt t und $-r$ statt r in (1. und 2.), so ergiebt sich in Rücksicht auf (§. 4.):

$$\textbf{11.}\quad \int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\partial x=\frac{(pm+qn)^{r+t|-qm}}{n^{r|-m}p^{t|-q}q^r m^t}\cdot\frac{p}{p-tq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x$$
$$=\frac{\left(\frac{p}{q}+\frac{n}{m}\right)^{r+t|-1}}{\left(\frac{n}{m}\right)^{r|-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{t|-1}}\cdot\frac{1}{p-tq}\cdot\frac{1^{\frac{p}{q}|1}.1^{\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}.$$

Werden hierin $\frac{p}{q}$ und $\frac{n}{m}$ vertauscht, so findet sich

$$\textbf{12.}\quad \int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-r}\partial x=\frac{(nq+pm)^{r+t|-qm}}{p^{r|-q}n^{t|-m}m^r.q^t}\cdot\frac{n}{n-tm}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x$$
$$=\frac{\left(\frac{n}{m}+\frac{p}{q}\right)^{r+t|-1}}{\left(\frac{p}{q}\right)^{r|-1}\left(\frac{n}{m}\right)^{t|-1}}\cdot\frac{1}{n-tm}\cdot\frac{1^{\frac{n}{m}|1}\,1^{\frac{p}{q}|1}}{1^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}|1}}.$$

Aus (11. und 12.) ergeben sich folgende Relationen:

$$\textbf{13.}\quad (p-tq)n^{r|-m}p^{t|-q}q^r m^t\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\partial x$$
$$=(n-tm).p^{r|-q}n^{t|-m}.m^r.q^t\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-r}\partial x,$$

$$\textbf{14.}\quad \frac{n}{(n-tm)p^{r|-q}n^{t|-m}m^r q^t}\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\partial x\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x$$
$$=\frac{p}{(p-tq)n^{r|-m}p^{t|-q}q^r.m^t}\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-r}\partial x\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x.$$

Für $r=t$ entsteht hieraus

$$\textbf{15.}\quad (p-tq)\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-t}\partial x=(n-tm)\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-t}\partial x,$$

$$\textbf{16.}\quad \frac{n}{n-tm}\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-t}\partial x\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x$$
$$=\frac{p}{p-tq}\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-t}\partial x\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x.$$

Wird $-r$ statt r gesetzt, so ergiebt sich aus (1., 2. und 8.)

$$17.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\,\partial x$$
$$=\frac{p}{p+tq}\cdot\frac{(p+q)^{t|q}\,m^t}{n^{r|-m}(pm+qn+qm)^{-r+t|qm}\,q^r}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x$$
$$=\frac{(-1)^{r-1}p}{p+tq}\cdot\frac{m^t(p+q)^{t|q}}{n(m-n)^{r-1|m}\,q^r(pm+qn+qm)^{t-r|qm}}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x$$
$$=\frac{1}{p+tq}\cdot\frac{(1+\frac{p}{q})^{t|1}}{(\frac{n}{m})^{r|-1}(1+\frac{p}{q}+\frac{n}{m})^{-r+t|1}}\cdot\frac{1^{\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{p}{q}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}},$$

$$18.\quad \int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-r}\,\partial x$$
$$=\frac{n}{n+tm}\cdot\frac{(n+m)^{t|m}\,q^t}{m^r\,p^{r|-q}(mp+mq+nq)^{-r+t|q}}\cdot\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\,\partial x$$
$$=\frac{(-1)^{r-1}n}{n+tm}\cdot\frac{q^t(n+m)^{t|m}}{m^r\,p(q-p)^{r-1|q}(mp+qn+qm)^{-r+t|qm}}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\,\partial x$$
$$=\frac{(1+\frac{n}{m})^{t|1}}{(\frac{p}{q})^{r|-1}(1+\frac{n}{m}+\frac{p}{q})^{-r+t|1}}\cdot\frac{1}{n+tm}\cdot\frac{1^{\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{p}{q}|1}}{1^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}|1}}.$$

Aus (17. und 18.) folgt

$$19.\quad (p+tq)\frac{n^{r|-m}q^r}{(p+q)^{t|q}m^t}\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\,\partial x$$
$$=\frac{(n+tm).p^{r|-q}m^r}{(n+m)^{t|m}q^t}\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-r}\,\partial x,$$

$$20.\quad \frac{p}{p+tq}\cdot\frac{(p+q)^{t|q}m^t}{n^{r|-m}q^r}\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-r}\,\partial x\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x$$
$$=\frac{n}{n+tm}\cdot\frac{(n+m)^{t|m}.q^t}{p^{r|-q}m^r}\int_0^1 x^{tq+q-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\,\partial x\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\,\partial x.$$

Setzt man hierin $r=t$, so ergeben sich keine so einfachen Relationen, als diejenigen, welche in (5. und 6., 15. und 16.) erlangt wurden. Für $r=1$ und $t=0$ ist aus (19.)

$$21.\quad q\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-1}\,\partial x=m\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-1}\,\partial x.$$

Wird $-t$ statt t in (1., 2. und 8.) gesetzt, so erhält man

$$22.\quad \int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x$$
$$=\frac{p}{p-tq}\cdot\frac{(m+n)^{r|m}q^r}{p^{t|-q}m^t(pm+nq+qm)^{r-t,qm}}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x$$
$$=\frac{(1+\frac{n}{m})^{r|1}}{(\frac{p}{q})^{t|-1}(1+\frac{p}{q}+\frac{n}{m})^{r-t|1}}\cdot\frac{1}{p-tq}\cdot\frac{1^{\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{p}{q}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}},$$

$$23.\quad \int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{t}{q}+r}\,\partial x$$
$$= \frac{n}{n-tm}\cdot\frac{(p+q)^{r|q}.m^r}{n^{t|-m}\,q^t(nq+mp+mq)^{r-t|mq}}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\,\partial x.$$

Aus (22. und 23.) ergiebt sich

$$24.\quad \frac{(p-tq)p^{t|-q}\,m^t}{(m+n)^{r.m}q^r}\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x$$
$$= \frac{(n-tm).n^{t|-m}q^t}{(p+q)^{r|q}\,m^r}\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+r}\,\partial x,$$

$$25.\quad \frac{n}{n-tm}\cdot\frac{(p+q)^{r|q}\,m^r}{n^{t|-m}\,q^t}\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x\,.\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\,\partial x$$
$$\frac{p}{p-tq}\cdot\frac{(m+n)^{r|m}.q^r}{p^{t|-q}\,m^t}\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+r}\,\partial x\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x.$$

Man ersieht leicht den Zusammenhang der hier aufgestellten allgemeinen Gleichungen. Jede von ihnen dient, die übrigen daraus abzuleiten. Die Entwicklung jedes einzelnen Falles hat jedoch ihre besondern Eigenthümlichkeit. Bringt man (2. und 17.) in Verbindung, so erhält man

$$26.\quad \frac{(pm+qn+qm)^{r+t|qm}}{(m+n)^{r|m}q^r}\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x$$
$$= n^{r|-m}(pm+qn+qm)^{t-r|qm}.q^r\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}.$$

Aus (2. und 22.) entsteht

$$27.\quad \frac{(p+tq)(pm+qn+qm)^{r+t|qm}}{(q+p)^{t|q}\,m^t}\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x$$
$$= (p-tq).p^{t|-q}\,m^t(pm+rq+qn)^{r-t|qm}\times\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}.$$

Aus (17. und 22.) ergiebt sich

$$28.\quad \frac{(p+tq)n^{r|-m}(pm+qn+qm)^{t-r|qm}}{(p+q)^{t|q}\,m^t}\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\,\partial x$$
$$= \frac{(p-tq).p^{t|-q}m^t(pm+nq+qm)^{r-t|qm}}{(m+n)^{r|m}.q^r}\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x.$$

Aus (17. und 23.) erhält man

$$29.\quad \frac{(p+tq)n^{r|-m}(pm+qn+qm)^{-r+t|qm}.q^r}{(p+q)^{t|q}\,m^t}\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\,\partial x$$
$$= \frac{(n-tm)n^{t|-m}(pm+qn+qm)^{r-t|qm}.q^t}{(p+q)^{r|q}\,m^r}\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+r}\,\partial x$$

u. s. w. Diese Gleichungen vereinfachen sich, wenn $r=t$ gesetzt wird. Aus (29.) folgt in diesem Falle

$$30.\quad (p+tq)\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-t}\,\partial x = (n-tm)\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+t}\,\partial x.$$

Alle diese Gleichungen gelten noch immer, wenn p oder n negativ gesetzt wird. So erhält man aus (2.)

$$\textbf{31.}\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x$$
$$=\frac{(m-n)^{r|m}(p+q)^{t|q}q^r m^t}{(pm-qn+qm)^{r+t|qm}}\cdot\frac{p}{p+tq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}}\partial x \quad \text{u. s. w.}$$

Man sieht, welche Mannigfaltigkeit in der Anwendung die hier entwickelten allgemeinen Gleichungen zulassen, und zu welchen bemerkenswerthen Resultaten sie führen. Man kann auch die Grössen t und r vertauschen. Aus (2.) ergiebt sich in diesem Falle

$$\textbf{32.}\quad \int_0^1 x^{p+rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+t}\partial x=\frac{(m+n)^{t|m}(p+q)^{r|q}q^t.m^r}{(pm+qn+qm)^{r+t|qm}}\cdot\frac{p}{p+rq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x$$
$$=\frac{(1+\frac{n}{m})^{t|1}(1+\frac{p}{q})^{r|1}}{(1+\frac{p}{q}+\frac{n}{m})^{r+t1}}\cdot\frac{1}{p+rq}\cdot\frac{1^{\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{p}{q}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}.$$

Hieraus und aus (8.) findet sich

$$\textbf{33.}\quad (p+rq)\int_0^1 x^{p+rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+t}\partial x=(n+tm)\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+r}\partial x,$$

$$\textbf{34.}\quad \frac{n}{n+tm}\int_0^1 x^{p+rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+t}\partial x\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x$$
$$=\frac{p}{p+rq}\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+r}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x.$$

Werden in (11.) r und t vertauscht, so erhält man

$$\textbf{35.}\quad \int_0^1 x^{p-rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-t}\partial x=\frac{(pm+qn)^{t+r|-qm}}{n^{t|-m}p^{r|-q}q^t.m^r}\cdot\frac{p}{p-rq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x$$
$$=\frac{\left(\frac{p}{q}+\frac{n}{m}\right)^{t+r|-1}}{\left(\frac{n}{m}\right)^{t|-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{r|-1}}\cdot\frac{1}{p-rq}\cdot\frac{1^{\frac{p}{q}|1}.1^{\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}.$$

Hieraus und aus (12.) ergiebt sich

$$\textbf{36.}\quad (p-rq)\int_0^1 x^{p-rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+t}\partial x=(n-tm)\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-r}\partial x,$$

$$\textbf{37.}\quad \frac{n}{n-tm}\int_0^1 x^{p-rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-t}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x$$
$$=\frac{p}{p-rq}\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-r}\partial x\,.\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x.$$

Werden in (17.) t und r vertauscht, so erhält man

$$38.\quad \int_0^1 x^{p+rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-t}\partial x$$
$$= \frac{p}{p-rq}\cdot\frac{(p+q)^{r|q}\,m^r}{q^r.n^{t|-m}\,(pm+qn+qm)^{-t+r|qm}}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x$$
$$= \frac{(1+\frac{p}{q})^{r|1}}{(\frac{n}{m})^{t|-1}(1+\frac{p}{q}+\frac{n}{m})^{-t+r|1}}\cdot\frac{1}{p+rq}\cdot\frac{1^{\frac{n}{m}|1}\,1^{\frac{p}{q}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}$$

Hieraus und aus (23.) folgt

$$39.\quad (p+rq)\int_0^1 x^{p+rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-t}\partial x = (n+tm)\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+r}\partial x,$$

$$40.\quad \frac{n}{n-tm}\int_0^1 x^{p+rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-t}\partial x\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x$$
$$= \frac{p}{p+rq}\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+r}\partial x\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x.$$

Werden in (22.) t und r vertauscht, so erhält man

$$41.\quad \int_0^1 x^{p+rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+t}\partial x$$
$$= \frac{p}{p-rq}\cdot\frac{(m+n)^{t|m}\,q^t}{p^{r|-q}\,m^r\,(pm+qn+qm)^{t-r|qm}}\int_8^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x$$
$$= \frac{(1+\frac{n}{m})^{t|1}}{(\frac{p}{q})^{r|-1}\,(1+\frac{p}{q}+\frac{n}{m})^{t-r|1}}\cdot\frac{1}{p-rq}\cdot\frac{1^{\frac{n}{m}|1}\,1^{\frac{p}{q}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}.$$

Hieraus und aus (18.) ergiebt sich

$$42.\quad (p-rq)\int_0^1 x^{p-rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+t}\partial x = (n+tm)\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-r}\partial x,$$

$$43.\quad \frac{n}{n+tm}\int_0^1 x^{p-rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+t}\partial x\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x$$
$$= \frac{p}{p-rq}\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-r}\partial x\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x.$$

Auch in diesen Formeln können p und n negativ sein.

Die in diesem Paragraph entwickelten Gleichungen enthalten bemerkenswerthe Gesetze, und zeigen, dass diese Integrale eine besondere Art symmetrischer Functionen sind, in welchen die Grössen $\frac{p}{q}$, t und $\frac{n}{m}$, r theils einzeln, theils insgesammt, nach den angegebenen Relationen vertauscht werden können.

§. 39.

Es lassen sich noch andere allgemeine und nicht minder bemerkenswerthe Relationen für die bisher betrachteten Integrale finden. Aus (3. §. 33.) ist

$$1. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \frac{1}{p} \cdot \frac{1^{\frac{p}{q}|1} \cdot 1^{n|1}}{1^{\frac{p}{q}+n|1}}.$$

Wird in (1.) $nq+q$ statt p und $\frac{p}{q}-1$ statt n gesetzt, so erhält man

$$\int_0^1 x^{nq+q-1}(1-x^q)^{\frac{p}{q}-1} \partial x = \frac{1^{n+1|1} \cdot 1^{\frac{p}{q}-1|1}}{(n+1)q \cdot 1^{n+\frac{p}{q}|1}} = \frac{1^{n|1} \cdot 1^{\frac{p}{q}-1|1}}{q \cdot 1^{n+\frac{p}{q}|1}}.$$

Nun ist $1^{\frac{p}{q}-1|1} = \frac{q}{p} \cdot 1^{\frac{p}{q}|1}$. Wird dieser Werth in die vorstehende Gleichung gesetzt, so ergiebt sich

$$2. \quad \int_0^1 x^{nq+q-1}(1-x^q)^{\frac{p}{q}-1} \partial x = \frac{1^{n|1} \cdot 1^{\frac{p}{q}|1}}{p \cdot 1^{n+\frac{p}{q}|1}}.$$

Aus (1. und 2.) ergiebt sich folgende Relation:

$$3. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \int_0^1 x^{(n+1)q-1}(1-x^q)^{\frac{p}{q}-1} \partial x.$$

Hier kann n eine ganze, gebrochene positive, oder gebrochene negative Zahl sein. Ist n eine ganze negative Zahl, so wird der Werth des Integrals nach (§. 4.) unendlich gross.

Wird in (1.) $p+nq$ statt p und $-\frac{p}{q}$ statt n gesetzt, so erhält man

$$4. \quad \int_0^1 x^{p+nq-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}} \partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}+n|1} \cdot 1^{-\frac{p}{q}|1}}{(p+nq) \cdot 1^{n|1}}.$$

Werden (1. und 4.) verbunden, so erhält man die Gleichung

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x \int_0^1 x^{p+nq-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}} \partial x = \frac{1}{p+nq} \cdot \frac{1^{\frac{p}{q}|1} \cdot 1^{-\frac{p}{q}|1}}{p}.$$

Nun ist

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}} \partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1} \cdot 1^{-\frac{p}{q}|1}}{p}.$$

Durch Einführung dieses Werths in obige Gleichung ergiebt sich folgende sehr allgemeine Relation:

$$5. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x \int_0^1 x^{p+nq-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}} \partial x$$

$$= \frac{1}{p+nq} \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}} \partial x.$$

In diesem Ausdruck kann n jeden Werth haben, also eine positive

oder negative, ganze oder gebrochene Zahl sein. Setzt man hierin ferner $p + tq$ statt p und $\frac{n}{m} + r$ statt n, so erhält man

$$6. \quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \int_0^1 x^{p+tq+\frac{nq}{m}+rq-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}-t}\partial x$$

$$= \frac{1}{p+tq+\frac{nq}{m}+rq}\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}-t} = \frac{1^{\frac{p}{q}+t}.1^{-\frac{p}{q}-t}}{(p+tq)(p+tq+\frac{nq}{m}+rq)}.$$

Aus (17. §. 38.) ergiebt sich für $\frac{n}{m} = -\frac{p}{q}$ und $r = t$, wenn die nöthigen Reductionen gemacht werden:

$$7. \quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}-t} = \frac{p}{p+tq}\cdot\frac{(p+q)^{t|q}}{(-p)^{t|-q}}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}}\partial x$$

$$= (-1)^t \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}}\partial x.$$

Demnach geht (6.) in

$$8. \quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \int_0^1 x^{p+tq+\frac{nq}{m}+rq-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}-t}\partial x$$

$$= (-1)^t \frac{1}{p+tq+\frac{nq}{m}+rq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}}\partial x$$

über. Das Doppel-Integral in (8.) kann auf folgende Weise eine Abänderung erleiden. Es ist

$$\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x = \frac{1}{p+tq}\cdot 1^{\frac{p}{q}+t|1}\cdot 1^{\frac{n}{m}+r|1}$$

$$\int_0^1 x^{p+tq+\frac{nq}{m}+qr-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}-r}\partial x = \frac{1}{p+tq+\frac{nq}{m}+qr}\cdot\frac{1^{\frac{p}{q}+t+\frac{n}{m}+r|1}.1^{-\frac{n}{m}-r|1}}{1^{\frac{p}{q}+t}}.$$

Die Verbindung beider Gleichungen führt zu folgender:

$$9. \quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \int_0^1 x^{p+tq+\frac{nq}{m}+qr-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}-r}\partial x$$

$$= \frac{1^{\frac{n}{m}+r|1}.1^{-\frac{n}{m}-r|1}}{(p+tq)(p+tq+\frac{nq}{m}+qr)} = \frac{n+rm}{(p+tq)(p+tq+\frac{n}{m}q+qr)}\int_0^1 x^{n+rm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-r}.$$

Da nun aus (7.) die Gleichung

$$10. \quad \int_0^1 x^{n+rm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-r}\partial x = (-1)^r \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x$$

folgt, so erhält man aus (9. und 10.)

$$11.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x \int_0^1 x^{p+tq+\frac{nq}{m}+qr-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}-r}\,\partial x$$
$$= \frac{(-1)^r(n+rm)}{(p+tq)(p+tq+\frac{nq}{m}+qr)} \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x.$$

Auf ganz gleiche Weise erhält man die Gleichungen

$$12.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x \int_0^1 x^{n+rm+\frac{mp}{q}+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{p}{q}-t}\,\partial x$$
$$= \frac{1^{\frac{p}{q}+t|1}\,1^{-\frac{p}{q}-t|1}}{(p+tq)(n+rm+\frac{pm}{q}+tm)} = \frac{1}{n+rm+\frac{pm}{q}+tm} \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}-t}\,\partial x,$$

$$13.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x \int_0^1 x^{n+rm+\frac{mp}{q}+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{p}{q}-t}\,\partial x$$
$$= \frac{(-1)^t}{(n+rm+\frac{pm}{q}+tm)} \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}}\,\partial x,$$

$$14.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x \int_0^1 x^{n+rm+\frac{mp}{q}+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-r}\,\partial x$$
$$= \frac{1}{(p+tq)(n+rm+\frac{mp}{q}+tm)} \cdot 1^{\frac{n}{m}+r|1}\,1^{-\frac{n}{m}-r|1}\,\partial x$$
$$= \frac{(n+rm)}{(p+tq)(n+rm+\frac{mp}{q}+tm)} \int_0^1 x^{n+mr-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-r}\,\partial x,$$

$$15.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x \int_0^1 x^{n+rm+\frac{mp}{q}+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-r}\,\partial x$$
$$= \frac{(-1)^r(n+rm)}{(p+tq)(n+rm+\frac{mp}{q}+tm)} \cdot \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x.$$

In allen diesen Gleichungen kann auch $-t$ statt t, oder $-r$ statt r gesetzt werden. Dies bestätigt sich dadurch, dass man die nämlichen Resultate findet, wenn die angegebenen Substitutionen in den nicht entwickelten Gleichungen und dann die nöthigen Entwicklungen gemacht werden. Dies giebt folgende Ausdrücke:

$$16.\quad \int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x \int_0^1 x^{p-tq+\frac{nq}{m}+rq-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}+t}\,\partial x$$
$$= \frac{1}{p-tq+\frac{nq}{m}+rq} \int_0^1 x^{p-tq}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}+t}\,\partial x$$
$$= \frac{(-1)^t 1}{p-tq+\frac{nq}{m}+rq} \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}}\,\partial x,$$

17. $$\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\partial x \int_0^1 x^{p+tq+\frac{nq}{m}-rq-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x$$
$$= \frac{n-rm}{(p+tq)\left(p+tq+\frac{nq}{m}-qr\right)} \int_0^1 x^{n-rm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x$$
$$= \frac{(-1)^r(n-rm)}{(p+tq)\left(p+tq+\frac{nq}{m}-qr\right)} \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x,$$

18. $$\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \int_0^1 x^{n+rm+\frac{mp}{q}-tm-1}(1-x^m)^{-\frac{p}{q}+t}\partial x$$
$$= \frac{1}{n+rm+\frac{pm}{q}-tm} \int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}+t}\partial x$$
$$= \frac{(-1)^t.1}{n+rm+\frac{pm}{q}-tm} \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}}\partial x,$$

19. $$\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\partial x \int_0^1 x^{n-rm+\frac{mp}{q}+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x$$
$$= \frac{n-rm}{(p+tq)\left(n-rm+\frac{mp}{q}+tm\right)} \int_0^1 x^{n-rm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x$$
$$= \frac{(-1)^r(n-rm)}{(p+tq)\left(n-rm+\frac{mp}{q}+tm\right)} \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x.$$

Setzt man in (**1.**) $p+nk$, so erhält man

20. $$\int_0^1 x^{p-1}(x^k-x^{k+q})^n\partial x = \frac{\mathbf{1}^{\frac{p+nk}{q}|1}\mathbf{1}^{n|1}}{(p+nk)\mathbf{1}^{\frac{p+nk}{q}+n|1}}.$$

Wird in dieser Gleichung $p=sm$, $q=m$, $n=\frac{n}{m}$ und km statt k gesetzt, so geht sie in folgende über:

21. $$\int_0^1 x^{sm-1}(x^{km}-x^{(k+1)m})^{\frac{n}{m}}\partial x = \frac{(m+nk)^{s|m}}{(sm+nk)(m+(k+1)n)^{s|m}} \cdot \frac{\mathbf{1}^{\frac{n}{m}k|1}\mathbf{1}^{\frac{n}{m}|1}}{\mathbf{1}^{(k+1)\frac{n}{m}|1}}.$$

Da nun $\frac{\mathbf{1}^{\frac{n}{m}k|1}.\mathbf{1}^{\frac{n}{m}|1}}{nk\mathbf{1}^{\frac{n}{m}(k+1)|1}} = \int_0^1(1-x^m)^{\frac{n}{m}}\partial x = \int_0^1 x^{-1}(x^{km}-x^{(k+1)m})^{\frac{n}{m}}\partial x$ ist, so erhält man aus (**21.**) auch

22. $$\int_0^1 x^{sm-1}(x^{km}-x^{(k+1)m})^{\frac{n}{m}}\partial x = \frac{(m+nk)^{s|m}nk}{(sm+nk)(m+(k+1)n)^{s|m}} \int_0^1 \frac{(x^{km}-x^{(k+1)m})^{\frac{n}{m}}}{x}\partial x.$$

Setzt man in (**21.** und **22.**) $-n$ statt n, so wird

$$23.\quad \int_0^1 x^{sm-1}(x^{km}-x^{(k+1)m})^{\frac{n}{m}}\partial x = \frac{(m+nk)^{s|m}}{(sm+nk)(m+(k+1)n)^{s|m}}\cdot\frac{1^{-\frac{nk}{m}}1^{-\frac{n}{m}}|_1}{1^{-(k+1)\frac{n}{m}}|_1}$$

$$= -\frac{(m-nk)^{s|m}nk}{(sm-nk)(m-(k+1)n)^{s|m}}\int_0^1 \frac{\partial x}{x(x^{km}-x^{km+m})^{\frac{n}{m}}}.$$

§. 40.

Aus den in den beiden vorigen Paragraphen gefundenen Gleichungen lassen sich leicht noch viele andere ableiten. Setzt man $t=r$, $-n$ statt n, $\frac{n}{m}$ statt $\frac{p}{q}$, so wird aus (2. §. 38.)

$$1.\quad \int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x = \frac{(m-n)^{t|m}(m+n)^{t|m}}{m^{2t}.1^{2t|1}}\cdot\frac{n}{n+tm}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x$$

$$= \frac{(m^2-n^2)(2^2m^2-n^2)(3^2m^2-n^2)\ldots(t^2m^2-n^2)}{m.2m.3m\ldots(2t-1)m.2tm}\cdot\frac{n}{n+tm}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x.$$

Aus (11. §. 38.) wird

$$2.\quad \int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-t}\partial x = 0.$$

Diese Gleichung gilt für $t=0$. In diesem Falle ist nach (1. §. 39.)

$$3.\quad \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x = \frac{1^{\frac{n}{m}}|_1.1^{-\frac{n}{m}}|_1}{n}.$$

Aus (17. und 22. §. 38.) ist unter den nämlichen Voraussetzungen:

$$4.\quad \int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-t}\partial x = (-1)^t\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x,$$

$$5.\quad \int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+t}\partial x = (-1)^t\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x.$$

Aus (4. und 5.) ergiebt sich folgende bemerkenswerthe Relation:

$$6.\quad \int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-t}\partial x = \int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+t}\partial x.$$

Aus (4. und 5.) ist, wenn t eine gerade oder eine ungerade Zahl bedeutet:

$$7.\quad \int_0^1 x^{n+2tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-2t}\partial x = \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x,$$

$$8.\quad \int_0^1 x^{n-2tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+2t}\partial x = \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x,$$

$$9.\quad \int_0^1 x^{n+(2t+1)m-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-2t-1}\partial x = -\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x,$$

$$10.\quad \int_0^1 x^{n-(2t+1)m-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-2t-1}\partial x = -\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x.$$

Wird $t=0$ gesetzt, so entsteht aus (1. oder 2. und 17. §. 38.)

$$\textbf{11.}\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x = \frac{(n+m)^{r|m}.q^r}{(pm+qn+qm)^{r|qm}}\cdot\frac{\mathbf{1}^{\frac{n}{m}|1}.\mathbf{1}^{\frac{p}{q}|1}}{p.\mathbf{1}^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}$$

$$= \frac{(n+m)^{r|m}q^r}{(pm+qn+qm)^{r|qm}}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x,$$

$$\textbf{12.}\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\,\partial x = \frac{(pm+nq)^{r|-qm}}{q^r n^{r|-m}}\cdot\frac{\mathbf{1}^{\frac{n}{m}|1}.\mathbf{1}^{\frac{p}{q}|1}}{p.\mathbf{1}^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}$$

$$= \frac{(pm+nq)^{r|-qm}}{q^r n^{r|-m}}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x.$$

Für $t=0$ und $-n$ statt n entsteht aus (**11.** und **12.**)

$$\textbf{13.}\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}+r}\,\partial x = \frac{(-n+m)^{r|m}.q^r}{(pm-qn+qm)^{r|qm}}\cdot\frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{q}|1}.\mathbf{1}^{-\frac{n}{m}|1}}{p.\mathbf{1}^{\frac{p}{q}-\frac{n}{m}|1}}$$

$$= \frac{(-n+m)^{r|m}q^r}{(pm-qn+qm)^{r|qm}}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x,$$

$$\textbf{14.}\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}-r}\,\partial x = (-1)^r\frac{(pm-nq)^{r|-qm}}{q^r n^{r|+m}}\cdot\frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{q}|1}.\mathbf{1}^{-\frac{n}{m}|1}}{p.\mathbf{1}^{\frac{p}{q}-\frac{n}{m}|1}}$$

$$= (-1)^r\frac{(pm-nq)^{r|-qm}}{q^r n^{r|m}}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x.$$

Aus (**13.** und **14.**) entsteht, wenn $\frac{n}{m}$ statt $\frac{p}{q}$ gesetzt wird:

$$\textbf{15.}\quad \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+r} = \frac{(-n+m)^{r|m}}{\mathbf{1}^{r|1}m^r}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x$$

$$= \frac{(-n+m)^{r|m}}{m^{r|m}}\cdot\frac{\mathbf{1}^{\frac{n}{m}|1}.\mathbf{1}^{-\frac{n}{m}|1}}{n},$$

$$\textbf{16.}\quad \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-r}\,\partial x = \mathbf{0}.$$

Diese Gleichung gilt, so lange $r>0$ ist.

Wird $r=0$ gesetzt, so entsteht aus (**1.** oder **2.** und **11.** §. **38.**)

$$\textbf{17.}\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x = \frac{(p+q)^{t|q}m^t}{(pm+qn+qm)^{t|qm}}\cdot\frac{p}{p+tq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x$$

$$= \frac{(p+q)^{t|q}m^t}{(pm+qn+qm)^{t|qm}}\,\frac{\mathbf{1}}{p+tq}\,\frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{q}|1}.\mathbf{1}^{\frac{n}{m}|1}}{\mathbf{1}^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}},$$

$$18.\quad \int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x = \frac{(pm+qn)^{t|-qm}}{p^{t|-q}m^t}\cdot\frac{1}{p-tq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x$$

$$= \frac{(pm+qn)^{t|-qm}}{p^{t|-q}m^t}\;\frac{1}{p-tq}\cdot\frac{1^{\frac{p}{q}|1}.1^{\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}.$$

Die Gleichungen (17. und 18.) gehen, wenn $-n$ statt n gesetzt wird, in folgende über:

$$19.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x = \frac{(p+q)^{t|q}m^t}{(pm-qn+qm)^{t|qm}}\cdot\frac{p}{p+tq}\cdot\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x$$

$$= \frac{(p+q)^{t|q}m^t}{(pm-qn+qm)^{t|qm}}\;\frac{1}{p+tq}\cdot\frac{1^{\frac{p}{q}|1}.1^{-\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{p}{q}-\frac{n}{m}|1}},$$

$$20.\quad \int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x = \frac{(pm-qm)^{t|-qm}}{p^{t|-q}m^t}\cdot\frac{p}{p-tq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x$$

$$= \frac{(pm-qm)^{t|-qm}}{p^{t|-q}m^t}\cdot\frac{1}{p+tq}\cdot\frac{1^{\frac{p}{q}|1}\,1^{-\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{p}{q}-\frac{n}{m}|1}}.$$

Aus (19. und 20.) erhält man für $\frac{p}{q}=\frac{n}{m}$:

$$21.\quad \int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x = \frac{(n+m)^{t|m}}{m^{t|m}}\cdot\frac{n}{n+tm}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x$$

$$= \frac{(n+m)^{t|m}}{m^{t|m}}\;\frac{1}{n+tm}.1^{\frac{n}{m}|1}.1^{-\frac{n}{m}|1}.$$

$$22.\quad \int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x = 0.$$

Diese Gleichung gilt für $t>0$. Setzt man $p=0$ und dann $p=1$, so erhält man aus (17. und 19.)

$$23.\quad \int_0^1 x^{tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x = \frac{m^{t|m}}{tq(n+m)^{t|m}} = \frac{m.2m.3m....tm}{tq(n+m)(n+2m)....(n+tm)},$$

$$24.\quad \int_0^1 x^{tq}\,(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x = \frac{(q+1)^{t|q}m^t}{(1+tq)(m+qn+mq)^{t|qm}}\cdot\frac{1^{\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{1}{q}|1}}{1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{q}|1}}$$

$$= \frac{(q+1)^{t|q}m^t}{(1+tq)(m+qn+mq)^{t|qm}}\int_0^1(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x,$$

$$25.\quad \int_0^1 x^{tq-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x = \frac{m^{t|m}}{tq(m-n)^{t|m}} = \frac{m.2m.3m....tm}{tq(-n+m)(-n+2m)....(-n+tm)},$$

$$26.\quad \int_0^1 x^{tq}(1-x_q)^{-\frac{n}{m}}\partial x = \frac{(1+q)^{t|q}m^t}{(1+tq)(m-qn+mq^{t|qm}} \cdot \frac{1^{\frac{1}{q}|1}\,1^{-\frac{n}{m}|1}}{1^{-\frac{n}{m}+\frac{1}{q}|1}}$$

$$\frac{(1+q)^{t|q}m^t}{(1+tq)(m-qn+mq)^{t|qm}} \cdot \int_0^1 \frac{\partial x}{(1-x^q)^{\frac{n}{m}}}.$$

Für $p=0$ und $p=1$ wird aus (1. §. 38.)

$$27.\quad \int_0^1 x^{tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x = \frac{(m+n)^{r|m}m^{t|m}}{tq\,(m+n)^{r+t|m}},$$

$$28.\quad \int_0^1 x^{tq}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x = \frac{(m+n)^{r|m}(1+q)^{t|q}.q^r.m^t}{(1+tq)(m+qn+qm)^{r+t|qm}} \cdot \frac{1^{\frac{n}{m}|1}\,1^{\frac{1}{q}|1}}{1^{\frac{1}{q}+\frac{n}{m}|1}}$$

$$= \frac{(m+n)^{r|m}(1+q)^{t|q}q^r m^t}{(1+tq)(m+qn+qm)^{r+t|qm}} \int_0^1 (1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x.$$

Wird in (17. §. 38.) $p=0$ und $p=1$ gesetzt, so ergiebt sich

$$29.\quad \int_0^1 x^{tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\partial x = \frac{m^{t|m}}{tq.n^{r|-m}.(m+n)^{-r+t|m}}$$

$$= (-1)^{r-1}\frac{m^{t|m}}{tq.n(m-n)^{r|m}(m+n)^{-r+t|m}},$$

$$30.\quad \int_0^1 x^{tq}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\partial x = \frac{1}{1+tq}\,\frac{(1+q)^{t|q}m^t}{n^{r|-m}(m+qn+qm)^{-r+t}.q^r} \cdot \frac{1^{\frac{1}{q}|1}.1^{\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{1}{q}+\frac{n}{m}|1}}$$

$$= \frac{(1+q)^{t|q}m^t}{n^{r|-m}(m+qn+qm)^{-r+t|qm}qr} \int_0^1 (1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x.$$

Aus (27. bis 30.) wird, wenn man $-n$ statt n setzt:

$$31.\quad \int_0^1 x^{tq-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x = \frac{1}{tq}\,\frac{(m-n)^{r|m}m^{t|m}}{(m-n)^{r+t|m}},$$

$$32.\quad \int_0^1 x^{tq}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x = \frac{1}{1+tq}\cdot\frac{(m-n)^{r|m}(1+q)^{t|q}q^r m^t}{(m-qn+qm)^{r+t|qm}},$$

$$33.\quad \int_0^1 x^{tq-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}-r}\partial x = (-1)^r\,\frac{1}{tq}\,\frac{m^{t|m}}{n^{r|m}(m-n)^{t-r|m}},$$

$$34.\quad \int_0^1 x^{tq}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}-r}\partial x = (-1)^r\,\frac{1}{1+tq}\,\frac{(1+q)^{t|q}m^t}{n^{r|m}q^r(m-qn+qm)^{-r+t|qm}} \cdot \frac{1^{\frac{1}{q}|1}.1^{-\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{1}{q}-\frac{n}{m}|1}}$$

$$= (-1)^r\,\frac{1}{1+tq}\,\frac{(1+q)^{t|q}m^t}{n^{r|m}q^r(m-qn+qm)^{-r+t|qm}} \int_0^1 (1-x^q)^{-\frac{n}{m}}\partial x \quad \text{u. s. w.}$$

Geht man auf noch speciellere Fälle über, so erhält man aus (23., 24., 27. und 28.), wenn $q=2$ und $\frac{n}{m}=\frac{1}{2}$ gesetzt wird:

$$35.\quad \int_0^1 x^{2t-1}\partial x\,|/(1-x^2) = \frac{2^{t-1|2}}{3^{t|2}},$$

36. $\int_0^1 x^{2t}\,\partial x \sqrt{(1-x^2)} = \frac{3^{t-1|2}}{4^{t|2}} \cdot \frac{1}{4}\pi,$

37. $\int_0^1 x^{2t-1}\partial x\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}+r} = \frac{3^{r|2}.2^{t-1|2}}{3^{r+t|2}} = \frac{2^{t-1|2}}{(2r+1)^{t|2}},$

38. $\int_0^1 x^{2t}\,\partial x (1-x^2)^{\frac{1}{2}+r} = \frac{3^{r|2}.3^{t-1|2}}{3^{r+t|2}} \cdot \frac{1}{4}\pi.$

Aus (25., 26., 29. und 30.) ist für die nämlichen Werthe:

39. $\int_0^1 \frac{x^{2t-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2^{t-1|2}}{1^{t|2}} = \frac{2.4.6....(2t-2)}{1.3.5....(2t-1)},$

40. $\int_0^1 \frac{x^{2t}\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{3^{t-1|2}}{2^{t|2}}\,\frac{1}{2}\pi,$

41. $\int_0^1 x^{2t-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-r}\,\partial x = (-1)^{r-1}\,\frac{2^{t|2}}{2t.1^{r-1|2}.3^{t-r|2}},$

42. $\int_0^1 x^{2t}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-r}\,\partial x = (-1)^{r-1}\,\frac{3^{t-1|2}}{1^{r-1|2}.4^{t-r|2}}\,\frac{1}{4}\pi.$

Aus (31. und 32.) ergiebt sich für $q = 2$ und $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$:

43. $\int_0^1 x^{2t-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+r}\,\partial x = \frac{1^{r|2}.2^{t-1|2}}{1^{r+t|2}},$

44. $\int_0^1 x^{2t}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+r}\,\partial x = \frac{1^{t|2}.1^{r|2}.\pi}{1^{r+t|1}.2^{r+t+1}}.$

Diese Ableitungen lassen sich leicht weiter fortsetzen. Specielle Fälle von den in (35., 36., 37., 38.) gegebenen Formeln hat *Euler* (Integr.-Rechnung 1ter Thl. §. 340. u. ff.) aufgestellt, ohne jedoch das Gesetz, welches diese Fälle zunächst umschliesst, anzugeben. Er hat eine zurücklaufende Bildungsweise entwickelt.

Es sollen jetzt noch einige besondere Fälle zusammengestellt werden, aus welchen sich die Kürze und Bequemlichkeit der gegebenen Ableitungsmethode verdeutlichen wird.

Aus (6. und 21. §. 38.) ist

45. $p\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x = n\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\,\partial x,$

46. $q\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-1}\,\partial x = m\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-1}\,\partial x.$

Für $q = m$ wird hieraus

47. $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-1}\,\partial x = \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{m}-1}\,\partial x.$

Für $p = n$ wird aus (45.)

48. $\int_0^1 x^{n-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x = \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{n}{q}}\,\partial x.$

Aus (30. §. 38.) erhält man für $t = 1$:

49. $(p+q)\int_0^1 x^{p+q-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-1}\partial x = \int_0^1 x^{n-m-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+1}\partial x.$

Setzt man in dem Integral

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{n}{m}-1}\partial x = \frac{1}{p}\cdot\frac{1^{\frac{p}{m}|1}.1^{\frac{n}{m}-1|1}}{1^{\frac{p}{m}+\frac{n}{m}-1|1}}$$

die Facultät $1^{\frac{p}{m}|1} = \frac{p}{m}.1^{\frac{p}{m}-1|1}$, so ergiebt sich nach (§. 13., 43. und 46.)

50. $$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{n}{m}-1}\partial x = \frac{1}{m}\cdot\frac{1^{\frac{p}{m}-1|1}.1^{\frac{n}{m}-1|1}}{1^{\frac{p+n}{m}-1|1}} = F\left(\frac{n}{m},\ \frac{p}{m}\right)$$ u. s. w.

Die hier zusammengestellten Fälle sind, wie man sieht, sehr speciell. Die Gleichung (46.) ist von *Euler* (Integr.-Rechnung 1ter Thl. §. 369.) angegeben. Die Gleichungen (47. und 50.) hat auch *Legendre* (Exerc. de calc. intégr. Tom. I. Sect. II. Pg. 222. et 279.) behandelt; die Gleichung (50.) hat er insbesondere mit vieler Mühe gefunden. Dabei ist diese Gleichung nur ein besonderer Fall von (46.).

Ausser dem in (2.) angegebenen Integral führt auch $\int_0^{\infty} \frac{(1-x^m)^{\frac{n}{m}-r}\,\partial x}{x^{n+tm+1}}$ auf 0, wenn $t < 0$ ist.

Aus (21. und 23. §. 39.) ergiebt sich für $k = 1$:

51. $$\int_0^1 x^{sm-1}(x^m-x^{2m})^{\frac{n}{m}}\partial x = \frac{(m+n)^{s|m}}{(sm+n)(m+2n^{s|m}}\cdot\frac{1^{\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{2n}{m}|1}},$$

52. $$\int_0^1 \frac{x^{sm-1}\partial x}{(x^m-x^{2m})^{\frac{n}{m}}} = \frac{(m-n)^{s|m}}{(sm-n)(m-2n)^{s|m}}\cdot\frac{1^{-\frac{n}{m}|1}.1^{-\frac{n}{m}|1}}{1^{-\frac{2n}{m}|1}}.$$

Wird in (20. §. 39.) $p = sq$, $k = 2q$, $n = -\frac{1}{2}$ gesetzt, so erhält man

53. $$\int_0^1 \frac{x^{sq-1}\partial x}{\sqrt{(x^{2q}-x^{3q})}} = \frac{2^{s-1|2}}{(s-1)q.1^{s-1|2}} = \frac{2.4.6....2(s-1)}{(s-1)q.1.3.5....(2s-3)}$$

u. s. w. Specielle Fälle ergeben sich hieraus leicht.

§. 41.

Das Integral $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\partial x$ lässt sich wie folgt umformen und zu weitern Anwendungen benutzen. Setzt man nämlich

$$x = \frac{1}{\sqrt[q]{(1-z^q)}},$$

so wird

$$1 - x^q = 1 - \frac{1}{1+z^q} = \frac{z^q}{1+z^q}.$$

Nun ist

$$\partial x = \partial \frac{1}{\sqrt[q]{(1-x^q)}} = -\frac{z^{q-1}\partial z}{(1+z^q)^{\frac{1}{q}+1}}.$$

Werden die vorstehenden Ausdrücke in das Integral eingeführt, so erhält man, wenn man die Grenzen des umgeformten Integrals so bestimmt, dass dadurch die nämlichen Resultate beibehalten werden:

$$1. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = -\int_0^{\infty} \frac{z^{q(n+1)-1}\partial z}{(1+z^q)^{n+\frac{p}{q}+1}},$$

oder

$$2. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)\partial x = \int_0^{\infty} \frac{z^{q(n+1)-1}\partial z}{(1+z^q)^{n+\frac{p}{q}+1}}.$$

Da unter der angegebenen Bedingung in dem Ausdrucke rechts vom Gleichheitszeichen x statt z geschrieben werden kann, so lässt sich diese Gleichung auch so ausdrücken:

$$3. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \frac{x^{qn+q-1}\partial x}{(1+x^q)^{n+\frac{p}{q}+1}}.$$

Die Umformung dieses Integrals kann nun auch nach folgender allgemeineren Methode ausgeführt werden. Man setze

$$x = \frac{1}{(z^q-k+1)^{\frac{1}{q}}},$$

so ist

$$1 - x^q = \frac{z^q-k}{z^q-k+1} \quad \text{und} \quad x^{p-1} = \frac{1}{(z^q-k+1)^{\frac{p-1}{q}}},$$

$$\partial x = -\frac{z^{q-1}\partial z}{(z^q-k+1)^{1+\frac{1}{q}}}.$$

Werden diese Werthe eingeführt, so erhält man

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = -\int_1 \frac{1}{(z^q-k+1)^{\frac{p-1}{q}}} \cdot \frac{(z^q-k)^n}{(z^q-k+1)^n} \cdot \frac{z^{q-1}\partial z}{(z^q-k+1)^{1+\frac{1}{q}}}.$$

Die Grenzen, zwischen welchen das Integral rechts genommen werden muss, um dem ursprünglichen zu genügen, sind ∞ und $\sqrt[q]{z}$. Man erhält daher

$$4. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = -\int_{\infty}^{k^{\frac{1}{q}}} \frac{z^{q-1}(z^q-k)^n \partial z}{(z^q-k+1)^{n+\frac{p}{q}+1}},$$

oder, da rechts x statt z geschrieben werden kann,

$$5. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \int_{k^{\frac{1}{q}}}^{\infty} \frac{x^{q-1}(x^q-k)^n \partial x}{(x^q-k+1)^{n+\frac{p}{q}+1}}.$$

Wird hierin $-k$ statt k gesetzt, so ergiebt sich

$$6.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\,\partial x = \int_{-k\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{x^{q-1}(x^q+k)^n\,\partial x}{(x^q+k+1)^{n+\frac{p}{q}+1}}.$$

Die Gleichung (3.) ist ein besonderer Fall von (5.) oder (6.). Setzt man nämlich in (5.) oder (6.) $n=0$, so ergiebt sich (3.). Geht man auf den Werth des Integrals selbst zurück, so ist aus (5. und 6.)

$$7.\quad \int_{k\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{x^{q-1}(x^q-k)^n\,\partial x}{(x^q-k+1)^{n+\frac{p}{q}+1}} = \int_{-k\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{x^{q-1}(x^q+k)^n\,\partial x}{(x^q+k+1)^{n+\frac{p}{q}+1}} = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}\,1^{n|1}}{p.1^{\frac{p}{q}+n|1}}.$$

Da k willkürlich ist, so ergiebt sich für $k=0$ und $k=1$:

$$8.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\,\partial x = \int_0^{\infty} \frac{x^{qn+q-1}\,\partial x}{(1+x^q)^{n+\frac{p}{q}+1}} = \frac{(x^q-1)^n\,\partial x}{x^{qn+p+1}}$$

$$= \int_{-1}^{\infty} \frac{x^{q-1}(x^q+1)^n\,\partial x}{(x^q+2)^{n+\frac{p}{q}+1}} = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}\,1^{n|1}}{p.1^{\frac{p}{q}+n|1}}.$$

Es können auf diese Ausdrücke alle die Resultate angewendet werden, welche im Vorhergehenden gefunden wurden; wobei denn die Entwicklungen in unendliche Factorenfolgen nicht ausgeschlossen sind.

Wir wenden uns nun zur Ableitung weiterer Gleichungen und legen hiebei folgenden Ausdruck aus (8.) zum Grunde:

$$9.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\,\partial x = \int_0^{\infty} \frac{x^{qn+q-1}\,\partial x}{(1-x^q)^{n+\frac{p}{q}+1}} = \int_0^{\infty} \frac{(x^q-1)^n\,\partial x}{x^{qn+p-1}} = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}\,1^{n|1}}{p.1^{\frac{p}{q}+n|1}}.$$

Wird hierin $q=m$, $p=n$ und $-\frac{n}{m}$ statt n gesetzt, so erhält man

$$10.\quad \int_0^{\infty} \frac{x^{m-n-1}\,\partial x}{1+x^m} = \int_1^{\infty} \frac{\partial x}{x(x^m-1)^{\frac{n}{m}}} = \frac{1^{\frac{n}{m}|1}.1^{-\frac{n}{m}|1}}{n}.$$

Diese Gleichung geht in Rücksicht auf (21. §. 26.) in

$$11.\quad \int_0^{\infty} \frac{x^{m-n-1}\,\partial x}{1+x^m} = \int_1^{\infty} \frac{\partial x}{x(x^m-1)^{\frac{n}{m}}} = \frac{\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi}$$

über. Setzt man in (9.) $q=m$, $\frac{n-m}{m}$ statt n und $-n$ statt p, so erhält man

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}\,\partial x}{1+x^m} = \int_1^{\infty} \frac{(x^m-1)^{\frac{n}{m}-1}\,\partial x}{x} = \frac{1^{-\frac{n}{m}+1|1}\,1^{\frac{n}{m}-1|1}}{-n+m}.$$

Nach (22. §. 26.) wird hieraus

$$12.\quad \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}\,\partial x}{1+x^m} = \int_1^{\infty} \frac{(x^m-1)^{\frac{n}{m}-1}\,\partial x}{x} = \frac{\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Aus (11. und 12.) findet sich

$$13.\quad \int_0^\infty \frac{x^{m-n-1}\partial x}{1+x^m} = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}\partial x}{1+x^m} = \frac{\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi},$$

$$14.\quad \int_1^\infty \frac{\partial x}{x(x^m-1)^{\frac{n}{m}}} = \int_1^\infty \frac{(x^m-1)^{\frac{n}{m}-1}\partial x}{x^n} = \frac{\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Setzt man in (9.) $q = 1$, so erhält man

$$15.\quad \int_0^\infty \frac{x^n\partial x}{(1+x)^{n+p+1}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^n\partial x}{x^{n+p+1}} = \frac{1^{p|}1^{n|}}{p.1^{p+n|}} = \frac{1^{p-1|}1^{n|}}{1^{p+n|}}.$$

Wird hierin $n-1$ statt n und $p+1$ statt p gesetzt, so ergiebt sich

$$16.\quad \int_0^\infty \frac{x^{n-1}\partial x}{(1+x)^{n+p+1}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{n-1}\partial x}{x^{n+p+1}} = \frac{1^{p|}.1^{n-1|}}{1^{p+n|}}.$$

Wird in beide Formeln $\frac{n}{m}$ statt n und $-\frac{n}{m}$ statt p eingeführt, so ist in Rücksicht auf (26. und 20. §. 26.)

$$17.\quad \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}}\partial x}{1+x} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}}\partial x}{x} = -\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi},$$

$$18.\quad \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}-1}\partial x}{1+x} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}-1}\partial x}{x} = \frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Wird aber in (15. und 16.) $-\frac{n}{m}$ statt n und $\frac{n}{m}$ statt p gesetzt, so erhält man

$$19.\quad \int_1^\infty \frac{\partial x}{x^{\frac{n}{m}}(1+x)} = \int_1^\infty \frac{\partial x}{x(x-1)^{\frac{n}{m}}} = \frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

$$20.\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{x^{\frac{n}{m}+1}(1+x)} = \int_1^\infty \frac{\partial x}{x(x-1)^{\frac{n}{m}-1}} = -\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Setzt man in (15.) $n+1$ statt n und $p-1$ statt p, so ist

$$21.\quad \int_0^\infty \frac{x^{n+1}\partial x}{(1+x)^{n+p+1}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{n+1}\partial x}{x^{n+p+1}} = \frac{1^{p-1|}.1^{n+1|}}{(p-1).1^{p+n|}}.$$

Wird hierin $-\frac{n}{m}$ statt n und $\frac{n}{m}$ statt p eingeführt, so ergiebt sich, mit Rücksicht auf (22. §. 26.):

$$22.\quad \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{n}{m}+1}\partial x}{1+x} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{-\frac{n}{m}+1}\partial x}{x} = -\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Aus (17. bis 22.) ist

$$23.\quad \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}-1}\partial x}{1+x}\partial x = \int_0^\infty \frac{\partial x}{x^{\frac{n}{m}}(1+x)} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}-1}\partial x}{x} = \int_1^\infty \frac{\partial x}{x(x-1)^{\frac{n}{m}}} = \frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi},$$

$$24.\quad \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}}\partial x}{1+x} = \int_0^\infty \frac{\partial x}{x^{\frac{n}{m}+1}(1+x)} = \int_0^\infty \frac{x\,\partial x}{x^{\frac{n}{m}}(1+x)} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}}\partial x}{x}$$

$$= \int_1^\infty \frac{\partial x}{x(x-1)^{\frac{n}{m}+1}} = \int_0^\infty \frac{(x-1)^{-\frac{n}{m}+1}\partial x}{x} = -\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Man sieht, wie mannigfaltig die Ausdrücke sind, welche auf diesem Wege erlangt werden können.

Das Integral, aus welchem die eben gefundenen Gleichungen abgeleitet wurden, nämlich

$$25.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\,\partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}.1^{n|1}}{p.1^{\frac{p}{q}+n|1}}$$

soll nun auf die nämliche Weise, wie so eben, behandelt werden. Es ergiebt sich für $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$ und $-\frac{n}{m}$ statt n aus (25.), mit Rücksicht auf (21. §. 26.):

$$26.\quad \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x = \frac{1^{\frac{n}{m}|1}\,1^{-\frac{n}{m}|1}}{n} = \frac{\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Wird in (25.) $p = m - n$ und $n - m$ statt n gesetzt, so erhält man in Rücksicht auf (22. §. 26.):

$$27.\quad \int_0^1 x^{m-n-1}(1-x^m)^{\frac{n}{m}-1}\partial x = \frac{\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Aus (26. und 27.) ist

$$28.\quad \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x = \int_0^1 x^{m-n-1}(1-x^m)^{\frac{n}{m}-1}\partial x.$$

Wird $q = 1$ gesetzt, so geht die Gleichung (25.) in

$$29.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^n\,\partial x = \frac{1^{p|1}\,1^{n|1}}{p.1^{p+n|1}} = \frac{1^{p-1|1}\,1^{n|1}}{1^{p+n|1}}$$

über. Je nachdem nun p und n angenommen wird, entstehen aus (29.) folgende Gleichungen:

$$30.\quad \int_0^1 x^p(1-x)^n\,\partial x = \frac{\mathbf{1}^{p|1}\,\mathbf{1}^{n|1}}{\mathbf{1}^{p+n+1|1}},$$

$$31.\quad \int_0^1 x^p(1-x)^{n-1}\,\partial x = \frac{\mathbf{1}^{p|1}\,\mathbf{1}^{n-1|1}}{\mathbf{1}^{p+n|1}},$$

$$32.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{n-1}\,\partial x = \frac{\mathbf{1}^{p-1|1}\,\mathbf{1}^{n-1|1}}{\mathbf{1}^{p+n-1|1}},$$

Nun können in den Gleichungen (29. bis 31.) die Werthe p und n beliebig angenommen werden. Setzt man $\frac{n}{m}$ und $-\frac{n}{m}$ statt p, $-\frac{n}{m}$ und $\frac{n}{m}$ statt n, so ergeben sich folgende Gleichungen, wenn man auf (20. bis 27. §. 26.) Rücksicht nimmt:

$$33.\quad \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}}\,\partial x}{x(1-x)^{\frac{n}{m}}} = \frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi},$$

$$34.\quad \int_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{n}{m}}\,\partial x}{x^{\frac{n}{m}+1}} = -\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi},$$

$$35.\quad \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}}\,\partial x}{(1-x)^{\frac{n}{m}}} = \frac{n.\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi},$$

$$36.\quad \int_0^1 \left(\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{n}{m}}\partial x = \frac{n}{m}\,\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi},$$

$$37.\quad \int_0^1 \left(\frac{1}{x}-1\right)\frac{\partial x}{1-x} = \frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi},$$

$$38.\quad \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}}\,\partial x}{(1-x)^{\frac{n}{m}+1}} = -\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Aus (33. bis 38.) ergiebt sich folgende Vergleichung:

$$39.\quad \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}}\,\partial x}{x(1-x)^{\frac{n}{m}}} = \int^1 \left(\frac{1}{x}-1\right)\frac{\partial x}{1-x} = \frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi},$$

$$40.\quad \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}}\,\partial x}{(1-x)^{\frac{n}{m}}} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{n}{m}}\partial x = \frac{n}{m}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi},$$

$$41.\quad \int_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{n}{m}}\,\partial x}{x^{\frac{n}{m}+1}} = \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}}\,\partial x}{(1-x)^{\frac{n}{m}+1}} = -\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Diese Gleichungen lassen sich mit (**23.**, **24.**, **26.**, **27.** und **28.**) vergleichen. Es ergeben sich daraus weitere Relationen zwischen diesen Integralen.

Die Gleichung (**32.**) lässt sich für $p+n=0$ nicht benutzen. Sie dient jedoch, eine weitere Ableitung zu gewinnen. Setzt man nämlich in (**15.**) $n-1$, so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}\partial x}{(1+x)^{n+p}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{n-1}\partial x}{x^{n+p}} = \frac{1^{p-1|1}\,1^{n-1|1}}{1^{p+n-1|1}}.$$

Werden hier p und n vertauscht, so ergiebt sich

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\partial x}{(1+x)^{n+p}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{p-1}}{x^{n+p}}\partial x = \frac{1^{n-1|1}\,1^{p-1|1}}{1^{n+p-1|1}}.$$

Hieraus und aus (**32.**) ist

42. $$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}\partial x}{(1+x)^{n+p}} = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\partial x}{(1+x)^{n+p}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{n-1}\partial x}{x^{n+p}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{p-1}\partial x}{x^{n+p}}$$
$$= \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{n-1}\partial x.$$

Setzt man $n+p=s$, so ist $p=s-n$ und man erhält aus dieser Gleichung

43. $$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}\partial x}{(1+x)^s} = \int_0^\infty \frac{x^{s-n-1}\partial x}{(1+x)^s} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{n-1}\partial x}{x^s} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{s-n-1}\partial x}{x^s}$$
$$= \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{s-n-1}\partial x = \int_0^1 x^{s-n-1}(1-x)^{n-1}\partial x = \frac{1^{n-1|1}\,1^{s-n-1|1}}{1^{s-1|1}}.$$

Wird n und p gleichzeitig um r erhöht oder erniedrigt, so ist

44. $$\int_0^\infty \frac{x^{n\pm r-1}\partial x}{(1+x)^{s\pm 2r}} = \int_0^\infty \frac{x^{p\pm r-1}\partial x}{(1+x)^{s\pm 2r}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{n\pm r-1}\partial x}{x^{s\pm 2r}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{p\pm r-1}}{x^{s\pm 2r}}$$
$$= \int_0^1 x^{p\pm r-1}(1-x)^{n\pm r-1}\partial x = \int_0^1 x^{n\pm r-1}(1-x)^{p\pm r-1} = \frac{1^{n\pm r-1|1}\cdot 1^{p\pm r-1|1}}{1^{s\pm 2r-1|1}}.$$

Hier sind s und r unabhängig von einander und können zweckdienlich angenommen werden. Allgemeiner noch ist folgender Ausdruck:

45. $$\int_0^1 x^{p+r-1}(1-x)^{n+q-1}\partial x = \int_0^\infty \frac{x^{p+r-1}\partial x}{(1+x)^{n+p+q+r}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{n+p-1}\partial x}{x^{n+p+q+r}}$$
$$= \int_0^1 x^{n+q-1}(1-x)^{p+r-1}\partial x = \int_0^\infty \frac{x^{n+q-1}\partial x}{(1+x)^{n+p+q+r}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{n+q-1}\partial x}{x^{n+p+q+r}}$$
$$= \frac{1^{p+r-1|1}\,1^{n+q-1|1}}{1^{n+p+q+r-1|1}}$$

Hier sind vier Grössen von einander unabhängig und können willkürlich angenommen werden. Dieser Ausdruck schliesst die von (**29.**) an entwickelten Gleichungen als besondere Fälle in sich.

Die Gleichung (13.) hat *Euler* (§. 351.), die Gleichungen (26. und 27.) in (§. 352. Integr.-Rechnung 1ter Thl.) entwickelt. Von den in (17. bis 24.) gegebenen Gleichungen hat *Legendre* (Exerc. de calc. intégr. T. II. Pg. 97. etc.) den Fall

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}-1}\partial x}{1+x} = \frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi},$$

und von den in (42. bis 44.) gegebenen den Fall

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}\partial x}{(1+x)^s} = \frac{1^{n-1|1}.1^{s-1|1}}{1^{s-1|1}}$$

entwickelt; letztere auf nicht sehr einfache Weise. Er legt dieser Formel einen hohen Grad von Allgemeinheit bei. Es lässt sich aber, wie sich hier zeigt, eine viel allgemeinere Formel aufstellen.

(Die Fortsetzung folgt.)

4.

Sur la formule

$$hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1.2}\cdot\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1....4}\Delta u^{IV}_x + \text{etc.}$$

(Par *C. J. Malmstén*, profess. des math. à Upsala.)

Il est connu, que *Stirling*, dans son ouvrage „*Methodus Differentialis sive Tractatus de summatione serierum*" résolut, il y a plus d'un siècle, une multitude de problèmes très importants pour la théorie des séries infinies en général, et particulièrement pour les expressions de très grands nombres, qui se présentent si fréquemment dans le calcul des Probabilités, et dont il serait presque impossible de trouver directement les valeurs numériques. Parmi toutes ces formules il y en a une, qui a toujours attirée l'attention particulière des Geomètres, et qui est specialement connue sous le nom de *formule de Stirling*; savoir celle, qui sert à calculer par approximation le logarithme du produit d'un grand nombre de facteurs croissants en progression arithmétique. Cette série offre une singularité bien remarquable. Elle procéde selon les puissances négatives d'un nombre supposé très grand, et étant décroissante très rapidement, elle finit nécessairement par devenir divergente, quelque grand que soit le dit nombre.

Quant à la convergence ou la divergence des suites infinies, on sait, que les Analystes d'autrefois y attachaient beaucoup moins d'importance que ceux d'aujourd'hui; ils se servaient même très souvent dans leurs calculs des séries évidemment divergentes. Aujourd'hui bien s'en faut qu'on approuve l'usage de series non convergentes; au contraire on veut qu'elles soient complètement bannies de l'analyse. Mais cette rigueur, juste et raisonnable en elle même, a été mise à une bien dure épreuve par la série de *Stirling*. D'une part divergente, comme elle l'est, elle *devait* en effet être rejetée: d'autre part, parcequ'elle est presqu'indispensable, elle *ne peut point* l'être. Cela étant, à moins de ne pas faire, forcé par la nécessité, une exception extraordinaire et non légitime pour cette série, (ce que quelques uns on effectivement fait), il ne

restoit d'autre moyen que d'essayer de la rendre finie, c'est à dire, de chercher son terme complémentaire. On y a aussi réussi: nous rappelerons seulement ce que *Liouville* et *Cauchy* ont fait à ce sujet.

La formule de *Stirling* n'est cependant qu'un cas très particulier d'une formule que *Maclaurin* a proposée le premier, mais qui est ordinairement attribuée à *Euler* et connue sous son nom, savoir la formule

$$1. \quad h\Sigma u = \int u dx - \frac{h}{2}\cdot u + \frac{B_1 h_2}{1.2}u' + \frac{B_2 h^4}{1....4}u''' + \text{etc.},$$

où B_1, B_2, etc. désignent les nombres de *Bernoulli* et u', u'' etc. la première, la seconde etc. dérivée de u. Les nombres B_1, B_2, etc. sont, comme on sait, tels, que dès le quatrième, ils vont toujours en croissant, et finissent par devenir infiniment grands. Ainsi la convergence de la série (1.) n'a pas généralement lieu; au contraire nous l'avons vu être divergente dans le cas particulier de la formule de *Stirling*.

Cela posé, la série (1.) présentant souvent la même singularité que celle de *Stirling*, savoir d'être d'abord rapidement décroissante et de finir par devenir divergente: les géomètres ont regardé comme très important la légitimation générale de son emploi dans le calcul d'approximation. En effet ils ont taché de fixer les limites du reste de la série, quand on arrête le calcul à un terme determiné, c'est à dire de fixer les limites du terme complémentaire. Le premier essai à cet égard, que nous avons eu l'occasion de connaître, est dû à *Erchinger*, et se trouve exposé d'abord par *Ettingshausen* dans son écrit „*Vorlesungen über die höhere Mathematik*" Tom. I. pag. 429. et puis par *Eytelwein* dans son livre „*Grundlehren der höhern Analysis*" Tom. 2. §. 696. Mais son analyse n'est point satisfaisante, puisque l'équation différentielle, à l'aide de laquelle il trouve la valeur du reste, n'a lieu que dans le cas où la série infinie, d'où elle est dérivée, est convergente; ce qui en effet n'a pas généralement lieu.

Un autre calcul très ingenieux du terme complémentaire dans le développement de $h\Sigma u$ entre des limites données, est dûe à *Poisson*, qui l'a exposé dans un excellent mémoire: *Sur le Calcul numérique des Intégrales définies.** Il est fondé sur l'expression connue

$$2. \quad f(x) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} f(z)\,dz + \frac{1}{a}\int_{-a}^{+a}\left[\sum_1^\infty \cos\left(\frac{i\pi(x-z)}{a}\right)\right] f(z)\,dz$$

(qui, comme on le sait, a lieu pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites des intégrales) et donne pour résultat la formule suivante:

* Paris, Mém. Acad. Sci. VI 571-602 (1823)

$$h\Sigma_0^c f(x) = \int_0^c f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}h\{f(\psi) - f(0)\} + A_1 h^2\{f'(\psi) - f'(0)\} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m-1} A_m h^{2m}\{f^{(2m-1)}(\psi) - f^{(2m-1)}(0)\} + R_m,$$

où

$$\tfrac{1}{2}(2\pi)^{2m} A_m = 1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \text{etc.}$$

$$R_m = 2(-1)^m . (\frac{h}{2\pi})^{2m} \int_0^{\psi} [S_1^{\infty} \frac{1}{i^{2m}} \operatorname{Cos} \frac{2i\pi x}{h}] . f^{(2m)}(x)\,dx.$$

En mettant ici $x - x_0$ à la place de x et puis $f(x)$ à la place de $f(x - x_0)$, on obtiendra facilement, si l'on fait $c + x_0 = x_1$,

3.
$$\begin{cases} h\Sigma_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \frac{1}{2}h\{f(x_1) - f(x_0) + A_1 h^2\{f'(x_1) - f'(x_0)\} - \ldots. \\ \ldots. (-1)^{m-1} A_m h^{2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\} + R'_m, \end{cases}$$

où

$$R'_m = 2.(-1)^m . (\frac{h}{2\pi})^{2m} \int_{x_0}^{x_1} [S_1^{\infty} \frac{1}{i^{2m}} . \operatorname{Cos} \frac{2i\pi(x - x_0)}{h}] f^{(2m)}(x)\,\partial x.$$

Si l'on désigne par Θ_m la plus grande valeur numérique de $f^{(2m)}(x)$ entre $x = x_0$ et $x = x_1$, on aura, abstraction faite du signe,

4. $$R'_m < h^{2m} A_m \Theta_m (x_1 - x_0),$$

et dans le cas où $f^{(2m)}(x)$ conserve le même signe dans tous cette étendue,

5. $$R'_m < h^{2m} A_m \{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0),$$

donc pour ce cas

6.
$$\begin{cases} h\Sigma_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \frac{1}{2}h\{f(x_1) - f(x_0)\} + A_1 h^2\{f'(x_1) - f'(x_0)\} - \ldots. \\ \ldots. + (-1)^{m-2} A_{m-1} h^{2m-2}\{f^{(2m-3)}(x_1) - f^{(2m-3)}(x_0)\} \\ + (-1)^{m-1} . \Theta . 2 A_m h^{2m}\{f^{(2m-1)}(x_0)\}, \end{cases}$$

où $0 < \Theta < 1$.

On doit aussi à l'illustre auteur des „*Fundamenta nova theoriae functionum Ellipticarum*" un excellent mémoire sur ce sujèt, savoir: „*De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae* (Journ. de *M. Crelle* T. 12. pag. 263.), où il démontre que si les deux expressions

7. $$\Sigma_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x) \quad \text{et} \quad \Sigma_{x_0}^{x_1} f^{(2m+2)}(x)$$

ne changent pas de signe depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$, et si de plus elles sont toutes les deux du même signe, on a

$$8.\quad \begin{cases} h\Sigma_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\{f(x_1)-f(x_0)\} + \frac{B_1 h^2}{1.2}\{f'(x_1)-f'(x_0)\} \\ -\frac{B_2 h^4}{1....4}\{f''(x_1)-f''(x_0)\} + ... + (-1)^m . \frac{B_{m-1} h^{2m-2}}{1.2....2m-2}\{f^{(2m-3)}(x_1)-f^{(2m-3)}(x_0)\} \\ + (-1)^{m+1}.\Theta.\frac{B_m h^{2m}}{1.2....2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\}, \end{cases}$$

où $0 < \Theta < 1$. Ce résultat de Mr. *Jacobi* ne peut être tiré de la déduction de M. *Poisson* que dans le cas où les dérivées

$$f^{(2m)}(x) \qquad \text{et} \qquad f^{(2m+2)}(x)$$

sont toutes les deux positives ou toutes les deux négatives, depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_1$. Dans la déduction de Mr. *Jacobi* il suffit seulement, que les expressions (7.) soient toutes les deux positives ou toutes les deux négatives depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$; ce qui peut en effet avoir lieu, sans que la condition de Mr. *Poisson* soit satisfaite.

Après cette exposition succincte des recherches antérieures sur ce sujet, il nous sera permis de dire un mot sur le présent mémoire. Nous le diviserons en trois paragraphes. Dans le premier nous nous occuperons de la recherche de quelques relations entre les nombres Bernoulliens, dont nous aurons besoin dans la suite: dans le second nous developpevons les théorèmes et les formules générales, qui touchent de plus près à la formule remarquable, qui se trouve à la tête de ce mémoire: enfin dans le troisième nous ferons quelques applications importantes du dernier de ces théorèmes.

Nous n'ignorons pas que la formule d'*Euler* est ordinairement présentée sous la forme (1.); mais non-obstant nous en avons préféré pour notre disquisition la forme

$$9.\quad hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1.2}.\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1....4}\Delta^{IV}_x + \text{etc.}$$

Au premier coup-d'oeil on trouvera cela peut-être de très peu d'importance; mais la forme n'est pas tout à fait sans conséquences dans les applications. En effet la formule (1.), étant prise dans sa plus grande généralité, on ne peut parler d'un terme complémentaire, $h\Sigma u$ étant absolument indéterminé. Il faut donc ou fixer le terme Σu, en le considérant comme une sommation entre des limites certaines (ce qui est le cas ordinaire), ou il faut le prendre pour une fonction déterminée de x, d'où l'on puisse ensuite déduire u et ses dérivées. Mais le procédé ordinaire a souvent des inconvenients par rapport à la continuité; ainsi p. ex. le dévéloppement de $\log \Gamma(x+1)$ qu'on trouve de cette manière,

n'est rigoureusement demontré que pour les valeurs *entières* de x. Nous avons donc préféré de considérer Σu comme une fonction déterminée de x; et pour faire voir cela plus clairement, nous avons donné à la série, dont il s'agit la forme (9.).

Quant à la méthode d'opérer, nous prenons le même point de départ que M. *Jacobi*, savoir la formule connue

$$u_{x+h}=u_x+hu'_x+\frac{h^2}{1.2}u''_x+....+\frac{h^r}{1....r}u^{(r)}_x+\int_0^h\frac{(h-2)^r}{1....r}.u^{(r+1)}_{x+2}dz;$$

mais le reste de notre déduction sera tout à fait différente de la sienne. En effet la disquisition de cet illustre analyste fait fort bien connaître que la fonction que nous avons désigné par $\varphi(z)$ (voyez la formule (25.)), conserve toujours le même signe entre $z=0$ et $z=h$; mais elle ne fait pas voir la proprieté la plus remarquable de cette fonction, savoir: *qu'elle a entre ces limites son seul maximum ou minimum en* $z=\frac{1}{2}h$, *et qu'elle est parfaitement symétrique de l'un et de l'autre côté de ce point.* Cette propriété est un point essentiel pour notre déduction: c'est par elle que nous sommes parvenu à trouver les limites du terme complémentaire pour le cas même, qui a échappé aux recherches de M. *Jacobi*, c'est à dire pour le cas où les expressions (7.) n'ont pas le même signe.

§. 1.

1) Si dans la formule connue

$$10.\quad \int_0^\infty\frac{e^{ux}-e^{-ux}}{e^{2\pi x}-1}.dx=\frac{1}{w}-\tfrac{1}{2}\text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}w,$$

on met à la place du membre à droite sa valeur

$$11.\quad \frac{1}{w}-\tfrac{1}{2}\text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}w=B_1.\frac{w}{1.2}+B_2.\frac{w^3}{1....4}+....+B_m.\frac{w^{2m-1}}{1....2m}+\text{etc.},$$

(où B_1, B_2, ... B_m, etc. sont les nombres Bernoulliens), on aura, en posant $w=0$, après avoir differentié $2m-1$ fois par rapport à cette variable:

$$12.\quad \int_0^\infty\frac{x^{2m-1}dx}{e^{2\pi x}-1}=\frac{B_m}{4m}.$$

Or la formule (10.), multipliée par Cos w, donne

$$13.\quad 2\int_0^\infty\frac{e^{wx}-e^{-wx}}{e^{2\pi x}-1}\,\text{Cos}\,w.dx=\varphi(w),$$

en supposant pour abréger

$$\varphi(w)=2\text{Cos}\,w\left(\frac{1}{w}-\tfrac{1}{2}\text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}w\right)=\frac{2\text{Cos}\,w}{w}-\text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}w+\text{Sin}\,w;$$

c'est à dire, en vertu de (11.):

$$14.\quad \varphi(w)=B_1 w+\frac{w^3}{1.2.3}\left(\frac{B_2}{2}-\tfrac{1}{2}\right)+\frac{w^5}{1....5}\left(B_3-\tfrac{2}{3}\right)+....$$
$$....+\frac{w^{2m-1}}{1.2....(2m-1)}\left(\frac{B_m}{m}+(-1)^{m-1}.\frac{m-1}{m}\right)+\text{etc.}....$$

Différentions maintenant $2m-1$ fois la formule (13.). Pour cela nous nous servirons de la formule connue

$$15.\quad \frac{d^{\mu}(e^{ny}\operatorname{Cos} my}{dy^{\mu}}=\tfrac{1}{2}\{e^{y(n+m\sqrt{-1})}(n+m\sqrt{-1})^{\mu}+e^{y(n-m\sqrt{-1})}(n-m\sqrt{-1})^{\mu}\},$$

qui, toutes les réductions faites, donne pour $w=0$:

$$16.\quad \frac{d^{2m-1}_{(w=0)}\{(e^{wk}-e^{-wk})\operatorname{Cos} w\}}{dw^{2m-1}}=(-1)^{m-1}.\frac{(1+x\sqrt{-1})^{2m-1}-(1-x\sqrt{-1})^{2m-1}}{\sqrt{-1}}.$$

Donc on tire de (13.):

$$17.\quad 2\int_0^{\infty}\frac{(1+x\sqrt{-1})^{2m-1}-(1-x\sqrt{-1})^{2m-1}}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{dx}{e^{2\pi x}-1}=\frac{m-1}{m}+(-1)^{m-1}.\frac{B_m}{m}.$$

parcequ'en vertu de (14.) on a

$$\frac{d^{2m-1}_{(w=0)}.\varphi(w)}{dw^{2m-1}}=\frac{B_m}{m}+(-1)^{m-1}.\frac{m-1}{m}.$$

En dévéloppant les puissances sous le signe $\int$ dans (17.), et designant par $(2m-1)_1$, $(2m-1)_3$, etc. le premier, le troisième etc. coëfficient du binome pour l'exposant $2m-1$, nous aurons

$$4\int_0^{\infty}\frac{dx}{e^{2\pi x}-1}\{(2m-1)_1 x-(2m-1)_3 x^3+....$$
$$+(-1)^{m-2}(2m-1)_{2m-3}x^{2m-3}+(-1)^{m-1}x^{2m-1}\}=\frac{m-1}{m}+(-1)^{m-1}.\frac{B_m}{m},$$

et delà, à l'aide de (12.), on tire la rélation suivante entre les nombres de *Bernoulli*:

$$18.\quad (2m-1)_1 B_1-\tfrac{1}{2}(2m-1)_3 B_2+\tfrac{1}{3}(2m-1)_5 B_3-....$$
$$....(-1)^m.\frac{1}{m-1}.(2m-1)_{2m-3}B_{m-1}=\frac{m-1}{m}.$$

2) Mettons dans (10. et 12.) $\frac{1}{2}x$ à la place de x, et dans (10.) $2w$ à la place de w, nous aurons

$$19.\quad \int_0^{\infty}\frac{x^{2m-1}dx}{e^{\pi x}-1}=\frac{2^{2m-1}Bm}{2m},$$
$$\int_0^{\infty}\frac{e^{wx}-e^{-wx}}{e^{\pi x}-1}dx=\frac{1}{w}-\operatorname{Cotang} w.$$

La dernière formule, multipliée par Cos w, donne

$$\int_0^{\infty}\frac{(e^{wx}-e^{-wx})\operatorname{Cos} w}{e^{\pi x}-1}dx=\operatorname{Sin} w+\frac{\operatorname{Cos} w}{w}-\frac{1}{\operatorname{Sin} w},$$

d'où, en posant $w=0$, aprés avoir differentié $2m-1$ fois par rapport à cette variable, on obtiendra en vertu de (16.):

$$(-1)^{m-1}\cdot\int_0^\infty \frac{(1+x\sqrt{-1})^{2m-1}-(1-x\sqrt{-1})^{2m-1}}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{dx}{e^{\pi x}-1}$$
$$=\frac{d^{2m-1}_{(w=0)}\left\{\text{Sin } w+\frac{\text{Cos } w}{w}-\frac{1}{\text{Sin } w}\right\}}{dw^{2m-1}}.$$

Mais comme

$$\text{Sin } w+\frac{\text{Cos } w}{w}=\frac{1}{w}+\frac{w}{1.2}-3.\frac{w^3}{1....4}+5.\frac{w^5}{1....6}-....$$
$$....+(-1)^{m-1}.(2m-1).\frac{w^{2m-1}}{1....2m}+\text{etc.}\quad\text{et}$$

$$\frac{1}{\text{Sin } w}=\frac{1}{w}+\frac{2(2-1).B_1 w}{1.2}+\frac{2(2^3-1)B_2.w^3}{1....4}+....+\frac{2(2^{2m-1}-1)B_m w^{2m-1}}{1.2....2m}+\text{etc.},$$

on a

$$\frac{d^{2m-1}_{(w=0)}\left\{\text{Sin } w+\frac{\text{Cos } w}{w}-\frac{1}{\text{Sin } w}\right\}}{dw}=-\frac{1}{2m}\left\{2(2^{2m-1}-1)B_m+(-1)^m(2m-1)\right\},$$

d'où enfin on obtient

$$\int_0^\infty \frac{(1+x\sqrt{-1})^{2m-1}-(1-x\sqrt{-1})^{2m-1}}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{dx}{e^{\pi x}-1}=(2m-1)+(-1)^m.\frac{2(2^{2m-1}-1)B_m}{2m}.$$

En dévéloppant $(1+x\sqrt{-1})^{2m-1}$ et $(1-x\sqrt{-1})^{2m-1}$ et fesant les intégrations à l'aide de (19.), on aura

20. $$\frac{(2m-1)_1 2^2 B_1}{2}-\frac{(2m-1)_3 2^4 B_2}{4}+....+(-1)^{m-2}\frac{(2m-1)_{2m-3}2^{2m-2}B_{m-1}}{2m-2}$$
$$+(-1)^{m-1}\frac{2^{2m}B_m}{2m}=\frac{2m-1}{2m}+(-1)^m.\frac{2(2^{2m-1}-1)B_m}{2m},$$

d'où l'on tire facilement

$$\frac{1}{2m}-1+\frac{(2m-1)_1 2^2 B_1}{2}-\frac{(2m-1)_3 2^4.B_2}{4}+....+(-1)^m.\frac{(2m-1)_{2m-3}.2^{2m-2}B_{m-1}}{2m-2}$$
$$=(-1)^m.\frac{2.(2^{2m}-1)B_m}{2m}$$

et enfin, en multipliant chaque terme par $\frac{1}{\Gamma(2m)}\cdot\frac{1}{2^{2m}}$,

21. $$\frac{1}{1....2m}\cdot\frac{1}{2^{2m}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1....(2m\text{-}1)}\cdot\frac{1}{2^{2m-1}}+\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{1....(2m\text{-}2)}\cdot\frac{1}{1^{2m-2}}$$
$$-\frac{B_2}{1....4}\cdot\frac{1}{1....2m-4}\cdot\frac{1}{2^{2m-4}}+....+(-1)^m\frac{B_{m-1}}{1....2m-2}\cdot\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{2^2}$$
$$=(-1)^m\cdot\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m}{1....2m}.$$

§. II.

Les deux rélations entre les nombres de *Bernoulli*, dont nous aurons besoin dans la suite, ayant été trouvées dans (18. et 21.), nous passons maintenant à ce qu'il y a de plus essentiel dans ce mémoire. Soit u_x une fonction de x qui, avec ses $2m+1$ premieres dérivées, est continue depuis x jusqu'à $x+h$. Faisons pour abréger

$$22. \quad hu'_x - \Delta u_x - H_1 h\, u'_x - H_2 h^2 \Delta u''_x - \ldots.$$
$$\ldots. - H_{2m-2} h^{2m-2} \Delta u_x^{(2m-2)} - H_{2m-1} h^{2m-1} \Delta u_x^{(2m-1)} = F(x_1 h),$$

où u'_x, u''_x, etc sont les dérivées successives de u_x. En vertu d'un théorème connu nous aurons

$$\Delta u_x = hu'_x + \frac{h^2}{1.2}u''_x + \frac{h^3}{1.2.3}u'''_x + \ldots. + \frac{h^{2m}}{1....2m}u_x^{(2m)} + \int_0^h \frac{(h-2)^{2m}}{1....2m}\cdot u_{x+2}^{(2m+1)}\,dz,$$
$$\Delta u'_x = hu''_x + \frac{h^2}{1.2}u'''_x + \ldots. + \frac{h^{2m-1}}{1....(2m-1)}u_x^{(2m)} + \int_0^h \frac{(h-2)^{2m-1}}{1....(2m-1)}u_x^{(2m+1)}\,dz,$$
$$\Delta u''_x = hu'''_x + \ldots. \frac{h^{2m-2}}{1....(2m-2)}u_x^{(2m)} + \int_0^h \frac{(h-2)^{2m-2}}{1....(2m-2)}\cdot u_{x+2}^{(2m+1)}\,dz,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta u_x^{(2m-1)} = hu_x^{(2m)} + \int_0^h \frac{(h-2)}{1}\cdot u_{x+2}^{(2m+1)}\,dz.$$

Ces valeurs, substituées dans (22.), donnent

$$23. \quad F(x_1 h) = -\int_0^h u_{x+2}^{(2m+1)}\,dz \left\{\frac{(h-2)^{2m}}{1....2m} + \frac{H_1 h(h-2)^{2m-1}}{1....2m-1} + \frac{H_2 h^2 (h-2)^{2m-2}}{1....2m-2} + \ldots. \right.$$
$$\left. \ldots. + \frac{H_{2m-1} h^{2m-1}(h-2)}{1}\right\}$$

où les coëfficients $H_1, H_2 \ldots. H_{2m-1}$ sont determinés par

$$24. \quad \begin{cases} H_1 + \frac{1}{1.2} = 0, \\ H_2 + \frac{H_1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} = 0, \\ H_3 + \frac{H_2}{1.2} + \frac{H_1}{1.2.3} + \frac{1}{1....4} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_{2m-2} + \frac{H_{2m-3}}{1.2} + \frac{H_{2m-4}}{1.2.3} + \ldots. + \frac{H_1}{1....(2m-2)} + \frac{1}{1....(2m-1)} = 0, \\ H_{2m-1} + \frac{H_{2m-2}}{1.2} + \frac{H_{2m-3}}{1.2.3} + \ldots. + \frac{H_2}{1....(2m-2)} + \frac{H_1}{1....(2m-1)} + \frac{1}{1....2m} = 0. \end{cases}$$

2) Considérons en premier lieu le polynome entre les crochets dans (23.) et posons

$$25.\quad \varphi(h-z) = \frac{(h-2)^{2m}}{1....2m} + \frac{H_1 h(h-2)^{2m-1}}{1....(2m-1)} + \frac{H_2 h^2 (h-2)^{2m-2}}{1....(2m-2)} + \frac{H_4 h^4 (h-2)^{2m-4}}{1....(2m-4)} + ... + \frac{H_{2m-2} h^{2m-2}(h-2)^2}{1.2} \quad \text{et}$$

$$26.\quad \psi(h-z) = \frac{H_3 h^4 (h-z)^{2m-3}}{(1....2m-3)} + \frac{H_5 h^5 (h-z)^{2m-5}}{(1....2m-5)} + ... + \frac{H_{2m-1} h^{2m-1}(h-z)}{1},$$

qui au lieu de (23.) donne cette expression plus abrégée:

$$27.\quad F(x,h) = -\int_0^h u^{(2m+1)}_{x+z}\, dz[\varphi(h-z) + \psi(h-z)].$$

En dévéloppant $\varphi(h-z) + \psi(h-z)$ selon les puissances de z, nous aurons

$$\begin{aligned}
&\varphi(h-z) + \psi(h-z)\\
&= h^{2m}\left\{\frac{1}{1....2m} + \frac{H_1}{1....2m-1} + \frac{H_2}{1....2m-2} + ... + \frac{H_{2m-3}}{1.2.3} + \frac{H_{2m-2}}{1.2} + \frac{H_{2m-1}}{1}\right\}\\
&- \frac{h^{2m-1}z}{1}\left\{\frac{1}{1....2m-1} + \frac{H_1}{1....2m-2} + \frac{H_2}{1....2m-3} + ... + \frac{H_{2m-3}}{1.2} + \frac{H_{2m-2}}{1} + H_{2m-1}\right\}\\
&+ \frac{h^{2m-2}z^2}{1.2}\left\{\frac{1}{1....2m-2} + \frac{H_1}{1....2m-3} + \frac{H_2}{1....2m-4} + ... + \frac{H_{2m-4}}{1.2} + \frac{H_{2m-3}}{1} + H_{2m-1}\right\}\\
&- \frac{h^{2m-3}z^3}{1.2.3}\left\{\frac{1}{1....2m-3} + \frac{H_1}{1....2m-4} + \frac{H_2}{1....2m-5} + ... + \frac{H_{2m-5}}{1.2} + \frac{H_{2m-4}}{1} + H_{2m-3}\right\}\\
&\quad\cdots\cdots\cdots

$$\psi(\tfrac{1}{2}h) = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu pour toutes les valeurs entières de m, à moins que les coëfficients des termes différents dans $\psi(h-z)$ [voy. la formule (**26.**)] ne soient séparement égaux à zéro, c'est à dire que

$$28a. \quad H_3 = H_5 = H_7 = ... = H_{2m-1} = 0.$$

Nous aurons donc au lieu de (**27.** et **28.**):

$$29. \quad F(x_1 h) = \int_0^h u_{x+2}^{(2m+1)} \varphi(h-z)\,dz, \text{ et}$$

$$30. \quad \varphi(h-z) = \varphi(z).$$

3) Quant aux coëfficients H_1, H_2, H_1 etc., on obtient immédiatement

$$H_1 = -\tfrac{1}{2};$$

par conséquent, à l'aide de (28a) la dernière des relations (**24.**) peut être présentée la forme

$$31. \quad \frac{H_2}{1....2m-2} + \frac{H_4}{1....2m-4} + ... + \frac{H_{2m-4}}{1....4} + \frac{H_{2m-2}}{1.2} + \frac{m-1}{1....2m},$$

d'où, en multipliant par $2\Gamma(2m)$ et supposant généralement

$$32. \quad H_{2r} = (-1)^{r+1}\frac{A_r}{1....2r},$$

on obtiendra la formule

$$(2m-1)_1 A_1 - \tfrac{1}{2}(2m-1)_3 A_2 + ...$$

$$.... + (-1)^{m-1}\frac{1}{m-2}\cdot(2m-1)^{2m-2}A_{m-2} + (-1)^m\cdot\frac{1}{m-1}(2m-1)_{2m-3}A_{m-1} = \frac{m-1}{m}$$

en vertu de laquelle (comparée à (**18.**)) il faut être nécessairement

$$A_r = B_r$$

et ensuite

$$33. \quad H_{2r} = (-1)^{r+1}\frac{B_r}{1....2r}$$

en désignant par B_r le $r$ième nombre de *Bernoulli*.

4) Ayant trouvé les valeurs de tous les coëfficients H, il nous reste à donner une relation entre eux, dont nous aurons besoin tout à l'heure et qui se trouvera facilement à l'aide de (**30.**). En effet cette formule donne immédiatement

$$33a. \quad \int_0^h \varphi(z)\,dz = 2\int_0^{\frac{1}{2}h} \varphi(z)\,dz,$$

d'où, en fesant les intégrations, on aura, après avoir divisé par h^{2m+1}:

$$\frac{1}{1....2m+1} + \frac{H_1}{1....2m} + \frac{H_2}{1....2m-1} + ... + \frac{H_{2m-2}}{1.2.3}$$
$$= \frac{1}{1....2m-1}\cdot\frac{1}{2^{2m}} + \frac{H_1}{1....2m}\cdot\frac{1}{2^{2m-1}} + \frac{H_2}{1....2m-1}\cdot\frac{1}{2^{2m-2}} + ... + \frac{H_{2m-2}}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^2}$$

et ensuite en vertu des rélations (24.), attention faite à (28a.):

$$34. \quad \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{1....2m+1}\cdot\frac{1}{2^{2m}} + \frac{H_1}{1....2m}\cdot\frac{1}{2^{2m-1}} + \frac{H_2}{1....2m-1}\cdot\frac{1}{2^{2m-2}} \\ + \frac{H_4}{1....(2m-1)}\cdot\frac{1}{2^{2m-4}} + ... + \frac{H_{2m-2}}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^2} \end{array} \right\} = -H_{2m}.$$

5) Nous nous occuperont maintenant de quelques propriétés remarquables de la fonction $\varphi(z)$, et nous démontrérons en premier lieu:

Qu'elle ne change pas de signe entre $z = 0$ *et* $z = h$, *et qu'elle est positive dans cette étendue, si* m *est un nombre pair, et négative si* m *est un nombre impair.*

Pour cela nous observerons, qu'en vertu de la valeur de $H_1 = -\frac{1}{2}$, l'expression

$$z + H_1 h$$

est *negative* entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}h$. En multipliant par $h^{-4}dh$ et intégrant entre $h = h$ et $h = \infty$, nous aurons

$$\int_h^\infty (zh^{-4} + H_1 h^{-3})\,dh = \frac{zh^{-3}}{3} + \frac{H_1 h^{-2}}{2},$$

Cela étant *negatif* entre les mêmes limites de z, il faut nécessairement que l'expression

$$\frac{z}{3} + \frac{H_1 h}{2}$$

et par conséquent

$$\int_z^{\frac{1}{2}h} (\frac{z}{3} + \frac{H_1 h}{2})\,dz = -(\frac{z^2}{1.2.3} + \frac{H_1 hz}{1.2} + H_2 h^2)$$

le soit aussi; d'où, en multipliant par $-z$, nous aurons l'expression

$$35. \quad \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{H_1 hz^2}{1.2} + H_2 h^2 z,$$

qui est *positive* entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}h$. Multiplions (35.) par $h^{-6}dh$ et intégrons entre $h = h$ et $h = \infty$, nous aurons

$$\frac{z^3 h^{-5}}{1.2.3.5} + \frac{H_1 h^{-4} z^2}{1.2.4} + \frac{H_2 h^{-3} z}{3}.$$

Cela, et par conséquent aussi

$$\frac{z^3}{1.2.3.5} + \frac{H_1 hz^2}{1.2.4} + \frac{H_2 h^2 z}{4}$$

doit être *positif* entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}h$, et également encore

$$\int_z^{\frac{1}{2}h}\left(\frac{z^3}{1.2.3.5}+\frac{H_1 hz^2}{1.2.4}+\frac{H_2 h^2 z}{3}\right)dz=-\left(\frac{z^4}{1....5}+\frac{H_1 hz^3}{1....4}+\frac{H_2 h^2 z^2}{1....3}+H_4 h^4\right),$$

d'où, en multipliant par $-z$, il suit que

$$36.\qquad \frac{z^5}{1....5}+\frac{H_1 hz^4}{1....4}+\frac{H_2 h^2 z^3}{1....3}+H_4 h^4 z$$

doit être négatif depuis $z=0$ jusqu'à $z=\frac{1}{2}h$. En multipliant cette expression par $h^{-8}dh$ et intégrant entre $h=h$ et $h=\infty$, l'intégrale, multipliée par h^7, donne

$$\frac{z^5}{1....5.7}+\frac{H_1 hz^4}{1....4.6}+\frac{H_2 h^2 z^3}{1.2.3.5}+\frac{H_4 h^4 z}{3},$$

et cela doit être *negatif* entre les mêmes limites de z; ce qui aura lieu encore pour

$$\int_z^{\frac{1}{2}h}\left(\frac{z^5}{1....5.7}+\frac{H_1 hz^4}{1....4.6}+\frac{H_2 h^2 z^3}{1.2.3.5}+\frac{H_4 h^4 z}{3}\right)dz=$$

$$-\left[\frac{z^6}{1....7}+\frac{H_1 hz^5}{1....6}+\frac{H_2 h^2 z^4}{1....5}+\frac{H_4 h^4 z^2}{1.2.3}+H_6 h^6\right],$$

et par conséquent, en multipliant par $-z$, l'expression

$$\frac{z}{1....7}+\frac{H_1 hz^6}{1....6}+\frac{H_2 h^2 z^5}{1....5}+\frac{H_4 h^4 z^3}{1.2.3}+H_6 h^6 z$$

doit être *positive* entre $z=0$ et $z=\frac{1}{2}h$. Par cette formule et par un procédé tout analogue on trouvera aisément que

$$\frac{z^9}{1....9}+\frac{H_1 hz^8}{1....8}+\frac{H_2 h^2 z^7}{1....7}+\frac{H_4 h^4 z^5}{1....5}+\frac{H_6 h^6 z^3}{1....3}+H_8 h^8 z$$

est négatif entre les mêmes limites de z. Cela étant, pour faire voir ce qui a lieu en général, il suffira de démontrer que, si l'expression

$$37.\qquad \frac{z^{2m-3}}{1....(2m-3)}+\frac{H_1 hz^{2m-4}}{1....(2m-4)}+\frac{H_2 h^2 z^{2m-5}}{1....(2m-5)}+\frac{H_4 h^4 z^{2m-7}}{1....(2m-7)}+....$$

$$....+\frac{H_{2m-6}h^{2m-6}z^3}{1.2.3}+H_{2m-4}h^{2m-4}z$$

est toujours *positive* ou toujours *négative* entre $z=0$ et $z=\frac{1}{2}h$, celle

$$38.\qquad \frac{z^{2m-1}}{1....(2m-1)}+\frac{H_1 hz^{2m-2}}{1....(2m-2)}+\frac{H_2 h^2 z^{2m-3}}{1....2m-3}+\frac{H_4 h^4 z^{2m-5}}{1....2m-5}+....$$

$$....+\frac{H_{2m-4}h^{2m-4}z^3}{1.2.3}+H_{2m-2}h^{2m-2}z$$

sera toujours *négative* au toujours *positive* entre les mêmes limites de z.

En effèt, multiplions (37.) par $h^{-2m}dh$, et intégrons entre $h = h$ et $h = \infty$; il faut que l'intégrale

$$\frac{z^{2m-3}}{1....2m-3}\cdot\frac{h^{-2m+1}}{2m-1} + \frac{H_1 z^{2m-4}}{1....2m-4}\cdot\frac{h^{-2m+2}}{2m-2} + ... + \frac{H_{2m-6}z^3}{1.2.3}\cdot\frac{h^{-5}}{5} + \frac{H_{2m-4}\cdot z}{1}\cdot\frac{h^{-3}}{3}$$

et par conséquent l'expression

$$\frac{z^{2m-3}}{1....2m-3}\cdot\frac{1}{2m-1} + \frac{H_1 z^{2m-4}}{1....2m-4}\cdot\frac{h}{2m-2} + \frac{H_2 z^{2m-5}}{1....2m-5}\cdot\frac{h^2}{2m-3} + ...$$
$$.... + \frac{H_{2m-6}z^3}{1.2.3}\cdot\frac{h^{2m-6}}{5} + \frac{H_{2m-4}\cdot z}{1}\cdot\frac{h^{m-4}}{3}$$

soit *positive* ou *négative* entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}h$. Multipliant la dernière expression par dz et intégrant entre $z = z$ et $z = \frac{1}{2}h$, l'intégrale

$$-\left\{\frac{2^{2m-2}}{1....2m-1} + \frac{H_1 h z^{2m-3}}{1....2m-2} + \frac{H_2 h^2 z^{2m-4}}{1....2m-3} + \frac{H_4 h^4 z^{2m-6}}{1....2m-5} + ...\right.$$
$$\left. .... + \frac{H_{2m-4}h^{2m-4}z^2}{1.2.3} + H_{2m-2}\right\}$$

doit aussi être toujours *positive* ou toujours *négative* entre les mêmes limites de z; d'où, en multipliant par $-z$, il suit que l'expression (38.), qui n'est autre chose que la dérivée $\varphi'(z)$ de $\varphi(z)$, est toujours *négative* ou toujours *positive* entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}h$.

Par ce qui précède il est sûr que

$\varphi'(z)$, *fonction entière du* $(2m-1)$*ième degré, est positif dans l'étendue indiquée, si* m *est un nombre pair, et négatif si* m *est un nombre impair.*

De là il suit immédiatement que l'expression

$$\int_0^z \varphi'(z)dz = \varphi(z),$$

qui ne change pas de signe entre $z = 0$ *et* $z = \frac{1}{2}h$, *est positive dans cette étendue, si* m *est un nombre pair, et négative si* m *est un nombre impair.*

Cela étant, il suffira de se rappéler de la relation trouvée ci-dessus:

$$39. \qquad \varphi(z) = \varphi(h-z),$$

pour avoir démontré ce dont il s'agissait, savoir que la fonction

$\varphi(z)$, *qui ne change pas de signe entre* $z=0$ *et* $z=\frac{1}{2}h$, *est positive dans cette étendue si* m *est un nombre pair, et négative si* m *est un nombre impair.*

6) En différentiant (39.) par rapport de z, on aura

$$\varphi'(z) = -\varphi'(h-z),$$

ce qui exige nécessairement que

$$\varphi'(z) \text{ soit zéro} \qquad \text{pour} \qquad z = \tfrac{1}{2}h.$$

Donc la fonction $\varphi'(z)$ qui, en vertu de ce qui précède, conserve toujours le même signe entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}h$, s'évanouit pour $z = \frac{1}{2}h$; elle passe dans ce point du positif au négatif (m étant impair), et conserve ensuite le même signe depuis $z = \frac{1}{2}h$ jusqu'à $z = h$. Il suit de là que la fonction primitive $\varphi(z)$ va toujours en augmentant (si m est pair) depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \frac{1}{2}h$, et décroit où augmente après, continuellement jusqu'à $z = h$; c'est à dire que

> $\varphi(z)$ *a entre* $z = 0$ *et* $z = h$ *un seul maximum pour* $z = \frac{1}{2}h$, *si* m *est pair, et un seul minimum pour la même valeur de* z, *si* m *est impair.*

7) Nous réprenons maintenant la formule (22.) qui peut être présentée sous la forme

$$40. \quad hu'_x = \Delta u_x - \tfrac{1}{2}h\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1.2}.\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1....4}\Delta u^{IV}_x + \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{(-1)^m B_{m-1} h^{2m-2}}{1....(2m-2)}.\Delta u^{(2m-2)}_x + R,$$

où

$$41. \quad R = -\int_0^h k^{(2m+1)}_{x+z}\,\varphi(z)\,dz.$$

Or $\varphi(z)$ conserve le même signe entre les limites de l'intégrale; donc on a

$$R = -u^{(2m+1)}_{x+h}\int_0^h \varphi(z)\,dz,$$

c'est à dire, en vertu de (33a. et 34.):

$$R = H_{2m} h^{2m+1} u^{(2m+1)}_{x+h} = \frac{(-1)^{m+1}.B_m h^{m+1}}{1.2....2m}.u^{(2m+1)}_{x+h}.$$

Donc

> *Théorème I. Soit* u_x *une fonction quelconque de* x *qui, ainsi que ses* 2m+1 *premières dérivées, est continue entre* x *et* x + h: *la valeur de* R (40.) *sera*
>
> $$R = \frac{(-1)^{m+1} B_m h^{2m+1}}{1....2m},$$
>
> *multiplié par une valeur intermédiaire de la* $(2m+1)^{me}$ *dérivée, et on aura*

$$43.\quad hu'_x=\Delta u_x-\frac{h}{2}\Delta u_x+\frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta u'_x+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{(-1)^m B_{m-1}h^{2m-2}}{1....(2m-2)}\Delta u_x^{(2m-2)}+\frac{(-1)^{m+1}B_m h^{2m+1}}{1....2m}u^{(2m+1)}_{x+\Theta h}$$

Ce théorème est absolument général et suppose seulement la continuité de la fonction u_x et celle des ses dérivées nommées.

8) En fesant dans (40.) $x=x_1$ et ensuite $x=x_0$ on aura par soustraction:

$$44.\quad h(u'_{x_1}-u'_{x_0})=\Delta u_{x_1}-\Delta u_{x_0}-\frac{h}{2}\{\Delta u'_{x_1}\quad\Delta u'_{x_0}\}+\frac{B_1 h^2}{1.2}\{\Delta u''_{x_1}-\Delta u''_{x_0}\}-\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{(-1)^m B_{m-1}h^{2m-2}}{1....(2m-2)}\left\{\Delta u_{x_1}^{(1m-2)}-\Delta u_{x_0}^{(2m-2)}\right\}-\int_0^h\varphi(z)\,dz\left\{u^{(2m+1)}_{x_1+z}-u^{(2m+1)}_{x_0+z}\right\}.$$

De là, puisque $\varphi(z)$ conserve le même signe entre les limites de l'intégrale, on obtient comme ci-dessus:

$$45.\quad h(u'_{x_1}-u'_{x_0})=\Delta u_{x_1}-\Delta u_{x_0}-\frac{h}{2}\{\Delta u'_{x_1}-\Delta u'_{x_0}\}+\frac{B_1 h^2}{1.2}\{\Delta u''_{x_1}-\Delta u''_{x_0}\}-\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{(-1)^m B_{m-1}h^{2m-2}}{1....(2m-2)}\left\{\Delta u_{x_1}^{(2m-2)}-\Delta u_{x_0}^{(2m-2)}\right\}+\frac{(-1)^{m+1}B_m h^{2m+1}}{1....2m}\left\{u^{(2m+1)}_{x_1+\Theta h}-u^{(2m+1)}_{x_0+\Theta h}\right\},$$

où Θ est une quantité positive et <1. Supposons ici

$$46.\quad u'_{x_1+z}-u'_{x_0+z}=\Sigma_{x_0}^{x_1}f(x+z),$$

d'où

$$\Delta u_{x_1}-\Delta u_{x_0}=\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx,$$

et en général

$$\Delta u_{x_1}^{(r)}-\Delta u_{x_0}^{(r)}=f_{(x_1)}^{(r-1)}-f_{(x_0)}^{(r-1)}:$$

nous aurons la formule

$$47.\quad h\Sigma_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx-\frac{h}{2}\{f(x_1)-f(x_0)\}+\frac{B_1 h^2}{1.2}\{f'(x_1)-f'(x_0)\}-\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{(-1)\ B_{m-1}h^{2m-2}}{1....(2m-2)}\{f^{(2m-3)}(x_1)-f^{(2m-3)}(x_0)\}+\frac{(-1)^{m+1}B_m h^{2m+1}}{1....2m}\Sigma_{x_0}^{x_1}f^{(2m)}(x+\Theta h),$$

qui n'exige pas nécessairement que x_1-x_0 soit un multiple exact de h.

Dans le cas $x_1-x_0=nh$, en désignant par M_m la plus grande valeur numérique de $f_{(x)}^{(2m)}$ depuis $x=x_0$ jusqu'à $x=x_1$, nous aurons, abstraction faite du signe,

$$\Sigma_{x_0}^{x_1}f^{(2m)}(x+\Theta h)<\frac{x_1-x_0}{h}\cdot M_m,$$

et partant

48. $$h\Sigma_{x_0}^{x_1}f(x)=\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx-\frac{h}{2}\Big\{f(x_1)-f(x_0)\Big\}+\frac{B_1h^2}{1.2}\Big\{f'(x_1)-f'(x_0)\Big\}-\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{(-1)^mB_{m-1}h^{2m-2}}{1....(2m-2)}\Big\{f^{(2m-3)}(x_1)-f^{(2m-3)}(x_0)\Big\}\pm\Theta.\frac{B_mh^{2m}}{1....2m}(x_1-x_0)M_m.$$

Cette formule offre une autre expression des limites du reste que celle de M. *Poisson* [Voyez la formule (4.)].

9) Nous supposerons maintenant dans (40.) que $u_{x+z}^{(2m+1)}$ ne change pas de signe entre $z=0$ et $z=h$. Alors nous aurons

$$R=-\varphi(\Theta h)\Delta u_x^{(2m)}.$$

Comme $\varphi(z)$ conserve le même signe depuis $z=0$ jusqu'à $z=h$, de sorte que sa plus grande valeur numérique est $\varphi(\frac{1}{2}h)$, et sa moindre valeur zéro, nous aurons

$$R=-\Theta\varphi(\tfrac{1}{2}h).\Delta u_x^{(2m)},$$

où $0<\Theta<1$. Quant à $\varphi(\frac{1}{2}h)$, on en obtiendra facilement la valeur à l'aide de (21. §. 1.), savoir la valeur

49. $$\varphi(\tfrac{1}{2}h)=(-1)^m.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}.\frac{B_mh^{2m}}{1....2m},$$

d'où enfin

50. $$R=(-1)^{m+1}.\Theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}.\frac{B_mh^{2m}}{1....2m}.\Delta u_x^{(2m)}.$$

Nous aurons donc le théorème suivant:

Théorème II. Soit u_x *une fonction quelconque de* x, *continue, ainsi que ses* $2m+1$ *premières dérivées, depuis* x *jusqu'à* $x+h$; *soit de plus la* $(2m+1)^{me}$ *dérivée toujours du même signe entre ces limites: la valeur de* R (40.) *sera*

$$R=(-1)^{m+1}.\Theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}.\frac{B_mh^{2m}}{1....2m}\Delta u_x^{(2m)};$$

c'est à dire nous aurons:

51. $$hu'_x=\Delta u_x-\frac{h}{2}\Delta u'_x+\frac{B_1h^2}{1.2}\Delta u''_x-\frac{B_2h^4}{1....4}\Delta u^{IV}_x+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{(-1)^mB_{m-1}h^{2m-2}}{1....(2m-2)}.\Delta u_x^{(2m-2)}+(-1)^{m+1}.\Theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}.\frac{B_mh^{2m}}{1....2m}.\Delta u_x^{(2m)}.$$

Pareillement, en supposant dans (44.) que

$$u_{x_1+z}^{(2m+1)}-u_{x+z}^{(2m+1)}$$

conserve toujours le même signe depuis $z=0$ jusqu'à $z=h$, on en tire facilement l'expression

52. $$h(u'_{x_1}-u'_{x_0})=\Delta u_{x_1}-\Delta u_{x_0}-\frac{h}{2}\left\{\Delta u'_{x_1}-\Delta u'_{x_0}\right\}+\frac{B_1 h^2}{1.2}\left\{\Delta u''_{x_1}-\Delta u''_{x_0}\right\}-....$$
$$.... + \frac{(-1)^m B_{m-1} h^{2m-2}}{1....(2m-2)}\left\{\Delta u^{(2m-2)}_{x_1}-\Delta^{(2m-2)}_{x_0}\right\}+(-1)^{m+1}.\Theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m h^{2m}}{1....2m}\left\{\Delta u^{(2m)}_{x_1}-\Delta u^{(2m)}_{x_0}\right\},$$

d'où, en fesant

$$u'_{x_1+z}-u'_{x_0+z}=\Sigma_{x_0}^{x_1} f(x+z),$$

on obtient

53. $$h\Sigma_{x_0}^{x_1} f(x)=\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx-\frac{h}{2}\left\{f(x_1)-f(x_0)\right\}$$
$$+\frac{B_1 h^2}{1.2}\left\{f'(x_1)-f'(x_0)\right\}-\frac{B_2 h^4}{1....4}\left\{f'''(x_1)-f'''(x_0)\right\}+....$$
$$....+\frac{(-1)^m B_{m-1} h^{2m-2}}{1....(2m-2)}\cdot\left\{f^{(2m-3)}(x_1)-f^{(2m-3)}(x_0)\right\}$$
$$+(-1)^{m+1}.\Theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m h^{2m}}{1....2m}\left\{f^{(2m-1)}(x_1)-f^{(2m-1)}(x_0)\right\}.$$

Cette formule suppose que $\Sigma_{x_0}^{x_1} f(x+z)$ conserve son signe depuis $z=0$ jusqu'à $z=h$. En la comparant avec la formule (6.), que donnent les méthodes connues, on trouvera facilement:

1) Que notre formule a des limites plus reserrées pour son terme complémentaire;

2) Qu'elle n'exige pas nécessairement que x_1-x_0 soit un multiple exact de h. Il faut seulement que dans ce cas le membre à droite de (53.) ne donne qu'une valeur particulière de $h\Sigma_{x_0}^{x_1} f(x)$; d'où, pour en avoir la valeur générale, il faut la compléter par

54. $$w(x_1)-w(x_0),$$

$w(x)$ étant une fonction périodique quelconque, telle que

$$w(x+h)-w(x)=0.$$

La formule (6.), au contraire exige nécessairement que x_1-x_0 soit un multiple exact de h.

3) La déduction de la formule (6.) suppose que $f^{(2m)}(x)$ conserve le même signe depuis $x=x_0$ jusqu'à $x=x_1$: pour notre formule (53.) il suffit que

55. $$\Sigma_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x+z)$$

ne change pas de signe depuis $z=0$ jusqu'à $z=h$. En effèt, dans le cas où x_1-x_0 est un multiple exact de h, il est évident que cela a toujours

lieu, si $f^{(2m)}(x)$ conserve le même signe depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_1$; mais il peut aussi avoir lieu sans cela.

10. En ajoutant à (51.) l'expression

$$0 = (-1)^{m+1}\left\{\frac{B_m h^{2m}}{1....2m}.\Delta u_x^{(2m)} - \frac{B_m h^{2m}}{1....2m}\Delta u_x^{(2m)}\right\},$$

on aura

$$56. \quad hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}.\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1.2}.\Delta u''_x - ....$$
$$.... + (-1)^{m+1}\frac{B_m h^{2m}}{1....2m}\Delta u_x^{(2m)} + (-1)^{m+1}.\left\{\Theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} - 1\right\}\frac{B_m h^{2m}}{1....2m}.\Delta u_x^{(2m)},$$

et pareillement on tirera de (53.):

$$57. \quad h\Sigma_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\left\{f(x_1) - f(x_0)\right\}$$
$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}\left\{f''(x_1) - f''(x_0)\right\} - \frac{B_2 h^4}{1....4}\left\{f^{IV}(x_1) - f^{IV}(x_0)\right\} + ...$$
$$.... + \frac{(-1)^{m+1} B_m h^{2m}}{1....2m}\left\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\right\}$$
$$+ (-1)^{m+1}\left\{\Theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} - 1\right\}\frac{B_m h^{2m}}{1....2m}.\left\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\right\}.$$

Cette formule fait voir, que si dans le calcul de

$$h\Sigma_{x_0}^{x_1} f(x)$$

on s'arrête à un certain terme du développement, la valeur du reste sera moindre que celle du dernier terme; ce qui est précisement la proposition de M. *Poisson.*

11. En mettant dans (43.) $m+1$ à la place de m, et en comparant le résultat avec (56.), on aura

$$58. \quad \frac{B_{m+1} h^{2m+2}}{1....(2m+2)}.u_{x+\Theta z}^{(2m+3)} = -\left\{\Theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} - 1\right\}\frac{B_m h^{2m}}{1....2m}\int_0^h u_{x+z}^{(2m+1)}\,dz.$$

parceque

$$\Delta u_x^{(2m)} = \int_0^h u_{x+z}^{(2m+1)}\,dz.$$

Donc, si les dérivées

$$59. \quad u_{x+z}^{(2m+1)} \qquad \text{et} \qquad u_{x+z}^{(2m+1)}$$

ne changent pas de signe depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$ et qu'elles ont toutes les deux *le même signe*, il faut que

$$60. \quad \Theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} - 1$$

soit négatif et ne surpasse pas numériquement 1. On pourra donc supposer:

$$\Theta . \frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} - 1 = -\Theta_1$$

Θ_1 étant un nombre entre 0 et 1. Si au contraire les expressions (59.) ne changent pas de signe depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$, et qu'elles ont des signes *contraires*, il faut que (60.) soit une quantité positive, qui ne surpasse pas $\frac{2^{2m-1}-1}{2^{2m-1}}$. Donc on pourra poser

$$\Theta . \frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} - 1 = \Theta_2 . \frac{2^{2m-1}-1}{2^{2m-1}},$$

Θ_2 étant un nombre entre 0 et 1. Cela étant, il résulte de la formule (56.) le théorème suivant:

Théorème III. Soit u_{x+z} *une fonction quelconque de* x *qui, ainsi que ses* $2m+3$ *premières dérivées, est continue depuis* $z = 0$ *jusqu'à* $z = h$; *supposons de plus que la* $(2m+1)^{me}$ *et la* $(2m+3)^{me}$ *dérivée ne changent pas de signe entre ces limites. Cela posé, si les dérivées*

$$u^{(2m+1)}_{x+z} \qquad \text{et} \qquad u^{(2m+3)}_{x+z}$$

ont des signes contraires, nous aurons

$$61. \quad hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta u''_x - .... + \frac{(-1)^{m+1} B_m h^{2m}}{1....2m}\Delta u^{(2m)}_x + (-1)^{m+1} . \Theta_2 . \frac{2^{2m-1}-1}{2^{2m-1}} . \frac{B_m h^{2m}}{1....2m}\Delta u^{(2m)}_x,$$

et si elles ont les mêmes signes, nous aurons

$$62. \quad hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta u''_x - .... + \frac{(-1)^m B_{m-1} h^{2m-2}}{1....(2m-2)} . \Delta u^{(2m-2)}_x + (-1)^{m+1} . \Theta_3 . \frac{B_m h^{2m}}{1....2m}\Delta u^{2m}_x,$$

Θ_2 *et* Θ_3 *étant des nombres entre* 0 *et* 1.

Mettons dans (47.) $m+1$ à la place de m, comparons à (57.) le résultat, rappélons nous que

$$f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0) = \int_0^h \Sigma_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x+z)\,dz,$$

et supposons le cas où

$$63. \quad \Sigma_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x+z) \qquad \text{et} \qquad \Sigma_{x_0}^{x_1} f^{(2m+2)}(x+z)$$

ne changent pas de signe depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$, *ces expressions* (63.) *étant du même signe,* nous obtiendrons facilement les formules suivantes:

64. $$h\Sigma_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\{f(x_1)-f(x_0)\} + \frac{B_1 h^2}{1.2}\{f'(x_1)-f'(x_0)\} - ....$$
$$.... + (-1)^m \frac{B_{m-1} h^{2m-2}}{1.2....(2m-2)}\{f^{(2m-3)}(x_1) - f^{(2m-3)}(x_0)\}$$
$$+ (-1)^{m+1}.\Theta.\frac{B_m h^{2m}}{1.2....2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\},$$

et si les expressions (63.) ont des signes contraires:

65. $$h\Sigma_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\{f(x_1)-f(x_0)\} + \frac{B_1 h^2}{1.2}\{f'(x_1)-f'(x_0) - ....$$
$$.... + (-1)^m \frac{B_m h^{2m}}{1....2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\}$$
$$+ (-1)^{m+1}.\Theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m h^{2m}}{1....2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\}.$$

La formule (64.) est précisement celle qui a été proposée par M. *Jacobi*; la dernière (je crois) ne peut ètre trouvée par les méthodes usitées.

§. III.

Nous ferons maintenant quelques applications du dernier des théorèmes proposés.

Première Application. Développement de Log $\Gamma(x)$.

En multipliant par dx la formule connue

$$\frac{d.\mathrm{Log}\,\Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty dz\left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1-e^{-z}}\right),$$

et en intégrant par rapport à x, à partir de $x = 1$, on obtiendra

66. $$\mathrm{Log}\,\Gamma(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-z}dz}{z}\left((x-1) - \frac{1-e^{-(x-1)z}}{1-e^{-z}}\right).$$

Supposons dans (62.) $h = 1$, on aura

67. $$u'_x = \int_0^\infty \frac{e^{-z}dz}{z}\left((x-1) - \frac{1-e^{-(x-1)z}}{1-e^{-z}}\right) = \mathrm{Log}\,\Gamma(x),$$

d'où

$$u''_x = \int_0^\infty dz\left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1-e^{-z}}\right)$$

et en général, r étant > 2:

$$u_x^{(r)} = (-1)^r \int_0^\infty \frac{z^{r-z}.e^{-xz}}{1-e^{-z}}\,dz.$$

Cette supposition satisfera évidemment les conditions du théorème III.

A cause de

$$\Delta u_x = \int_0^h u'_{x+y}\,dy,$$

on aura pour le cas en question:

$$\Delta u_x = \int_0^h \mathrm{Log}\,\Gamma(x+y)\,dy$$

et en fesant $x+y = y_1+1$:

$$\Delta u_x = \int_0^1 \mathrm{Log}\,\Gamma(y_1+1)\,dy_1 + \int_1^x \mathrm{Log}\,\Gamma(y_1+1)\,dy_1 - \int_0^{x-1} \mathrm{Log}\,\Gamma(y_1+1)\,dy_1$$
$$= \int_0^1 \mathrm{Log}\,\Gamma(y_1+1)\,dy_1 + \int_1^x [\mathrm{Log}\,\Gamma(y_1+1) - \mathrm{Log}\,\Gamma(y_1)]\,dy,$$

c'est à dire:

$$\Delta u_x = \int_0^1 \mathrm{Log}\,\Gamma(y_1+1)\,dy_1 + \int_1^x \mathrm{Log}\,y_1\,dy_1;$$

d'où enfin, en vertu de la formule donnée par M. *Raabe,* savoir par la formule

$$\int_0^1 \mathrm{Log}\,\Gamma(y_1+1)\,dy_1 = \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}\,2\pi - 1,$$

on aura

$$\Delta u_x = \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}\,2\pi + x\,\mathrm{Log}\,x - x,$$

partant

$$\Delta u'_x = \mathrm{Log}\,x,$$

et en général, r étant > 1,

$$\Delta u^{(r)}_x = (-1)^r \cdot \frac{\Gamma(r-1)}{x^{r-1}}.$$

Pour ces valeurs de u'_x, Δu_x, $\Delta u'_x$ etc., le théorème III. donne

$$\mathrm{Log}\,\Gamma(x) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}\,2\pi + (x-\tfrac{1}{2})\,\mathrm{Log}\,x - x + \frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{B_4}{5.6}\cdot\frac{1}{x^5} - \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{(-1)^m B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}\cdot\frac{1}{x^{2m-3}} + \frac{(-1)^{m+1}B_m}{(2m-1)2m}\cdot\frac{\Theta}{x^{2m-1}},$$

ou, en y ajoutant $\mathrm{Log}\,x$:

68. $$\mathrm{Log}\,\Gamma(x+1) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}\,2\pi + (x+\tfrac{1}{2})\mathrm{Log}\,x - x + \frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{B_3}{5.6}\cdot\frac{1}{x^5} - \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{(-1)^m B_{m-1}}{(2m-3)\,(2m-2)}\cdot\frac{1}{x^{2m-3}} + \frac{(-1)^{m+1}B_m}{(2m-1)2m}\cdot\frac{\Theta}{x^{2m-1}},$$

Θ étant un nombre entre 0 et 1. Cette formule a généralement lieu, quelle que soit la valeur positive de x. Ce n'est pas ainsi pour les résultats, que les méthodes ordinaires donnent pour le dévéloppement de $\mathrm{Log}\,\Gamma(x+1)$. Leur point de départ est ordinairement la formule

$$\mathrm{Log}\,\Gamma(x+1) = \mathrm{Log}\,1 + \mathrm{Log}\,2 + \ldots. + \mathrm{Log}\,x,$$

qui n'est rigoureusement le dévéloppement de $\mathrm{Log}\,\Gamma(x+1)$ que pour des valeurs entières de x. Quant aux analyses, qui ne sont pas sujettes à cette restriction (p. e. celle de M. *Cauchy* et celle de M. *Liouville*), elles

n'ont lieu que pour ce dévéloppement en particulier, et n'ont point de rélation avec la formule sommatoire générale.

En posant, pour abréger:

$$M(x)=\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{B_3}{5.6}\cdot\frac{1}{x^5}-\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{(-1)^m B_{m-1}}{(2m-3)\,(2m-2)}\cdot\frac{1}{x^{2m-3}}+\frac{(-1)^{m+1}B_m}{(2m-1).2m}\cdot\frac{\Theta}{x^{2m-1}},$$

on tirera de (68.), pour une valeur quelconque de $x>-1$, l'expression

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{(2\pi x)}.x^x.e^{-x}.e^{M(x)};$$

et elle donnera successivement les relations suivantes:

$$\Gamma(x+1)>\sqrt{(2\pi x)}.x^x.e^{-x},$$
$$\Gamma(x+1)<\sqrt{(2\pi x)}.x^x.e^{-x}.e^{\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x}},$$
$$\Gamma(x+1)>\sqrt{(2\pi x)}.x^x.e^{-x}.e^{\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x}}.e^{-\frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3}},$$
$$\Gamma(x+1)<\sqrt{(2\pi x)}.x^x.e^{-x}.e^{\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x}}.e^{-\frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3}}.e^{\frac{B_3}{5.6}\cdot\frac{1}{x^5}}$$

etc.

Ces mêmes relations ont été dejà trouvées par M. *Raabe* pour des valeurs entières quelconques de x. Ce Geomètre finit son mémoire (Journ. de M. *Crelle* tom. XXV. pag. 159.) par les mots: „Sans doute elles subsistent „encore pour des valeurs fractionnaires et même incommensurables; mais je „n'ai pu réussir jusqu'à présent à démontrer cela rigoureusement."

Deuxième Application. Supposons dans (62.) $h=1$ et

$$69.\qquad u'_x=\mathrm{Log}.\left\{\frac{\Gamma(a+x)}{\Gamma(b+x).\Gamma(a+x-b)}\right\},$$

où $a>b$; nous aurons facilement, en vertu de (66.):

$$u''_x=-\int_0^\infty dz.\left[\frac{e^{-z}}{z}+\frac{e^{-xz}}{1-e^{-z}}\left(e^{-az}-e^{-bz}-e^{-(a-b)z}\right)\right],$$

et généralement, si $r>2$:

$$u^{(r)}_x=(-1)^r\int_0^\infty\frac{z^{r-2}e^{-xz}}{1-e^{-z}}\left(e^{-bz}+e^{-(a-b)z}-e^{-az}\right)dz.$$

Cette expression satisfera évidemment les conditions du théorème III., d'où l'on conclut qu'en s'arrêtant dans le dévéloppement de (69.) à un certain terme, la valeur du reste ne sera pas moindre que celle du terme suivant. Ce dévéloppement s'obtiendra sans difficulté à l'aide de la formule (68.) et on aura:

$$\text{Log}\left\{\frac{\Gamma(a+x+1)}{\Gamma(b+x+1).\Gamma(a+x+1-b)}\right\} = -\tfrac{1}{2}\text{Log}\,2\pi + (a+x+\tfrac{1}{2})\,\text{Log}(a+x)$$
$$-(b+x+\tfrac{1}{2})\,\text{Lg}(b+x) - (a+x-b+\tfrac{1}{2})\,\text{Lg}(a+x-b) - x$$
$$+\frac{B_1}{1.2}q_1(x) \ldots + \frac{(-1)^m B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}q^{2m-2}(x) + \frac{(-1)^{m+1}\Theta.B_m}{(2m-1).2m}.q^{2m-1}(x),$$

où, pour abréger, on a posé:

$$q_r(x) = \frac{1}{(a+x)^r} - \frac{1}{(b+x)^r} - \frac{1}{(a+x-b)^r}.$$

Supposons $x = 0$; en écrivant q_r au lieu de $q_r(0)$ et fesons

$$N(q) = \frac{B_1}{1.2}.q_1 - \frac{B_2}{2.4}q_3 + \ldots + \frac{(-1)^m B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}.q_{2m-3} + \frac{(-1)^m.\Theta B_m}{(2m-1)2m}q_{2m-1},$$

nous aurons

$$\text{Log}\left\{\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1).\Gamma(a-b+1)}\right\} = -\tfrac{1}{2}\text{Log}\,2\pi + (a+\tfrac{1}{2})\,\text{Log}\,a - (b+\tfrac{1}{2})\,\text{Log}\,b$$
$$-(a-b+\tfrac{1}{2})\,\text{Log}(a-b) + N(q),$$

et partant

$$70. \qquad \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1).\Gamma(a-b+1)} = \sqrt{\left(\frac{a}{2\pi b(a-b)}\right)}.\frac{a^a.e^{N(q)}}{b^b.(a-b)^{a-b}}.$$

Comme a et b sont des nombres entiers, cette formule donne la valeur du coëfficient du $(b+1)^{\text{me}}$ terme du dévéloppement de $(m+n)^a$.

Si $a = 2r$ et $b = r$, on obtiendra la valeur du coëfficient du terme moyen du développement de $(m+n)^{2r}$. En désignant ce coëfficient par F, on aura

$$F = \frac{2^{2r}}{\sqrt{(\pi r)}}.e^{-P(r)},$$

où

$$P(r) = \frac{2^2-1}{2}.\frac{B_1}{1.2}.\frac{1}{r} - \frac{2^4-1}{2^3}.\frac{B_2}{3.4}.\frac{1}{r^3} + \ldots.$$
$$\ldots. + (-1)^m.\frac{2^{2m-2}-1}{2^{2m-3}}.\frac{B_{m-1}}{(2m-3)(2m-1)}.\frac{1}{r^{2m-3}}$$
$$+(-1)^{m+1}.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}.\frac{B_m}{(2m-1).2m}.\frac{\Theta}{r^{2m-1}}.$$

Désignons par T le plus grand terme du développement de

$$(m+n)^{rm+rn},$$

on sait que ce terme est le $(m+1)^{\text{me}}$, c'est à dire que

$$T = Am^{rm}.n^{rn}.$$

Mais le coëfficient A s'obtiendra par (70.) en fesant $a = rm + rn$ et $b = rn$; donc, toutes les réductions faites, on aura:

$$71. \qquad T = \sqrt{\left(\frac{m+n}{2rmn.\pi}\right)}\cdot e^{Q}(m+n)^{rm+rn},$$

en posant, pour abréger:

$$Q = \frac{B_1}{1.2}c_1 - \frac{B_2}{3.4}c_2 + \ldots. + \frac{(-1)^m B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}c_{2m-3} + (-1)^{m+1}\cdot\frac{\Theta.B_m}{(2m-1).2m}\cdot c_{2m-1},$$

et généralement:

$$c_k = \frac{1}{r^k}\left\{\frac{1}{(m+n)^k} - \frac{1}{m^k} - \frac{1}{n^k}\right\}.$$

La formule (71.) donnera immédiatement

$$\frac{T}{(m+n)^{rm+rn}} = \sqrt{\left(\frac{m+n}{2rmn.\pi}\right)}\cdot e^{Q};$$

ce qui est l'expression du rapport du plus grand terme T du dévéloppement de $(m+n)^{rm+rn}$ à $(m+n)^{rm+rn}$. Avec la même facilité, comme nous avons obtenu la formule (70.), ayant pris pour point de départ la formule

$$u'_x = \mathrm{Log}\left\{\frac{\Gamma(b+x).\Gamma(a+x-b)}{\Gamma(c+x).\Gamma(a+x-c)}\right\},$$

nous aurions aussi trouvé

$$\frac{\Gamma(b+1).\Gamma(a-b+1)}{\Gamma(c+1).\Gamma(a-c+1)} = \sqrt{\left(\frac{b(a-b)}{c(a-c)}\right)}\cdot\frac{b^b.(a-b)^{a-b}}{c^c.(a-c)^{a-c}}\cdot e^{N(p)},$$

en posant

$$N(p) = \frac{B_1}{1.2}\cdot p_1 - \frac{B_2}{3.4}\cdot p_3 + \ldots. + \frac{(-1)^m B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}p_{2m-3} + \frac{(-1)^{m+1}\Theta.B_m}{(2m-1).2m}p_{2m-1},$$

et généralement

$$p_k = \frac{1}{b^k} + \frac{1}{(a-b)^k} - \frac{1}{c^k} - \frac{1}{(a-c)^k}.$$

Si a, b, c sont des nombres entiers, la formule (72.) donnera l'expression du rapport entre le $(c+1)^{\mathrm{me}}$ et le $(b+1)^{\mathrm{me}}$ terme du dévéloppement de $(m+n)^a$, savoir:

$$\sqrt{\left(\frac{b(a-b)}{c(a-c)}\right)}\cdot\frac{b^b(a-b)^{a-b}}{c^c(a-c)^{a-c}}\cdot\frac{n^{c-b}}{m^{c-b}}\cdot e^{N(p)}.$$

Les expressions, que nous venons de trouver, sont d'une grande importance pour le calcul des probabilités, et ont été proposée par *Laplace*. Mais cet illustre analyste n'a pas remarqué que les séries dont il s'agit, sont divergentes, et que leur emploi n'est pas légitimé, à moins que les limites des termes complémentaires ne soient pas determinées. C'est ce qui peut toujours être effectué à l'aide de nos formules.

Troisième Application. En posant suivant M. *Legendre*:

$$\frac{d.\mathrm{Lg}\,\Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty dz\left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1-e^{-z}}\right) = Z'(x),$$

et fésant dans (62.) $h = 1$ et

$$73. \qquad u'_x = Z'(n+1-x) - Z'(n+x) = -\int_0^\infty \frac{dz}{1-e^{-z}}\left(e^{-(n+1-x)z} - e^{-(n+x)z}\right),$$

nous aurons généralement:

$$u^{(r)}_x = -\int_0^\infty \frac{z^{-1}dz}{1-e^{-z}} e^{-(n+1-x)z} + (-1)^r . e^{-(n+x)z}),$$

d'où l'on voit que les conditions du théorème III. sont satisfaites. De plus la formule (73.) donne

$$\Delta u_x = \int_0^1 u'_{x+y}\,dy = \mathrm{Log}\,\frac{n-x}{n+x},$$

et généralement

$$\Delta u^{(r)}_x = (-1)^r\,\Gamma(r).b_r,$$

en fesant, pour abréger:

$$74. \qquad b_r = \frac{1}{(x+n)^r} - \frac{1}{(x-n)^r}.$$

Par ces valeurs de u'_x, Δu_x, $\Delta u'_x$, etc. et à l'aide de la formule connue

$$75. \qquad Z'(1+a) = \frac{1}{a} + Z'(a)$$

on tirera immédiatement de (62.):

$$76. \qquad Z'(n-x) - Z'(n+x) = \mathrm{Log}\,\frac{n-x}{n+x} - \frac{x}{n^2-x^2} + \frac{B_1}{2}b_2 - \frac{B_2}{4}b_4 + \ldots.$$
$$\ldots. + (-1)^m \frac{B_{m-1}}{2m-2} b_{2m-2} + (-1)^{m+1}.\frac{B_m}{2m}.\Theta.b_{2m},$$

b_r étant déterminé par (74.). La formule (76.) subsiste pour toutes les valeurs positives ou négatives de x, numériquement inférieures à n.

Soit k un nombre entier positif ou négatif, dont la valeur n'est pas supérieure à n; x étant tel que

$$k > x > k-1,$$

on aura en vertu de (75.):

$$Z'(n-x)=\sum_{i=k}^{i=k-1}\frac{1}{i-x}+Z'(k-x),$$

$$Z'(n+x)=\sum_{i=k}^{i=k-1}\frac{1}{i+x}+\sum_{i=(k-1)}^{i=k-1}\frac{1}{i+x}+Z'(1-(k-x))$$

$$=\frac{1}{x}+\sum_{i=k}^{i=k-1}\frac{1}{i+x}-\sum_{i=(k-1)}^{i=k-1}\frac{2x}{i^2-x^2}+Z'(1-(k-x)),$$

d'où, en soustrayant:

$$Z'(n-x)-Z'(n+x)=Z'(k-x)-Z'(1-(k-x))-\frac{1}{x}-\sum_{i=1}^{i=k-1}\cdot\frac{2x}{i^2-x^2}.$$

En substituant cette valeur dans **(76.)**, et en se rappélant que $k>x>k-1$, et de plus que

$$Z'(k-x)-Z'(1-(k-x))=-\varpi\,\mathrm{Cotang}\,(k-x)\pi=\varpi\,\mathrm{Cotang}\,\varpi x,$$

on aura

$$77.\qquad \varpi\,\mathrm{Cotang}\,\varpi x=\mathrm{Log}\frac{n-x}{n+x}+\frac{1}{x}-\frac{x}{n^2-x^2}-\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{2x}{i^2-x^2}$$

$$+\frac{B_1}{2}.b_2+\frac{B_2}{4}b_4+\ldots.+\frac{(-1)^m B_{m-1}}{2m-2}b_{2m-2}+\frac{(-1)^{m+1}B_m}{2m}.\Theta.b_{2m},$$

où b_r est donné par **(74.)**. Cette formule a lieu pour toutes les valeurs (positives ou négatives) non entières de x, et non pas supérieures à n. Dans le cas où

$$x \text{ est un nombre entier } <n,$$

les deux membres de **(77.)** deviennent infinis; mais on démontrera facilement, que si x converge vers un membre entier μ, le rapport des deux membres convergera vers l'unité. Donc, généralement la formule **(77.)** subsistera pour toutes les valeurs positives et négatives de $x<n$.

De cette formule générale, qui (je crois) n'a pas été proposée jusqu'ici, on tirera, en fesant $n=\infty$, la formule connue

$$\varpi\,\mathrm{Cotang}\,\varpi x=\frac{1}{x}-\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{2x}{i^2-x^2}.$$

Quatrième Application. En fesant dans **(62.)** $h=1$ et

$$u'_x=\mathrm{Log}\left(\frac{\Gamma(x-y).\Gamma(x+y)}{[\Gamma(x)]^2}\right)=\int_0^\infty\frac{e^{-xz}dz}{1-e^{-z}}\,(e^{yz}+e^{-yz}-2)$$

$$(x>y),$$

les conditions du théorème III. sont satisfaites. Il suit delà que si dans le développement on s'arrête à un certain terme, la valeur du reste sera inférieure à celle du terme suivant. Donc, en fesant $x =$ un nombre entier n, on tirera de (68.):

$$78. \quad \mathrm{Log}\left(\frac{\Gamma(n-y).\Gamma(n+y)}{[\Gamma(n)]}\right) = (n-\tfrac{1}{2})\,\mathrm{Log}\,(1-\frac{y^2}{n^2}) - y\,\mathrm{Log}\,\frac{n-y}{n+y} + L,$$

en posant pour abréger:

$$L = \frac{B_1}{1.2}a_1 - \frac{B_2}{3.4}a_3 + \ldots. + \frac{(-1)^m B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}a_{2m-2} + \frac{(-1)^{m+1}B_m}{(2m-1).2m}.\Theta.a_{2m-1},$$

et généralement

$$a_r = \frac{1}{(n+y)^r} + \frac{1}{(n-y)^r} - \frac{2}{n^r}.$$

La formule (78.) subsiste pour toutes les valeurs positives ou nègatives de x, inférieures à n.

Soit k un nombre entier positif ou négatif, dont la valeur numérique n'est pas supérieure à n, et soit y tel que

$$k > y > k-1,$$

on aura en vertu d'une propriété connue de la fonction Γ:

$$\mathrm{Log}\,\Gamma(n-y) = \mathrm{Log}\,\Gamma(k-y) + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n-1}\mathrm{Log}\,(i-y)^2,$$

$$\mathrm{Log}\,\Gamma(n-y) = \mathrm{Log}\,\Gamma(1-(k-y)) + \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}\,y^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{i=k}^{i=n-1}\mathrm{Log}\,(i+y)^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n-1}\mathrm{Log}\,(i^2-y^2)^2$$

et partant

$$\mathrm{Log}\,\Gamma(n-y).\Gamma(n+y) = \mathrm{Log}\,\Gamma(k-y).\mathrm{Log}\,\Gamma(1-(k-y)) + \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}\,y^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n-1}\mathrm{Log}\,(i^2-y^2)^2.$$

En substituant cette valeur dans (78.) et en se rappélant que

$$\Gamma(k-y).\Gamma(1-(k-y)) = \frac{\pi}{\mathrm{Sin}\,(k-y)\pi},$$

on obtiendra

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{Log}\,\frac{\pi^2}{\mathrm{Sin}^2(k-y)\pi} = 2\mathrm{Log}\,n - \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}\,y^2 - \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n-1}\mathrm{Log}\,(i^2-y^2)^2 \ldots.$$

$$\ldots. + (n-\tfrac{1}{2})\,\mathrm{Log}\,(1-\frac{y^2}{n^2}) - y\,\mathrm{Log}\,\frac{n-y}{n+y} + L,$$

d'où

$$\mathrm{Sin}^2\pi y = \pi^2 y^2(1-y^2)^2.(1-\frac{y^2}{4})^2 \ldots. (1-\frac{y^2}{(n-1)^2})^2 \cdot \frac{e^{-L}}{(1-\frac{y^2}{n^2})^{2n-1}} \cdot \left(\frac{n-y}{n+y}\right)^{2y},$$

et enfin

$$\mathrm{Sin}\,\pi y = \pi y(1-y^2)\,(1-\frac{y^2}{4}) \ldots. (1-\frac{y^2}{(n-1)^2}) \cdot \frac{e^{-L}}{(1-\frac{y^2}{n^2})^{n-\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{n-y}{n+y}\right)^{y}:$$

formule qui a lieu pour toutes les valeurs positives ou négatives de y, inférieures à n.

De cette formule remarquable, qui (je crois) n'a pas été encore proposé, on tirera immédiatement, en fesant $n = \infty$, la formule connue

$$\mathrm{Sin}\,\pi y = \pi y\,(1-y^2)\,(1-\frac{y^2}{4})\,(1-\frac{y^2}{9})\,(1-\frac{y^2}{16}) \ldots.$$

Upsala le 20 Avril 1846.

5.

Bemerkungen zu einer gewissen Methode, die Gleichung eines durch vier Puncte gehenden Kegelschnitts auszudrücken.

(Von dem Herrn Dr. *Arndt* in Stralsund.)

1.

Sind

1. $y-ax-b=0,\quad y-a_1x-b_1=0,\quad y-a_2x-b_2=0,\quad y-a_3x-b_3=0$

die Gleichungen der auf einander folgenden Seiten eines Vierecks, die sich auch durchkreuzen können, so wird die Gleichung eines durch die vier Spitzen desselben gelegten Kegelschnitts durch

2. $(y-ax-b)(y-a_2x-b_2)+\lambda(y-a_1x-b_1)(y-a_3x-b_3)=0$

ausgedrückt, wo λ eine willkürliche Constante ist. Diese Methode, die Gleichung eines um ein Viereck beschriebenen Kegelschnitts darzustellen, vereinfacht bekanntlich die Beweise einiger, auf andere Art nur umständlicher zu erlangender Theoreme über Linien zweiten Grades. Es ist jedoch nach meiner Meinung die *Möglichkeit* jener Darstellung nicht vollständig nachgewiesen. Es pflegt wie folgt geschlossen zu werden (Vgl. *Magnus* Sammlung von Aufgaben aus der analyt. Geometrie. Thl. 1. S. 147—48. Berlin 1833.): „Dass die Gleichung (2.) eine Linie zweiten Grades ausdrückt, in welcher die vier Durchschnittspuncte der durch die Gleichung (1.) characterisirten Geraden sich befinden, erhellet leicht. Nimmt man nun in dem gegebenen Kegelschnitt noch einen fünften Punct an, so kann λ so bestimmt werden, dass die Coordinaten dieses Puncts der Gleichung (2.) genügen, weil, wenn man jene in diese für x und y setzt, die resultirende Gleichung in Beziehung auf λ vom ersten Grade ist und also für λ einen reellen Werth giebt. Ist λ bestimmt, so drückt die Gleichung (2.) den gegebenen Kegelschnitt wirklich aus, *in*dem durch fünf Puncte *nur eine* Linie zweiten Grades gelegt werden kann."

Für die Ellipse und ungleichseitige Hyperbel, welche durch *nicht weniger* als fünf Puncte bestimmt werden, gelten die Schlüsse vollkommen: nicht

für die Parabel und die gleichseitige Hyperbel, welche schon durch *cier*, und für die Kreislinie, welche schon durch *drei* Puncte bestimmt wird.

Bezeichnet man die Gleichung (2.), in entwickelter Form, durch $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$, für welche dann

$$3. \quad \begin{cases} A = l + \lambda, \\ -2B = a + a_2 + \lambda(a_1 + a_3), \\ C = aa_2 + \lambda a_1 a_3, \\ -2D = b + b_2 + \lambda(b_1 + b_3), \\ 2E = ab_2 + a_2 b + \lambda(a_1 b_3 + a_3 b_1), \\ F = bb_2 + \lambda b_1 b_3 \end{cases}$$

ist, so muss für die Parabel $B^2 - AC = 0$, für die gleichseitige Hyperbel $A - 2B\cos\varphi + C = 0$, und für den Kreis $C = A$ und $B = A\cos\varphi$ sein, indem φ den Coordinatenwinkel bezeichnet.

Die Gleichung $B_2 - AC = 0$ wird nach (3.) in Beziehung auf λ vom zweiten Grade sein und kann unter Umständen zwei imaginäre Wurzeln haben. Dann ist nachzuweisen, dass dieser Fall nur eintritt, wenn durch die vier Puncte überhaupt keine Parabel gelegt werden kann. Die Gleichung $A - 2B\cos\varphi + C = 0$ wird in Beziehung auf λ zwar vom ersten Grade sein, allein es könnte λ unendlich werden. Soll endlich durch die vier Puncte ein Kreis gehen, so muss λ den beiden Gleichungen $C = A$ und $B = A\cos\varphi$ genügen, und man gelangt zu einer Relation zwischen den Grössen a, a_1, etc., b, b_1, etc., von welchen nachzuweisen ist, dass sie die Bedingungsgleichung für den Umstand ausdrückt, dass die vier Puncte in einer Kreislinie liegen.

Bei der speciellen Erörterung dieser Umstände wird sich zugleich die Bestimmung der Lage der vier Puncte ergeben, damit ein bestimmter Kegelschnitt durch sie hindurchgehen könne; so wie das merkwürdige Resultat, dass um ein Parallelogramm *keine*, um ein Trapez *eine* und um jedes andere Viereck *zwei* Parabeln gelegt werden können; worauf meines Wissens noch nicht hingewiesen worden ist.

2.

Zuvörderst ist die gegenseitige Lage der vier Puncte, wenn ein bestimmter Kegelschnitt durch sie hindurchgehen soll, festzustellen.

Man nehme zwei Gegenseiten des gegebenen Vierecks (zu welchen auch die Diagonalen gehören) als Coordinatenaxen an, und bezeichne die Abscissen der in der Axe der x liegenden Puncte durch α, α_1, die Ordinaten

der in der Axe der y liegenden Puncte durch β, β_1. Substituirt man diese Coordinaten in die Gleichung $Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0$, so erhält man folgende vier Gleichungen:

$$C\alpha^2+2E\alpha+F=0, \qquad C\alpha_1^2+2E\alpha_1+F=0,$$
$$A\beta^2+2D\beta+F=0, \qquad A\beta_1^2+2D\beta_1+F=0,$$

aus welchen sich

$$4. \quad C=\frac{F}{\alpha\alpha_1}, \quad A=\frac{F}{\beta\beta_1}, \quad E=-\frac{F(\alpha+\alpha_1)}{2\alpha\alpha_1}, \quad D=-\frac{F(\beta+\beta_1)}{2\beta\beta_1}$$

ergiebt. Der Kürze wegen wollen wir $F=1$ setzen.

a) Bilden nun die vier Puncte ein *convexes* Viereck (welches keinen einspringenden Winkel hat; jedes andere Viereck soll *concav* genannt werden), so überzeugt man sich durch eine Figur leicht, dass $\alpha\alpha_1$ und $\beta\beta_1$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, das Product $\alpha\alpha_1\beta\beta_1$ also negativ ist. In diesem Falle ist B_2-AC positiv für jedes beliebige B, und folglich können um ein convexes Viereck *nur* Hyperbeln, und zwar unendlich viele gelegt werden; wegen der gänzlichen Unbestimmtheit von B. Eine dieser Hyperbeln wird *gleichseitig* sein; nämlich die, für welche $A-2B\cos\varphi+C=0$ oder $B=\frac{A+C}{2\cos\varphi}$ ist. Für $q=90^0$ ist $A+C=0$, d. h. $\alpha\alpha_1+\beta\beta_1=0$. Findet diese Relation nicht Statt, so ist die Hyperbel ungleichseitig: findet sie Statt, so sind *alle* durch die vier Puncte gelegten Hyperbeln gleichseitig.

b) Bilden die vier Puncte ein *concaves* Viereck, so haben $\alpha\alpha_1$ und $\beta\beta_1$ dasselbe Vorzeichen; das Product $\alpha\alpha_1\beta\beta_1$ ist positiv und es kann B so bestimmt werden, dass B^2-AC entweder <0, oder >0, oder $=0$ wird.

1) Ist für B ein Werth angenommen, für welchen $B^2-AC<0$ ist, so wird die Curve eine Ellipse sein, wenn $H^2-GI>0$ ist, wo $G=B^2-AC$, $H=BD-AE$, $I=D^2-AF(F=1)$. Man findet I stets positiv, nämlich $I=\left(\frac{\beta-\beta_1}{2\beta\beta_1}\right)^2$, also ist (weil $G<0$) $GI<0$, $H^2-GI>0$, und um ein concaves Viereck können also unendlich viele Ellipsen gelegt werden.

2) Für einen Werth von B, der $B^2-AC>0$ macht, wird im Allgemeinen H^2-GI nicht verschwinden; so dass also um ein concaves Viereck unendlich viele Hyperbeln gelegt werden können.

3) Die Bedingungsgleichung für die Parabel $B^2-AC=0$ giebt zwei reelle Werthe von B, nämlich $B=\pm\sqrt{\frac{1}{\alpha\alpha_1\beta\beta_1}}$; jedoch entspricht nicht immer jedem derselben eine Parabel, da $H=BD-AE$ verschwinden kann. Man

erhält $H=\frac{1}{2\beta\beta_1}\left(\frac{\alpha+\alpha_1}{\alpha\alpha_1}\mp\frac{\beta+\beta_1}{\sqrt{\alpha\alpha_1\beta\beta_1}}\right)$. Ist die Figur ein Parallelogramm, so wird (wenn man die Diagonalen zu Axen genommen hat) $\alpha+\alpha_1=0$, $\beta+\beta_1=0$ und $H=0$ sein: folglich kann um ein Parallelogramm keine Parabel beschrieben werden. Diesen Fall ausgenommen, kann H für das untere Vorzeichen nicht verschwinden, indem, wenn zwei Gegenseiten, welche Seiten der Figur selbst sind, zu Axen genommen werden, die Grössen α,α_1 und β,β_1 als positiv betrachtet werden dürfen. Endlich ist zu untersuchen, ob H für das obere Vorzeichen verschwinden könne. Die Bedingungsgleichung ist $\frac{\alpha+\alpha_1}{\alpha\alpha_1}=\frac{\beta+\beta_1}{\sqrt{\alpha\alpha_1\beta\beta_1}}$ oder $\frac{(\alpha+\alpha_1)^2}{\alpha\alpha_1}=\frac{(\beta+\beta_1)^2}{\beta\beta_1}$. Diese Gleichung lässt sich auf die Form $(\alpha\beta-\alpha_1\beta_1)\times(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)=0$ bringen, also ist entweder $\alpha\beta=\alpha_1\beta_1$, oder $\alpha\beta_1=\alpha_1\beta$. Aber das erste findet nicht Statt, wenn die Coordinaten so unterschieden werden, dass $\alpha_1>\alpha$, $\beta_1>\beta$ ist, und es bleibt nur $\alpha\beta_1=\alpha_1\beta$, oder $\alpha:\alpha_1=\beta:\beta_1$. Diese Bedingung entspricht dem *Paralleltrapez*, und es hat sich also ergeben, dass um ein Paralleltrapez nur *eine* Parabel (für welche B nur den *einen* Werth $-\sqrt{\frac{1}{\alpha\alpha_1\beta\beta_1}}$ hat), um ein Viereck dagegen, in welchem keine zwei Seiten parallel sind, stets *zwei* Parabeln beschrieben werden können.

4) Für die gleichseitige Hyperbel muss $A-2B\cos\varphi+C=0$ ($A+C=0$ für $\varphi=90^0$) sein. Ist φ nicht 90^0, so kann man B so bestimmen, dass die erste Gleichung Statt findet: ist dagegen $\varphi=90^0$, so ist $\alpha\alpha_1+\beta\beta_1=0$; und diese Relation kann nie Statt finden, weil $\alpha\alpha_1$ und $\beta\beta_1$ dasselbe Vorzeichen haben, so dass also um ein concaves Viereck, in welchem zwei Gegenseiten auf einander senkrecht stehen, keine gleichseitige Hyperbel gelegt werden kann.

5) Soll endlich eine Kreislinie durch die vier Puncte gehen, so muss $C=A$ und $B=A\cos\varphi$, d. h. $\alpha\alpha_1=\beta\beta_1$, und $B=\frac{1}{\alpha\alpha_1}\cos\varphi$ sein, und die Gleichung der Curve ist

$$y^2+2xy\cos\varphi+x^2-(\beta+\beta_1)y-(\alpha+\alpha_1)x+\alpha\alpha_1=0.$$

Sind t und u die Coordinaten des Mittelpuncts, so ist bekanntlich $Au+Bt+D=0$ und $Bu+Ct+E=0$, d. h.

$$u+t\cos\varphi=\tfrac{1}{2}(\beta+\beta_1),$$
$$t+u\cos\varphi=\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha_1).$$

Dies sind die Gleichungen *derjenigen* Geraden, welche auf den als Axen angenommenen Gegenseiten in ihren Mittelpuncten senkrecht stehen, und der Durch-

schnitt derselben giebt des Kreises Mittelpunct. Die Relation $\alpha\alpha_1 = \beta\beta_1$ (ein bekannter Satz) ist die Gleichung für die Bedingung, dass die vier Puncte in einer Kreislinie liegen; für das Parallelogramm kann sie nur dann erfüllt werden, wenn es rechtwinklig ist; wie leicht zu sehen.

3.

Wir wenden uns nun zu der Bedeutung der Gleichung (2.). Aus den Gleichungen (3.) erhält man nach einer leichten Rechnung:

5. $$4(B^2-AC)=\lambda^2(a_1-a_3)^2+2\lambda[(a+a_2)(a_1+a_3)-2aa_2-2a_1a_3]+(a-a_2)^2$$
$$=\lambda^2(a_1-a_3)^2+2\lambda[(a-a_2)(a_1-a_3)-2(a-a_3)(a_2-a_3)]+(a-a_2)^2,$$

welche Gleichung die Form

$$5^*. \qquad 4(B^2-AC)=g\lambda^2+2h\lambda+i$$

hat, indem $g=(a_1-a_3)^2$, $h=(a-a_2)(a_1-a_3)-2(a-a_1)(a_2-a_3)$, $i=(a-a_2)^2$ ist. Das Vorzeichen der Function $g\lambda^2+2h\lambda+i=\frac{1}{g}[(g\lambda+h)^2-(h^2-gi)]$ ist $+$, für jeden beliebigen Werth von λ, wenn $h^2-gi<0$; und in diesem Falle drückt die Gleichung (2.) unendlich viele Hyperbeln und niemals eine Ellipse oder Parabel aus. Es findet sich

$$6. \qquad h^2-gi=4T, \quad T=(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a)$$

und $T<0$, statt der Bedingung $h^2-gi<0$. Verschwinden kann T nicht, indem keiner der vier Factoren Null werden kann; nämlich deshalb, weil je zwei auf einander folgende Seiten des Vierecks verschiedene Richtungen haben. Ist $T<0$, so verschwindet B^2-AC für zwei Werthe von λ, nämlich für

$$7. \qquad \lambda=\frac{2(a-a_1)(a_2-a_3)-(a-a_2)(a_1-a_3)\pm 2\sqrt{T}}{(a_1-a_3)^2},$$

und diese beiden Werthe sind stets verschieden, weil T nicht verschwinden kann. Dies Resultat hat aber keine Beziehung auf den Fall $a_1-a_3=0$; denn dann reducirt sich die Function $g\lambda^2+2h\lambda+i$ auf $2h\lambda+i$ und man erhält für λ nur den einen Werth:

$$8. \qquad \lambda=\frac{(a-a_2)^2}{4(a-a_1)(a_2-a_1)}.$$

Wenn g nicht Null ist, wird die Function $g\lambda^2+2h\lambda+i$ negativ für alle stetig auf einander folgenden Werthe von λ, die zwischen den beiden Werthen (7.) liegen, und positiv für die übrigen. Ist $g=0$, so wird $2h\lambda+i$ positiv für $\lambda \gtrless -\frac{i}{2h}$, je nachdem h positiv oder negativ ist, und resp. negativ für $\lambda \lessgtr -\frac{i}{2h}$.

In dem Falle $T>0$ drückt also die Gleichung (2.) unendlich viele Ellipsen, Hyperbeln, oder zwei Parabeln aus (zum Theil auch eine), je nachdem der Werth für λ gewählt ist.

4.

Lage der vier Puncte, wie sie dem Vorzeichen von T *entspricht.*

Zunächst lässt sich zeigen, dass das Vorzeichen der Grösse T von der Lage des Coordinatensystems unabhängig ist. Beziehen sich nämlich die Gleichungen (1.) auf ein System, dessen Coordinatenwinkel φ ist, und bezeichnet man die Winkel, welche die Axen des neuen Systems mit der Axe der x bilden, durch ξ und η, so ist bekanntlich

$$x = \frac{x_1 \sin(\varphi-\xi)+y_1 \sin(\varphi-\eta)}{\sin\varphi}, \qquad y = \frac{x_1 \sin\xi + y_1 \sin\eta}{\sin\varphi},$$

und die Gleichung der ersten Seite des Vierecks in Bezug auf das neue System, ist $\gamma_1 - \mathfrak{a} x_1 - \mathfrak{b} = 0$, indem

$$\mathfrak{a} = \frac{a\sin(\varphi-\xi)-\sin\xi}{\sin\eta - a\sin(q-\eta)}.$$

Ist $\gamma_1 - \mathfrak{a}_1 x_1 - \mathfrak{b}_1 = 0$ die Gleichung der zweiten Seite des Vierecks, so ist eben so

$$\mathfrak{a}_1 = \frac{a_1\sin(\varphi-\xi)-\sin\xi}{\sin\eta - a_1\sin(\varphi-\eta)},$$

folglich

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_1 = \frac{P(a-a_1)}{[\sin\eta - a\sin(\varphi-\eta)][\sin\eta - a_1\sin(\varphi-\eta)]},$$

$$\text{wo} \quad P = \sin\eta\,\sin(\varphi-\xi) - \sin\xi\,\sin(\varphi-\eta).$$

Aehnliche Ausdrücke erhält man für $\mathfrak{a}_1-\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_2-\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_3-\mathfrak{a}$, und es ergiebt sich

$$(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_1)(\mathfrak{a}_1-\mathfrak{a}_2)(\mathfrak{a}_2-\mathfrak{a}_3)(\mathfrak{a}_3-\mathfrak{a})$$
$$= \frac{P^4}{Q^2 . Q_1^2 . Q_2^2 . Q_3^2}(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a),$$

wo $Q=\sin\eta - a\sin(\varphi-\eta)$, $Q_1=\sin\eta - a_1\sin(\varphi-\eta)$, $Q_2=\sin\eta - a_2\sin(\varphi-\eta)$, $Q_3=\sin\eta - a_3\sin(\varphi-\eta)$ ist. Daraus folgt, dass die Grösse T ihr Vorzeichen bei der Veränderung des Coordinatensystems nicht ändert.

1) Bilden nun die vier Puncte ein convexes Viereck, so muss T negativ sein. Da diese Behauptung nur für irgend ein Coordinatensystem nachzuweisen ist, so nehme man die ausserhalb des Vierecks liegende Diagonale zur Axe der x an, und als den positiven Theil derselben den über den vierten Punct hinaus verlängerten Theil der Diagonale. Bezeichnen dann μ, μ_1, μ_2, μ_3 die

Winkel, welche die auf einander folgenden Seiten mit dem positiven Theile der Axe der x bilden, so ist $a = \text{tang}\,\mu$, $a_1 = \text{tang}\,\mu_1$, etc. und

$$(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a) = \frac{\sin(\mu-\mu_1)\sin(\mu_1-\mu_2)\sin(\mu_2-\mu_3)\sin(\mu_3-\mu)}{(\cos\mu\cos\mu_1\cos\mu_2\cos\mu_3)^2},$$

Es wird nun $\mu-\mu_1<0$, $\mu_1-\mu_2<0$, $\mu_2-\mu_3<0$, $\mu_3-\mu>0$, folglich das Product der Sinusse negativ, und also T ebenfalls negativ.

2) Liegen die vier Puncte in einem concaven Viereck, so muss T positiv sein. Denn nimmt man eine Diagonal zur Axe der x an, und ihren positiven Theil eben wie in (1), so wird $\mu-\mu_1<0$, $\mu_1-\mu_2>0$, $\mu_2-\mu_3<0$, $\mu_3-\mu>0$, also $T>0$.

5.

Lehrsatz.

Jede Linie zweiten Grades, die um das Viereck beschrieben wird, dessen Seiten die Gleichungen (1.) *ausdrücken, kann auf die Form* (2.) *gebracht werden.*

Beweis.

I. Die gegebene Curve sei eine *Ellipse*. Da nach (§. 2.) um ein convexes Viereck keine Ellipse gelegt werden kann, so ist dasselbe *concav*, und nach (§. 4.) ist $T>0$. Die Gleichung (2.) drückt daher, wenn man die unendlich vielen Werthe von λ zwischen den oben näher bestimmten Grenzen nimmt, unendlich viele Ellipsen aus, welche durch die vier Puncte gehen. Unter diesen muss die gegebene Ellipse sich befinden; denn nimmt man einen fünften Punct der letztern an und bestimmt λ so, dass die Coordinaten dieses Puncts der Gleichung (2.) genügen, so kann dieselbe keine Hyperbel oder Parabel ausdrücken, weil sonst durch fünf Puncte zwei Kegelschnitte verschiedener Art möglich wären.

II. Der Beweis für die *ungleichseitige Hyperbel* ist dem vorigen ganz ähnlich.

III. *Parabel.* *a*) Ist das Viereck ein *Parallelogramm*, also $a-a_2=0$, $a_1-a_3=0$, so verschwindet B_2-AC für $2\lambda=-4(a-a_1)(a_2-a_3)\lambda=0$, folglich für $\lambda=0$. Es ergiebt sich aber $BD-AE=0$ und die Gleichung (2.) drückt keine Parabel aus. Nach (§. 2.) ist indessen um ein Parallelogramm überhaupt keine Parabel möglich.

b) Ist das Viereck ein *Trapez*, oder $a_1-a_3=0$, und setzt man für λ den Werth (8. §. 3.), so stellt die Gleichung (2.) eine Parabel vor, und

diese muss die gegebene sein, weil nach (§. 2.) um ein Trapez nur *eine* Parabel beschrieben werden kann.

c) Ist das Viereck *concav*, und sind keine zwei Seiten desselben parallel, so dass $T>0$, so geben die beiden Werthe von λ in (7. §. 3.) zwei Parabeln, und eine derselben muss mit der gegebenen übereinstimmen, weil um das erwähnte Viereck nicht mehr als zwei Parabeln gelegt werden können.

d) Ist das Viereck endlich *convex*, also $T<0$, so werden die Werthe von λ in (7.) imaginär; indessen ist nach (§. 2.) um ein solches Viereck keine Parabel möglich. Liegen also vier Puncte wirklich in einer Parabel, so kann sie durch die Gleichung (2.) dargestellt werden.

IV. *Gleichseitige Hyperbel.* Die Bedingungsgleichung $A-2B\cos\varphi+C=0$ wird erfüllt, wenn $[1+\cos\varphi(a_1+a_3)+a_1a_3]\lambda+1+\cos\varphi(a+a_2)+aa_2=0$, oder wenn, unter der Voraussetzung, dass $1+\cos\varphi(a_1+a_3)+a_1a_3$ nicht verschwindet, $\lambda=-\frac{1+\cos\varphi(a+a_2)+aa_2}{1+\cos\varphi(a_1+a_3)+a_1a_3}$ ist. In diesem Fall drückt die Gleichung (2.) eine gleichseitige Hyperbel aus, wenn für λ der eben gegebene Werth gesetzt wird, und dies muss die gegebene Curve sein, weil durch vier Puncte (§. 2.) *nur eine* gleichseitige Hyperbel möglich ist. Ist aber $1+\cos\varphi(a_1+a_3)+a_1a_3=0$, und $1+\cos\varphi(a+a_2)+aa_2$ nicht Null, so wird λ unendlich, und es stehen wegen der ersten Bedingung zwei Gegenseiten des Vierecks auf einander senkrecht, die beiden andern, wegen der zweiten Bedingung, nicht. Ferner sieht man leicht, dass dieser Fall eintritt, wenn in (§. 2.) $\alpha\alpha_1+\beta\beta_2\gtrless 0$ ist; folglich ist dann keine gleichseitige Hyperbel möglich. Ist endlich $1+\cos\varphi(a_1+a_3)+a_1a_3=0$ und auch $1+\cos\varphi(a+a_2)+aa_2=0$, so dass also je zwei Gegenseiten auf einander senkrecht sind (was nur bei dem convexen Viereck sein kann) und die Bedingung $\alpha\alpha_1+\beta\beta_1=0$ (§. 2.) erfüllt wird, wie aus geometrischen Betrachtungen erhellt, so bleibt λ unbestimmt, und alle Hyperbeln durch die vier Puncte sind gleichseitig.

V. *Die Kreislinie.* Aus den Bedingungen $C=A$, $B=A\cos\varphi$ folgt $1+\lambda=aa_2+\lambda a_1a_3$, $2\cos\varphi(1+\lambda)=-\{a+a_2+\lambda(a_1+a_3)\}$ und $\lambda=-\frac{1-aa_2}{1-a_1a_3}=-\frac{a+a_2+2\cos\varphi}{a_1+a_3+2\cos\varphi}$; also die Relation

$$\frac{1-aa_2}{1-a_1a_3}=\frac{a+a_2+2\cos\varphi}{a_1+a_3+2\cos\varphi};$$

oder

$$\frac{1+(a+a_1)\cos\varphi+aa_1}{a-a_1}=-\frac{1+(a_2+a_3)\cos\varphi+a_2a_3}{a_2-a_3}.$$

Wird diese Bedingung erfüllt, so bezeichnet die Gleichung (2.) eine Kreislinie, und zwar die gegebene, weil nicht zwei oder mehrere Kreislinien durch vier Puncte hindurchgehen können. Findet die Bedingung nicht Statt, so drückt die Gleichung (2.) auch keine Kreislinie aus, und es ist nachzuweisen, dass unter dieser Voraussetzung durch die vier Puncte überhaupt keine Kreislinie möglich ist.

Die vorhergehende Bedingungsgleichung, welche sich leicht auf die Form

$$9. \quad (a_2-a_3)\,(1+aa_1)+(a-a_1)\,(1+a_2a_3) + \cos\varphi\,[(a+a_1)\,(a_2-a_3)+(a-a_1)\,(a_2+a_3)]=0$$

bringen lässt, gelte für irgend ein rechtwinkliges System; es sei also $(a_2-a_3)(1+aa_1)+(a-a_1)(1+a_2a_3)=0$, so muss sie auch für jedes andere rechtwinklige System Statt finden. Die Coordinatenverwandlung giebt

$$x=x_1\cos\xi-y_1\sin\xi, \qquad y=x_1\sin\xi+y_1\cos\xi,$$

wo x den von der Axe der x_1 und der Axe der x eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Stellt man die Gleichung der ersten Seite des Vierecks für das neue System durch $y_1-\mathfrak{a}.x_1-b=0$ dar, so ergiebt sich

$$\mathfrak{a}=\frac{a\cos\xi-\sin\xi}{a\sin\xi+\cos\xi}.$$

Setzt man nun $p=a\sin\xi+\cos\xi$, $p_1=a_1\sin\xi+\cos\xi$, etc., so erhält man

$$\mathfrak{a}_2-a_3=\frac{a_2-a_3}{pp_1}, \qquad 1+\mathfrak{a}a_1=\frac{1+aa_1}{p_2p_3};$$

und ähnliche Ausdrücke ergeben sich für $\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_1$ und $1+\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$. Daraus folgt

$$(\mathfrak{a}_2-\mathfrak{a}_3)(1+\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)+(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_1)(1+\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3)=\frac{(a_2-a_3)(1+aa_1)+(a-a_1)(1+a_2a_3)}{pp_1p_2p_3}=0.$$

Dies gilt für jede Lage der Axe der y_1, wenn nur die Axe der x_1 darauf senkrecht steht. Verlegt man die Axe der x_1, während die Axe der y_1 ungeändert bleibt, so ist, nach einer leicht verständlichen Bezeichnung,

$$x_1=x_2\cos\xi, \qquad y_1=x_2\sin\xi+y_2,$$
$$\mathfrak{a}'=\mathfrak{a}\cos\xi-\sin\xi,$$

folglich

$$\begin{aligned} s&=(\mathfrak{a}'_2-\mathfrak{a}'_3)\,(1+\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'_1)+(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}'_1)\,(1+\mathfrak{a}'_2\mathfrak{a}'_3)+2\cos\varphi\,(\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'_2-\mathfrak{a}'_1\mathfrak{a}'_3)\\ &=(\mathfrak{a}_2-\mathfrak{a}_3)\cos\xi[1+\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\cos\xi^2-(\mathfrak{a}+\mathfrak{a}_1)\sin\xi\cos\xi+\sin\xi^2]\\ &+(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_1)\cos\xi[1+\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\cos\xi^2-(\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_3)\sin\xi\cos\xi+\sin\xi^2]\\ &+2\cos\varphi\,[(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2-\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3)\cos\xi^2+(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_3-\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_2)\sin\xi\cos\xi]. \end{aligned}$$

Für $(a+a_1)\,(a_2-a_3)+(a-a_1)\,(a_2+a_3)$ kann man auch $2(aa_2-a_1a_3)$

schreiben. Erwägt man, dass der neue Coordinatenwinkel $\varphi = 90^0 - \xi$, oder $\xi - 90^0$, oder $540^0 - \xi$, also $\cos\varphi = \sin\xi$ ist, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{s}{\cos\xi} = {} & (a_2-a_3)\,[1 + aa_1\cos\xi^2 - (a+a_1)\sin\xi\cos\xi + \sin\xi^2] \\ & + (a-a_1)\,[1 + a_2a_3\cos\xi^2 - (a_2+a_3)\sin\xi\cos\xi + \sin\xi^2] \\ & + 2\,[(aa_2-a_1a_3)\sin\xi\cos\xi + (a_1+a_3-a-a_2)\sin\xi^2] \\ = {} & (a-a_1+a_2-a_3)\cos\xi^2 + [aa_1(a_2-a_3) + a_2a_3(a-a_1)]\cos\xi^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{s}{\cos\xi^3} &= a - a_1 + a_2 - a_3 + aa_1(a_2-a_3) + a_2a_3(a-a_1) \\ &= (a_2-a_3)(1+aa_1) + (a-a_1)(1+a_2a_3) = 0,\end{aligned}$$

folglich $s = 0$.

Demnach ist nur nachzuweisen, dass, wenn die vier Puncte in einer Kreislinie liegen, die Relation (9.) für irgend ein rechtwinkliges System Statt finde. Zu dem Ende nehme man eine Diagonale des Vierecks zur Axe der x an, so ist, wenn μ, μ_1, etc. die Winkel bezeichnen, welche die Seiten des Vierecks mit der Axe der x einschliessen, und A, B, C, D die Winkel der Figur sind: $\mu - \mu_1 = -B$, $\mu_2 - \mu_3 = -D$, $\operatorname{tang}(\mu-\mu_1) = \frac{a-a_1}{1+aa_1} = -\operatorname{tang} B$ und $\operatorname{tang}(\mu_2-\mu_3) = \frac{a_2-a_3}{1+a_2a_3} = -\operatorname{tang} D$; ferner $B+D=180^0$, $\operatorname{tang} B = -\operatorname{tang} D$, also $\frac{a-a_1}{1+aa_1} = -\frac{a_2-a_3}{1+a_2a_3}$, oder $(a_2-a_3)(1+aa_1) + (a-a_1)(1+a_2a_3) = 0$; welches die Relation (9.) für $q = 90^0$ ist.

Stralsund den 9. Juni 1846.

6.

Über das Ohmsche physicalische Gesetz.

(Vom Herrn Professor Dr. *Plücker* zu Bonn.)

1. Eines der einfachsten und zugleich wichtigsten physicalischen Gesetze ist ohne Zweifel das *Ohm*sche, und keine Darlegung der durch galvanische Ströme hervorgebrachten Erscheinungen kann auf Wissenschaftlichkeit Anspruch machen, wenn sie nicht *dieses* Gesetz zur Basis nimmt. Durch dasselbe sind aus der Sprache der Physik die unbestimmten Begriffe *Quantität* und *Intensität* verschwunden; oder vielmehr ist diesen, früher undefinirten Wörtern ein bestimmter Begriff untergelegt worden. Wenn man nach der Ursache fragt, weshalb das *Ohm*sche Gesetz so langsam zu der ihm gebührenden Anerkennung gelangt ist und seine ganze Bedeutung immer noch nicht in den Lehrbüchern erhalten hat, so findet sich dieselbe im Allgemeinen darin, dafs es die überall verbreiteten Ansichten über galvanische Erregung nicht zu unterstützen schien; und dann insbesondere in dem Einflusse der genannten Wörter, mit welchen man, auf den galvanischen Strom angewandt, bildliche Anschauungen zu verbinden geneigt ist, die man aber aufgeben mufs, wenn man zur klaren Auffassung des Thatsächlichen gelangen will. Ich halte jeden Schritt, der dazu beiträgt, die Bedeutung des *Ohm*schen Gesetzes durch neue Anwendungen in ein helleres Licht zu stellen, für einen wesentlichen Beitrag zur Förderung der Wissenschaft. So hat denn auch nicht leicht eine Abhandlung musterhafter mir geschienen, als diejenige von *Wheatstone*, welche in *Poggendorf's* Annalen, aus den „Philosophical Transactions" für 1843 übersetzt, sich findet, unter dem Titel „Beschreibung verschiedener neuer Instrumente und Methoden zur Bestimmung der Constanten einer *Volta*'schen Kette." Bd. 62. S. 499. Diese Abhandlung hat mir die Veranlassung zu einigen kleinen Arbeiten gegeben, und meine Absicht ist hier, dem Vorliegenden einige einfache Folgerungen aus dem *Ohm*schen Gesetze hinzuzufügen, welche mir begegneten, als ich dasselbe auf eine practische Aufgabe, die, der Bestimmung der vortheihaftesten Drathdicke zur Herstellung eines starken, für die neuesten *Faraday*schen Versuche bestimmten Electromagnet anwandte.

2. Für die Stärke des galvanischen Stromes, welcher durch ein einzelnes Element hervorgerufen wird, ergiebt sich nach dem *Ohm*schen Gesetze

der Ausdruck

$$\frac{E}{R+G}.$$

E bedeutet die electromotorische Kraft, welche bei einem Zink-Kupfer-Elemente zum Beispiel eine andere ist, als bei einem Zink-Platin-Element, und welche man sich auf irgend eine Einheit bezogen vorstellen mufs. Sie ändert sich nicht mit der Gröfse der Plattenpaare. R bedeutet den Widerstand in der Kette, G den Widerstand im Leitungsdrathe. Beide müssen in derselben Einheit ausgedrückt werden, und für diese Einheit kann man den Widerstand in einem beliebigen Kupferdrath annehmen, dessen Länge und Querschnitt man ebenfalls gleich Eins setzt. Schliefst man die Kette durch einen Kupferdrath von derselben Dicke, so giebt die Länge des Draths den Widerstand G.

Verbindet man mehrere Elemente zu einem einzigen, so bleibt die electromotorische Kraft dieselbe, während der Widerstand, in der Voraussetzung, dafs alle Elemente einander gleich sind, im Verhältnifs der Anzahl der Elemente sich vermindert. Beträgt also diese Anzahl x, so erhält man für die Intensität des Stromes:

$$\frac{Ex}{R+Gx}.$$

Bei einer Kette, die aus mehreren Elementen besteht, summiren sich die electromotorischen Kräfte der einzelnen Elemente; ebenso summiren sich die Widerstände. Sind demnach alle Elemente einander gleich und beträgt ihre Anzahl y, so ergiebt sich für die Intensität des Stroms:

$$\frac{Ey}{Ry+G}.$$

Stellt man endlich x Ketten von y Elementen zusammen, so kommt dies darauf hinaus, den y Elementen des vorigen Falles eine x mal gröfsere Oberfläche zu geben *); wonach also in dem vorstehenden Ausdrucke, um die

*) Diese allgemein gemachte Annahme kommt darauf hinaus, dafs man, wenn man zum Beispiel zwei (oder mehrere) Ketten von gleich vielen und gleich grofsen Zink-Platin-Elementen neben einander stellt und dann an die Platinplatten des ersten Elements jeder Kette das eine und an die Zinkplatten des letzten Elements jeder Kette das andere Ende des Verbindungsdraths befestigt, eine Stromstärke erhält, welche *dieselbe* bleibt, wenn aufserdem noch Zink mit Zink und Platin mit Platin in den sich entsprechenden, neben einander stehenden Elementen der Ketten verbunden wird. Durch diese neue Verbindung könnte nur dann eine Änderung in der Stromstärke hervorgebracht werden, wenn durch die Dräthe, welche die Verbindung herstellen, ein Strom hindurchginge. Dies kann aber nicht der Fall sein, weil, in Folge der Symmetrie der Anordnung, ein Strom nach einer Richtung einen gleichen Strom nach entgegengesetzter Richtung erfordern würde. Dadurch ist die obige Annahme von vornherein gerechtfertigt.

Intensität des neuen Stromes zu finden, der Widerstand auf den $x$ten Theil reducirt werden mufs, was

$$1. \quad \frac{Exy}{Ry+Gx} \text{ giebt.}$$

3. Wenn die Anzahl aller Elemente, die man auf verschiedene Weise zu Ketten verbinden kann, gegeben und gleich a ist, so dafs

$$2. \quad xy = a,$$

so entsteht die Frage, wie, wenn der Widerstand G gegeben ist, die Verbindung gemacht werden mufs, um den *stärksten* Strom zu erhalten. In Folge der letzten Gleichung verwandelt sich zunächst die vorhergehende in

$$3. \quad \frac{Ea}{Ry+Gx},$$

und dann mufs der Ausdruck

$$Ry+Gx,$$

indem man x und y als veränderlich betrachtet, ein Minimum werden. Zur Bestimmung dieses Minimums ergiebt sich

$$Rdy+Gdx = 0 \quad \text{und} \quad xdy+ydx = 0,$$

und hieraus

$$4. \quad \frac{R}{G} = \frac{x}{y}.$$

Aus der Verbindung dieser Gleichung mit der Gleichung (2.) findet sich

$$5. \quad y = \sqrt{\left(\frac{G}{R}\cdot a\right)} \quad \text{und} \quad x = \sqrt{\left(\frac{R}{G}\cdot a\right)},$$

und für das Maximum der Stromstärke:

$$6. \quad \frac{Ea}{2Ry} \equiv \frac{Ea}{2Gx} \equiv \tfrac{1}{2}E\sqrt{\frac{a}{RG}}.$$

4. Die Gleichung (4.) zeigt, dafs in dem Falle des fraglichen Maximums die ***Anzahl der Ketten zu der Anzahl der Elemente sich verhält, wie der Widerstand in jedem Elemente zu dem Widerstande in dem Leitungsdrathe.*** Wenn also dieser letzte Widerstand (der Widerstand aufserhalb der Kette) zunimmt, so wächst die Anzahl der Elemente gegen die Anzahl der Ketten.

Nach dem letzten Ausdrucke (6.) ist, in dem Falle des Maximums, die Stromstärke,

1°. ***Proportional der electromotorischen Kraft,***

2°. ***Proportional der Quadratwurzel aus der Anzahl der Elemente,***

3°. *Umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Widerstande in jedem einzelnen Elemente und*

4°. *Umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Widerstande des Leitungsdrathes.*

Man sieht aus dem Vorstehenden, dafs die Vermehrung der electromotorischen Kraft am meisten zur Verstärkung des Stromes beiträgt; so dafs zum Beispiel, wenn eine Kraft sich fände, die zweimal, dreimal gröfser wäre, als die gewöhnliche, 60 Elemente so stark wirken würden, als jetzt bezüglich 240 und 540. Es ist ferner ersichtlich, dafs die Stromstärke im Maximum unverändert bleibt, wenn die Anzahl der Elemente in demselben Verhältnisse wächst, wie entweder der Widerstand in jedem Elemente, oder der Widerstand im Leitungsdrathe zunimmt.

5. Es ist nicht zu übersehen, dafs der obige Ausdruck im Allgemeinen nur ein ideales Maximum giebt, indem die Natur der Sache es mit sich bringt, dafs x und y ganze Zahlen und überdies Factoren von a sein müssen. Bei manchen Fragen läfst sich indessen G so bestimmen, dafs diese Voraussetzung Statt findet. Es sei zum Beispiel die Menge des zu verwendenden Draths gegeben, etwa 600 Fufs des Normaldraths, dessen Querschnitt gleich Eins ist, so dafs, wenn man diesen Drath unmittelbar zur Schliefsung anwendet, $G = 600$ ist. Giebt man dem Schliefsungsdrathe einen $z$mal kleinern Querschnitt, und nimmt ihn also $z$mal länger, so wird, nach dem *Ohm*schen Gesetze, der Widerstand z^2mal gröfser, und es ist dann in die Formeln $z^2 G$ statt G zu setzen. Dies giebt

$$7. \qquad y = z\sqrt{\left(\frac{G}{R}\cdot a\right)} \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{z}\sqrt{\left(\frac{R}{G}\cdot a\right)},$$

und wenn man die Stromstärke durch J bezeichnet:

$$8. \qquad J = \frac{1}{2z}\cdot E\sqrt{\frac{a}{RG}}.$$

Der Coëfficient z läfst sich so bestimmen, dafs x und y nach einander die verschiedenen Factoren von a werden. Es sei z. B.

$$a = 24 \quad \text{und} \quad R = 100,$$

die Länge des Schliefsungsdrathes zG gleich g, und E gleich Eins. Dann ergiebt sich für die acht verschiedenen Zusammenstellungen der gegebenen 24 Elemente:

$$x = 1, \quad y = 24, \quad z = 2, \quad g = 1200, \quad J = \frac{1}{200},$$

$$x = 2, \quad y = 12, \quad z = 1, \quad g = 600, \quad J = \frac{1}{100},$$

$$x = 3, \quad y = 8, \quad z = \tfrac{2}{3}, \quad g = 400, \quad J = \frac{1}{66\frac{2}{3}},$$
$$x = 4, \quad y = 6, \quad z = \tfrac{1}{2}, \quad g = 300, \quad J = \frac{1}{50},$$
$$x = 6, \quad y = 4, \quad z = \tfrac{1}{3}, \quad g = 200, \quad J = \frac{1}{33\frac{1}{3}},$$
$$x = 8, \quad y = 3, \quad z = \tfrac{1}{4}, \quad g = 150, \quad J = \frac{1}{25},$$
$$x = 12, \quad y = 2, \quad z = \tfrac{1}{6}, \quad g = 100, \quad J = \frac{1}{16\frac{2}{3}},$$
$$x = 24, \quad y = 1, \quad z = \tfrac{1}{12}, \quad g = 50, \quad J = \frac{1}{8\frac{1}{3}}.$$

6. Die Gleichung (8.) drückt das Gesetz aus: dafs sich, für das Maximum der Stromstärke, diese bei einem gegebenen Gewichte des Schliefsungsdraths umgekehrt wie die Länge desselben verhält. Zertheilt man hiernach in Gedanken den ursprünglichen Schliefsungsdrath in z einzelne Dräthe von gleicher Dicke, und stellt sich den Strom, einmal durch den ursprünglichen Drath, dann nach einander durch jeden der z einzelnen Dräthe gehend vor, so ist in beiden Fällen die Maximum-Wirkung *dieselbe.* Dieses würde also in dem Falle des Multiplicators, sei es, dafs er eine Magnetnadel abwirft, oder dafs er, wie in der *Stöhrer*schen Maschine, eine Eisenmasse magnetisch macht und zum Rotiren bringt, dann Statt finden, wenn eine Windung des ursprünglichen Draths denselben Raum einnähme, wie z Windungen des $z$mal dünnern Draths. Unter derselben Voraussetzung würde dies auch dann Statt finden, wenn man, um einen Electromagnet herzustellen, einen Eisenkern mit Kupferdrath umwickelt. In dem Beispiele der vorigen Nummer haben wir acht Maximum-Wirkungen, die der Voraussetzung entsprechen, dafs man der gegebenen Drathmasse nach einander 50, 100, .. 1200 Fufs Länge giebt. Nehmen wir, um die Ideen zu fixiren, ferner an, dafs 50 F. Drath um den Eisenkern (der in seiner ganzen Länge, oder auch nur streckenweise umwickelt werden mag) eine Lage bilden, so erhalten wir (indem wir die obige Voraussetzung festhalten) in den acht verschiedenen Fällen dieser Lagen bezüglich 1, 2, .. 24, und der in dem Eisenkern hervorgerufene Magnetismus wird überall derselbe sein. Aber die Voraussetzung weicht immer, namentlich bei der nothwendigen Umspinnung des Draths, merklich und in manchen Fällen sehr weit von der Wirklichkeit ab. ***In dieser Abweichung liegt der Grund des Vorzuges eines dickern Draths.***

7. Wenn die Länge des Draths gegeben ist, so erreicht man im Allgemeinen das ideale Maximum nicht, kann dann aber, wenn man den Widerstand in

einem Elemente kennt, berechnen, wie weit man hinter jenem zurückbleibt, und dies mit in Anschlag bringen. Hätte in dem betrachteten Falle der Drath die gegebene Länge von 900 F., wäre also der entsprechende Widerstand 1350 F., so fände sich

$$y = 18, \qquad x = 1\tfrac{1}{3}, \qquad J = \frac{1}{150}.$$

Es bleibt aber hier nur die Alternative, die gegebenen 24 Elemente zu zwei Ketten zu verbinden, oder dieselben als eine einzige Kette wirken zu lassen. In beiden Voraussetzungen erhalten wir, wenn wir die Intensitäten nach der Formel (1.) berechnen:

$$y = 12, \qquad x = 2, \qquad J = \frac{1}{165},$$

$$y = 24, \qquad x = 1, \qquad J = \frac{1}{156\frac{1}{4}}.$$

Die letztgenannte Verbindung ist also in diesem Falle die vortheilhafteste und man bleibt dann nur um $\frac{1}{24}$ hinter jenem Maximum zurück.

Wir wollen als zweites Beispiel

$$a = 60, \qquad R = 100, \qquad G = g = 800 \text{ Fufs}$$

setzen. Dann ergiebt sich für das ideale Maximum:

$$y = 21{,}9, \qquad x = 2{,}7, \qquad J = \frac{1}{73{,}03}.$$

Verbindet man, um diesem Maximum möglichst nahe zu kommen, die 60 gegebenen Elemente einmal zu drei, das anderemal zu zwei Ketten, so findet sich

$$y = 20, \qquad x = 3, \qquad J = \frac{1}{73{,}33},$$

$$y = 30, \qquad x = 2, \qquad J = \frac{1}{76{,}66}.$$

Bei der ersten Verbindungs-Art bleiben wir also nur um $\frac{1}{220}$ hinter dem Maximum zurück. Es ergeben sich in diesem Beispiele zwölf verschiedene Drathlängen, welchen wirkliche Maxima entsprechen; diese liegen zwischen 37 F. und 2192 F., dem entsprechend, dafs alle Tröge als ein einziges Element oder als eine einzige Kette wirken.

Ist nur ein einziges Element vorhanden, so ist $x = y = a = 1$, und die in Rede stehende Maximum-Wirkung fordert alsdann, dafs R, der Widerstand in diesem Elemente, dem Widerstande in dem Leitungsdrathe gleich sei. Ist dies nicht der Fall, so bleibt man hinter dem idealen Maximum zurück;

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

und zwar verhalten sich dann die Quadrate dieses Maximums und der wirklichen Stromstärke wie

$$4RG:(R+G)^2 \equiv 1:1-\tfrac{1}{4}(R-G)^2.$$

8. Geht man von einem wirklichen Maximum aus, so gelangt man wieder zu einem solchen Maximum, wenn man y unverändert läfst und einerseits x mit λx, folglich auch a mit λa, und andrerseits R mit λR vertauscht. In dieser neuen Maximum-Wirkung bleibt (bei gleichem Widerstande aufserhalb der Kette) die Stromstärke unverändert dieselbe. Wenn man also von irgend einer Maximum-Wirkung ausgeht, so erhält man eine zweite *gleiche* Wirkung, wenn man die Anzahl der Ketten beliebig vermehrt oder vermindert, und in demselben Verhältnisse die wirksame Metall-Oberfläche der einzelnen Elemente verkleinert oder vergröfsert. Es folgt daraus, dafs bei der Maximum-Wirkung ***dieselbe wirksame Metall-Oberfläche immer dieselbe Stromstärke giebt.***

Man kann in dem Vorstehenden auch $y=1$ setzen; statt der Ketten also auch einzelne Elemente nehmen.

Bonn, im März 1847.

7.

Sur la Réflexion de la Lumière, dans le cas des surfaces du second degré, analogue à celle qui aux foyers des sections coniques a donné le nom.

(Par Mr. *Plücker,* prof. de math. à l'université de Bonn.)

1. On sait que, pour l'ellipsoïde et les deux hyperboloïdes, il existe trois coniques: une ellipse, une hyperbole et une courbe imaginaire, situées dans les trois plans principaux, qui, par rapport à ces surfaces, jouissent de propriétés analogues à celles des deux systèmes de foyers, réelles et imaginaires, d'une courbe du même degré. M. *Chasles* a donné le nom très propre de *focales* à ces courbes. Pour les deux paraboloïdes, ces trois courbes se trouvent remplacées par deux paraboles, et enfin pour les cônes et les cylindres. par deux lignes droites.

Parmi les propriétés nouvelles de ces courbes remarquables, démontrées par moi dans un ouvrage qui a paru dans les premiers jours d'Août dern., la suivante me parait plus particulièrement digne d'attention; savoir:

Tous les rayons qui, en partant de points de l'une des deux focales réelles d'une surface quelconque du second degré, vont couper cette surface, sont réfléchis par elle de manière qu'ils se réunissent de nouveau sur la même focale, ou bien qu'ils se propagent, comme émanés directement de cette courbe.

J'ai tiré ce théorème, comme corollaire, du théorème suivant, que j'ai démontré analytiquement de la manière la plus simple:

Les trois axes d'un cone quelconque circonscrit à une surface du second degré, coïncident avec les trois axes de chacun des trois cônes qui, avec le cône circonscrit, ont un centre commun, et qui en outre passent par les trois focales. En construisant les trois surfaces confocales (l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à une nappe et l'hyperboloïde à deux nappes) qui passent par le centre commun, les trois axes en question sont les normales de ces trois surfaces confocales *).

*) System der analytischen Geometrie des Raumes. p. 334.

Dans le présent Mémoire, je vais donner des démonstrations nouvelles du premier théorème, démonstrations qui auront l'avantage d'en faciliter la discussion et de le lier à d'autres théorèmes connus.

2. Ménons par un point donné de la surface proposée du second degré un plan normal quelconque. Un rayon lumineux, situé dans ce plan et rencontrant la surface dans le point donné, ne sortira pas du plan après avoir été réfléchi par la surface. Si donc ce rayon est parti d'un point quelconque d'une focale, il sera réfléchi, suivant notre théorème, vers un autre point de la même courbe, en fesant des angles égaux avec la normale. Il suit de là que les deux rayons, incident et réfléchi, constituent avec la normale et la tangente de la surface comprise dans le même plan, ce qu'on a nommé un *faisceau harmonique.* Comme un tel faisceau, en rencontrant un plan quelconque, et en particulier le plan principal, contenant la focale, le coupe en quatre points harmoniques, il suit que la tangente et la normale vont couper le plan principal en question en deux points tels, que chacun d'eux soit situé sur la polaire de l'autre. Réciproquement, si cette dernière rélation a lieu, ce qu'on prouvera plus loin avec facilité, notre théorème en découle immédiatement.

3. Pour fixer les idées, prenons un ellipsoïde et son *ellipse focale,* située dans le plan du plus grand et du moyen axe de la surface. Les rayons émanés d'un point lumineux, placé dans un point quelconque de la focale, se réunissent de nouveau, pour former, après une première réflexion, une ligne lumineuse coïncidante avec la focale. Chaque réflexion nouvelle ramenera ce rayon de nouveau vers la même focale. L'apparition sera (généralement parlant) la même, mais plus intense si, au lieu d'un seul de ses points, la focale entière devient lumineuse. Il s'agit maintenant de savoir de quelle manière la lumière se distribue sur la focale, et en particulier, quels sont les différents points de la surface, qui renvoient la lumière émanée d'un point donné de la focale vers un autre point donné de la même courbe. La dernière question revient, suivant notre théorème, à mener par les deux points donnés que nous désignerons par M et M', une ligne droite, et par cette ligne droite un plan, qu'on fait tourner autour d'elle, et de chercher tous les points de la surface, où les normales coïncident avec le plan tournant, dans l'une quelconque de ses positions. Pour résoudre cette question nous nous serviront des procédés ordinaires de la géométrie analytique.

4. Soit

$$1. \quad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

l'équation de la surface; sa focale située dans le plan x, y sera réprésentée par l'équation

$$2. \quad \frac{x^2}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{y^2}{\beta^2-\gamma^2}=1.$$

Prenons pour équations de la normale dans un point quelconque (x', y', z') de la surface, les suivantes:

$$3. \quad x=kz+\varkappa, \quad y=lz+\lambda,$$

en posant, pour abréger:

$$k=\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\cdot\frac{x'}{z'}, \quad l=\frac{\gamma^2}{\beta^2}\cdot\frac{y'}{z'},$$

$$\varkappa=x'-kz'=\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2}\cdot x', \quad \lambda=y'-lz'=\frac{\beta^2-\gamma^2}{\beta^2}\cdot y'.$$

Les coordonnées du point, où la normale (3.) rencontre le plan x, y sont

$$x=\varkappa, \quad y=\lambda;$$

donc nous obtenons pour sa polaire, prise par rapport à la focale, l'équation

$$\frac{\varkappa x}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{\lambda y}{\beta^2-\gamma^2}=1,$$

ou bien, en substituant, celle-ci:

$$\frac{x'x}{\alpha^2}+\frac{y'y}{\beta^2}=1.$$

Cela est évidemment l'équation de la trace sur le plan x, y, du plan tangent à la surface au point (x', y', z'). Il suit delà d'abord le théorème connu, que, si par un point donné de la surface on mène le plan tangent et la normale, qui coupent un plan principal quelconque dans une droite et un point (N), ce point sera le pôle de la droite, par rapport à la focale comprise dans le même plan. De la résulte que ce point N est situé sur la polaire d'un point quelconque de la droite en question, c'est-à-dire du point d'intersection d'une tangente quelconque, passant par le point (x', y', z'), avec le plan principal. C'est ce qu'il fallait prouver pour compléter la démonstration du numéro (2.).

5. J'ai donné le théorème que je viens de démontrer dans le numéro précédent, page 332 de mon Système de géométrie analytique à trois dimensions. En parcourant le Journal de M. *Liouville*, je trouve qu'il appartient à M. *Chasles* qui l'a transcrit de son Aperçu historique p. 384 et qui en a tiré le théorème suivant:

„Si par les différents points d'une section plane quelconque d'une sur„face du second degré, on mène les normales à la surface, leurs pieds sur „chacun des plans principaux de la surface seront situés dans une section co„nique. Le cône circonscrit à la surface, suivant la section plane, rencon„trera le plan principal suivant une autre conique; et si l'on conçoit la focale „de la surface comprise dans ce plan, la première conique, lieu des pieds des „normales, sera la polaire de cette seconde conique par rapport à la focale." *)

Le théorème peut être généralisé de deux manières. D'abord on voit qu'une courbe quelconque tracée sur la surface, peut être substituée à la section plane. Puis, il est évident que les développements analytiques du numéro précédent subsistent également si, au lieu de supposer le point (x', y', z') sur la surface même, on le prend arbitrairement dans l'espace. C'est seulement l'interpretation géométrique qui est changée, en se généralisant. Le plan tangent est remplacé par le plan polaire du point donné, pris par rapport à la surface, et la normale par la perpendiculaire, abaissée du même point sur ce plan polaire.

Si l'on circonscrit à une surface du second degré un cône quelconque, le plan mené par la courbe de contact, et la perpendiculaire abaissée du centre du cône sur ce plan, vont rencontrer un plan principal de la surface dans une ligne droite et un point; ce point sera le pôle de la ligne droite, par rapport à la focale située dans le même plan principal.

On pourrait tirer de ce théorème le théorème plus général du numéro (1.) de manière comme nous avons tiré de celui notre théorème sur la réflexion. Au même théorème se joignent une foule de théorèmes, soit nouveaux, soit déjà énoncés par d'autres ou par moi.

6. Révenons sur nos considérations analytiques, et soit, en désignant par μ un coëfficient constant quelconque,

$$4. \quad \mu z + Ax + By + C = 0,$$

l'équation d'un plan, tournant autour d'une ligne fixe, située dans le plan x, y et réprésentée par les équations

$$5. \quad z = 0, \quad Ax + By + C = 0.$$

Soit cette ligne fixe celle, qui passe par les deux points, pris arbitrairement sur la focale, et désignés plus haut par M et M'. Pour la condition que la

*) Théorèmes sur les surfaces du second degré. Par M. *Chasles. Liouville,* Journ. VIII. p. 215.

normale (3.) soit comprise toute entière dans ce plan, nous obtenons les deux équations

$$Ak+Bl+\mu=0, \qquad A\varkappa+B\lambda+C=0.$$

La dernière de ces deux équations est indépendante de μ, et par conséquent de la position particulière du plan tournant. En y mettant pour $\varkappa$ et λ leurs veleurs, nous aurons

$$6. \qquad A\cdot\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2}\cdot x'+B\cdot\frac{\beta^2-\gamma^2}{\beta^2}\cdot y'+C=0.$$

Si donc on prend x' et y' pour variables, cette équation réprésentera un plan perpendiculaire au plan principal et qui coupe la surface suivant une courbe, qui est le lieu géométrique des points qui réflechissent les rayons lumineux, émanés de l'un des deux points M et M', vers l'autre de ces points. Il résulte sur le champ de ce que nous venons de prouver que suivant la courbe d'intersection dans ce plan, la surface donnée est touchée par une surface de revolution, ayant M et M' pour foyers.

Étant parti du premier théorème du numéro (1.) nous sommes donc parvenu au théorème suivant:

Deux points, pris arbitrairement sur une focale d'une surface du second degré, sont les deux foyers d'une surface de revolution, circonscrite à la surface proposée.

Réciproquement, pour parvenir à notre théorème de réflexion focale, il suffit de démontrer directement ce dernier théorème. C'est ce que j'ai fait de la manière la plus simple *).

7. Pour construire l'équation (6.), nous observerons d'abord que les coordonnées du pôle de la ligne droite (5.) (qui passe par les deux points M et M', situés sur la focale) sont par rapport à la focale (2.):

$$x=-\frac{A}{C}(\alpha^2-\gamma^2), \qquad y=-\frac{B}{C}(\beta^2-\gamma^2);$$

et de là on obtient l'équation (6.) à construire, pour le plan polaire du point ainsi déterminé, pris par rapport à la surface proposée.

Supposons toujours que la surface soit un ellipsoïde, dont l'ellipse extérieure de la figure est une section principale et l'ellipse intérieure l'ellipse focale. Sur cette dernière courbe nous prendrons arbitrairement deux points M et M' (Tab. III. cah. 4. tome 34. fig. 8.): il s'agit de déterminer les points de la surface,

*) System der analytischen Geometrie des Raumes. p. 295.

qui réfléchissent les rayons, émanés de M, vers M'. Pour cela construisons par rapport à la focale le pôle P de la ligne droite MM', et ensuite, par rapport à la section principale, la polaire SS' du point P; enfin menons par SS' le plan perpendiculaire au plan principal. Tous les points de la courbe d'intersection de la surface et de ce plan réfléchiront les rayons lumineux, émanés de M, vers M'.

Si le point M' décrit la focale de manière que MM' tourne autour du point M, le point P parcourra la tangente de la focale en M, et en même temps le plan coupant tournera autour d'une ligne droite fixe, perpendiculaire au plan principal et coupant ce plan dans le point Q, pôle de la tangente en M par rapport à la section principale. Pour qu'il y ait effectivement réflexion il faut que le plan de la section perpendiculaire coupe la surface dans une courbe réelle; il faut donc que le point P soit extérieur à la section principale. Si le point P coïncide successivement avec les deux points L et K, où la tangente en N coupe la surface principale, les courbes réfléchissantes correspondantes se réduiront à ces points mêmes renverront le rayon incidant respectivement vers les deux points N et R. Ces deux points s'obtiennent facilement, parcequ'ils sont les points de contact sur les deux tangentes nouvelles LN et KR qu'on peut mener à la focale par les deux points L et K.

Les points N et R sont les deux points limites de la partie éclairée NM'R de la focale par les rayons émanés du point M.

8. Si au lieu de l'ellipse focale on suppose l'hyperbole focale, perçant l'ellipsoïde dans ses ombilics, il faut distinguer les deux cas, où les rayons frappent, soit la partie concave, soit la partie convexe de la surface. Ici se présente comme cas particulière celui ou les rayons émanent d'un ombilic, et celui où les rayons incidents sont parallèles à une des deux asymptotes de la focale, en formant un cylindre droit à base circulaire.

Je n'enterai pas dans ce détail et je ne discuterai pas non plus le cas des autres surfaces du second degré; cette discussion ne présente aucune difficulté.

Bonn, au mois de Mars 1847.

8.

Leonardi Euleri Commentatio de Matheseos sublimioris utilitate

ex autographo edidit *G. Friedlaenderus.*

Berolini MDCCCXLVII.

Leonardi Euleri ea, quam nunc publici juris facturus sum commentatio, quantum comperire mihi licuit, nondum in lucem prodiit, immo ne cognita quidem cuiquam videtur: quippe cujus neque ***Nicolaus Fuſsius*** meminerit in Eulerianorum operum indice [1]), quem immortalis viri elogio adjecit, neque junior ille ***P. H. Fuſsius,*** qui eum indicem et examinavit et auxit. Jam vero priusquam hic vir doctissimus ex uberrimis Petropolitanae academiae thesauris [2]) promissum [3]) selectarum ***Friderici Magni*** et ***Euleri*** epistolarum librum ediderit, propter rei gravitatem etiam hanc dissertationem, cujus autographum in patris collectione asservatur, seorsim publicatam lectoribus gratam fore judicavi, praesertim si causam, qua ductus ***Eulerus*** eum commentariolum conscripsit, ex adjecto ***Meriani*** [4]) libello comperissent, quem ille anno 1792 coram doctis Berolinensis academiae sodalibus recitavit. ***Eulerus*** enim, cum primum Berolini (anno 1741) consedit, ***Jordani*** auctoritate motus constituit, aliquam scriptionem componere, unde Rex de matheseos sublimioris utilitate edoceretur, eumque in usum hasce schedulas conscripsit. Quae utrum ab ***Jordano*** in gallicum sermonem versae, an de latine scripto ab eodem coram Rege recitatae fuerint hodie, nequit dijudicari.

---

[1]) Lobrede auf Herrn ***Leonhard Euler.*** Basel. 1786.

[2]) Non multo ex tempore Bibliotheca regia Berolinensis donatam ab heredibus *Formeyanis* collectionem epistolarum possidet, quas ***Jo. Alb. Eulerus*** ad patrem Petropoli dedit, inde ab anno 1761 ad 1790 pertinentes.

[3]) Correspondance mathématique et physique de quelques celèbres géomètres du 18me siècle. Pétersb. 1843. 8. p. 35.

[4]) *Ancillon.* Eloge de ***Merian.*** p. 61.

(Manu v. d. *Meriani* scriptum.)

Lu le 15 Novbr. 1792.

J'ai trouvé, dans les papiers délaissés par feu Mr. ***Jordan,*** père de ma femme, ce petit Mémoire du grand ***Euler,*** écrit de sa propre main, que je vais avoir l'honneur de vous lire.

Aussitôt qu'il frappa mes regards, je me rappelai parfaitement le but dans lequel il fut composé, comme j'en tenois le récit de la bouche même de Mr. ***Euler,*** et comme j'ai eu depuis plus d'une occassion de le vérifier.

Quand Fréderic II., encore jeune prince, commença ses études de Géométrie, son esprit précoce et ardent voulut anticiper sur tout: ayant parcouru d'un oeil fugitif les différentes parties des Mathématiques, il désira de savoir l'application et l'usage de chacune de ces parties, mais surtout celui de la Géométrie transcendante. Sa curiosité infatigable fatigua ses maîtres. L'un d'eux, soit que lui-même n'en sût pas plus loin, soit pour se débarrasser des importunités du jeune questionneur, s'attacha à lui persuader que le calcul infinitésimal n'étoit qu'une affaire de pure ostentation sans utilité réelle, que la méthode ordinaire suffisoit à tout, et que celle des infinement petits n'aboutissoit qu'à des subtilités infiniment vaines et stériles.

Cependant malgré le soin que l'on avait pris de le nourrir de ce préjugé, son esprit étoit trop pénétrant pour y acquiescer sans réserve, et ne pas se douter qu'on pouvoit l'avoir induit en erreur. Pour se détromper entièrement, il eut fallu sans doute qu'il se familiarisât un peu avec ce nouveau calcul, ou que du moins il en acquit les notions les plus essentielles; mais il ne tarda point à avoir bien d'autres choses à calculer.

Ce qui fait voir évidemment combien ce préjugé influoit peu dans sa conduite, c'est qu'à peine monté sur le trône, il fit tout son possible pour attirer chez lui les premiers géomètres de l'Europe, et récompensa royalement ces mêmes travaux qu'on lui avoit dépeints comme étant si inutiles et si frivoles. Il n'eût pas tenu à lui que toute la famille des ***Bernoulli,*** le père et les deux fils ne se transplantassent dans notre capitale, où il les appela sous les conditions les plus honorables et les plus lucratives. Mr. ***Euler*** s'y rendit de Pétersbourg et fut succédé depuis par Mr. ***de la Grange.*** Mr. ***de Maupertuis*** a longtemps présidé à cette Académie.

Tout cela n'empêcha pourtant pas le Roi d'entretenir des doutes au sujet de la Géométrie sublime. Dès le commencement de son règne, c'étoit

encore la matière la plus fréquente de ses conversations avec les savants qui l'entouroient, et dans le commerce desquels il se délassait des soins du gouvernement. Ce fut alors que Mr. ***Jordan*** s'adressa à ***Euler*** nouvellement arrivé, pour lui demander un court exposé des principaux avantages qui résultoient pour les sciences de l'analyse des infinis, afin de pouvoir s'en servir dans l'occasion. Personne n'étoit plus propre pour cette tâche que Mr. ***Euler***. Il savait répandre la plus grande clarté sur les matières les plus abstruses et descendre des plus hautes régions de la Géométrie jusqu'à la portée la plus commune. C'est ce qu'on voit dans ses lettres françoises à une princesse d'Allemagne, et c'est ce que l'on retrouvera dans ce Mémoire latin.

Au reste, je ne sais quel emploi Mr. ***Jordan*** a fait de ce Mémoire, s'il l'a traduit en françois pour le mettre sous les yeux du Roi, ou bien s'il s'est borné à lui en rapporter le contenu.

Mais ce qui prouve combien il importe de donner de bonne heure à la jeunesse, et surtout aux jeunes princes, des idées justes de toute chose, ou du moins de ne leur en jamais donner de fausses, c'est que le roi Fréderic a été toute sa vie flottant et incertain au sujet du calcul infinitésimal, et que cette fluctuation paroissoit l'embarrasser et quelquefois véritablement l'inquiéter.

Je parle ici d'après ma propre expérience. La première fois que je parus devant ce grand prince, il me fit sur ce sujet des questions, en m'enjoignant de lui dire en conscience ce que j'en pensois. Je répondis avec la modestie qui me convenoit, que j'avais malheureusement trop négligé mes études mathématiques, après avoir eu le bonheur d'en poser les fondements dans ma patrie sous les ***Bernoulli***, que cependant je croyois en avoir assez retenu pour pouvoir assurer à Sa Majesté que le calcul infinitésimal étoit une des plus belles et des plus sublimes découvertes de l'esprit humain, qu'il avoit fait faire des pas de géant à la Géométrie tant pure que mixte ou appliquée à la physique, que par son moyen on étoit parvenu à resoudre des problèmes absolument inaccessibles à l'Arithmétique et à l'Algèbre communes, et qu'il facilitoit la solution d'une infinité d'autres, qui selon l'ancienne méthode exigeroient les plus longues et les plus pénibles opérations. Pour le rendre plus sensible, je citois, le mieux que je pouvois, quelques exemples, entr'autre le mouvement accéléré ou retardé des planètes et des comètes autour du soleil. Enfin, me servant d'un argument populaire, je le priai de vouloir bien considérer que, si ce calcul n'étoit pas un objet de la plus haute importance, il seroit inconcevable, que les plus grands hommes, les ***Newton***, les ***Leibnitz***, les

Bernoulli s'en fussent occupés avant tant de zèle, et se fussent disputé l'honneur de son invention avec tant de chaleur et d'animosité, ni que leurs plus illustres successeurs, les ***Euler***, les ***Clairaut***, les ***Dalembert*** consacrassent leurs veilles et leur vie entière à le perfectionner, et à en reculer les bornes. Quoique le Roi parut assez satisfait de cet éclaircissement, il y revenoit sans cesse et fit encore en ma présence les mêmes questions à Mr. ***de la Grange***, lequel y fit à peu près les mêmes réponses, quoique beaucoup mieux motivées et exprimées.

Mais voyons plutôt ce que Mr. ***Euler*** y avait répondu longtemps auparavant.

De Matheseos Sublimioris utilitate.

Quanquam nunc quidem summa matheseos utilitas a nemine in dubium vocari solet propterea quod variae disciplinae et artes in vita communi necessariae sine ejus cognitione tractari nequeunt, haec tamen laus a plerisque inferioribus tantum istius scientiae partibus et tanquam elementis ita propria esse putatur ut eam partem, quae ob excellentiam sublimior vocari solet, omni usu atque utilitate carere arbitrentur. His scilicet qui ita sentiunt mathesis sublimior telae araneae similis videtur, quae ob nimiam subtilitatem omni utilitate destituatur. Cum autem universa mathesis in investigatione quantitatum incognitarum versetur, atque in hunc finem vel methodos et quasi vias ad veritatem ducentes patefaciat, vel ipsas veritates maxime reconditas eruat atque in lucem protrahat, quorum altero vis ingenii acuitur, altero cognitio nostra amplificatur: in neutro certe nimium operae collocari potest. Cum enim veritas non solum ipsa per se sit laudabilis, sed etiam ob summum nexum, quo cunctae veritates inter se cohaerent, utilitate vacare nequeat, etiamsi non statim usus perspiciatur; objectio illa, qua mathesis sublimior nimis profunde in investigatione veritatis penetrare arguitur, in laudationem potius quam vituperium scientiae vertitur (abit). Neque vero in hac aliquanto nimis abscondita laude acquiescendum est, quin potius luculenter ostendi potest, analysi sublimiori non solum eandem utilitatem, quae vulgo in elementari mathesi agnoscitur, tribui oportere, sed etiam ejus usum multo latius patere. Tantum scilicet abest, ut nunc quidem mathesis ultra necessitatem sit exculta, ut potius insignis adhuc ejus perfectio desideretur, et hoc quidem pro iis ipsis

disciplinis, in quibus prima fere rudimenta vulgo sufficere videantur. In hac igitur dissertatione demonstrare constitui, eam utilitatem, quae communiter elementis mathematicis concedatur, in sublimiori mathesi non solum non cessare, sed etiam continuo crescere quo ulterius etiamnum ista scientia promoveatur, neque eam adhuc eousque esse excultam, quantum ejus usus maxime vulgaris plerumque postulet. Ad hoc luculenter ostendendum, eas disciplinas percurram, quarum utilitas atque adeo necessitas ab omnibus agnosci solet, cujusmodi sunt Mechanica, Hydrostatica, Astronomia, Artilleria, Navigatio, Physica et Physiologia, atque evidenter monstrabo, quo majorem utilitatem ab his disciplinis expectemus, eo sublimiorem analysin ad eas requiri, atque adeo, si quando fructus hinc percipiendus spem nostram fallat, causam in ipsa subtiliori mathesi plerumque esse positam, quod nondum satis sit exculta.

Hoc igitur primum de mechanica ostensurus, non eam mechanicae partem intellectam volo, quae in enodandis motibus complicatissimis iisque ad primas motus leges revocandis versatur: hanc enim sine subtilissima analysi tractari non posse, extra omnem dubitationem est positum. Quamvis enim haec mechanicae pars quasi sublimior sit utilissima, tamen eandem objectionem incurrere solet, a qua universam mathesin sublimiorem hic vindicare constitui. Loquar itaque hoc loco de ipsa mechanica in elementis tradi solita, quae ad usum communem omnis generis machinas suppeditat, atque ob hoc ipsum maximae utilitatis laude extolli solet. In hac mechanicae parte crassiore machinae tantum ratione status aequilibrii considerantur, atque vis seu potentia determinatur quae oneri per machinam sustinendo sit par, ipse autem oneris motus, qui tamen in praxi potissimum spectari debebat, omnino negligitur. Cum enim ostensum sit ab hujusmodi mechanicae scriptoribus, quanta vis in quaque machina requiratur ad onus in aequilibrio sustentandum: si onus moveri debeat, nil aliud praecipere solent, nisi ut vis major, quam aequilibrii status postulat, intendatur. Etsi vero tum oneris motus subsequitur, tamen ipsum motum, utrum futurus sit tardus an celer, minime determinant, neque ad circumstantias, quibus motus afficitur, respiciunt. Hinc fit, quod operariis practicis est notissimum, ut saepissime machinarum effectus spem, quam de iis conceperant, vehementer fallant, multoque minus praestent quam expectaverant. Quin etiam causa hujus defectus theoriae tribuitur atque idcirco machinae per theoriam inventae admodum suspectae haberi solent, antequam per praxin sint approbatae. Hanc igitur machinarum theoriam, quae in mechanica elementari traditur, summopere mancam esse ommes agnoscunt, simulque certiorem theoriam, quae a praxi minus

abludat, desiderant. At vero mechanica vulgaris hoc minime praestare valet; cum enim solis principiis staticis, quibus solum aequilibrium est propositum, innitatur, quam primum motus definiendus occurrit, aqua ipsi haeret, neque se ullo modo extricare potest. Ad theoriam ergo machinarum perficiendam omnino ipse motus, qui sublato aequilibrio oritur, definiri debet, in quo negotio praeter vim sollicitantem ad omnes causas extrinsecas motum impedientes, cujusmodi sunt frictio et resistentia aeris, imprimis spectari oportet. In subsidium ergo vocari debet mechanica subtilissima, quae in motibus maxime perplexis enodandis occupatur, hic autem sine analysi sublimiori atque calculo infinitorum ita nihil effici potest, ut omnia incrementa, quae adhuc accesserunt et quae omni utilitate carere videntur, vix sufficiant ad simplicissimarum machinarum motus explicandos. Ostendi hoc clarissime in dissertatione quadam, quam Petropoli *) de machinis simplicibus et compositis conscripsi, ubi motus et effectus, qui quovis casu producuntur, per analysin sublimiorem determinavi. Praeterea vero cum idem effectus propositus per plures imo innumerabiles machinas tam ejusdem quam diversi generis obtineri queat, ex his eam investigare docui, quae vel brevissimo tempore vel minimo virium dispendio optatum effectum producat, cujus problematis solutio, uti in vitam communem amplissimum usum transfundit, ita etiam maximam calculi atque analyseos infinitorum vim requirit. Pluribus adhuc aliis rationibus summa matheseos sublimioris utilitas, quam per mechanicam in vitam communem transfert, declarari posset, sed quae hic breviter commemoravi, abunde sufficere videntur ad id, quod mihi proposueram, evincendum, scilicet non solum mathesin sublimiorem maximam in mechanica habere utilitatem, sed etiam elementarem, cui vulgo omnis utilitatis laus adscribitur, sine ea fere nihil valere, et ubique claudicare.

Transeo itaque ad hydrostaticam, sub qua simul hydraulicam complector, unde quanta commoda in vitam communem promanaverint, nemo est qui ignorat. Verum si ad vulgarem hydrostaticam, qualis in elementis tradi et quae tanquam origo omnium illorum commodorum spectari solet, attentius respiciamus, multo magis ii, qui praxin exercent, conqueri solent, quam parum saepenumero successus theoriae respondeat. Neutiquam vero hae querelae ratione destituuntur, nam ea aquarum fluentium theoria, quae vulgo in scholis explicatur, maximam partem est erronea et a veritate plurimum abhorret, unde non mirum,

*) De machinarum tam simplicium quam compositarum usu maxime lucroso. (Comm. Petrop. X. 1747. p. 67.)

tam exiguum plerumque ejus cum experientia consensum deprehendi. Quo igitur felicius commodis publicis consulatur, in locum hujus theoriae falsae vera substitui debet, quae autem vires matheseos communis tam longe superat, ut sine analysis sublimioris adminiculo nihil prorsus in hoc negotio effici possit. Clarissime hoc perspicere licet ex celeb. ***Danielis Bernoullii*** *) libro excellentissimo quem de hydrodynamica publicavit, in quo primus veras leges, quas fluida in motu observant, detexit atque ad usum accommodavit. Tum vero etiam ejus Pater pro summo quo jam pridem inclaruit acumine ingenii easdem leges ex aliis principiis demonstravit, sicque veram theoriam aquarum fluentium corroboravit. Ex utriusque autem tractatione calculo infinitorum refertissima luculenter perspicitur, ignorantiae analyseos sublimioris potissimum esse tribuendum, quod tam sero ad veram theoriam hydraulicam pervenerimus, atque adeo insignis adhuc hujus scientiae amplificatio requiritur, antequam ista theoria ad summum perfectionis gradum, cum quo simul maxima utilitas sit conjuncta, evehatur.

Astronomiam unam ex utilissimis matheseos partibus esse ab omnibus facile conceditur, et cum ejus utilitas ex veritate atque consensu theoriae cum coelo pendeat, dubitari nequit, quin utilitas simul cum perfectione scientiae crescat. Antehac cum verum corporum coelestium eorumque motuum systema adhuc esset incognitum, arithmeticae et elementorum geometriae cognitio cum optica astronomo sufficere poterat. Postquam autem ***Keplerus*** veras leges motus corporum coelestium detexisset, ipse statim sentire coepit, mathesin elementarem astronomiae ulterius excolendae minime esse parem. ***Newtonus*** autem, qui id, quod ***Keplerus*** inchoaverat, mirifice perfecit, quantum apparatum matheseos sublimioris ad hoc negotium adhibuerit, nemini dubium esse potest, qui ejus incomparabile opus perlustraverit. Hinc novimus, planetas circa solem in ellipsibus circumferri, areasque temporibus proportionales abscindere, unde ad tabulas motuum planetarum construendas quadratura ellipseos opus est, quae certe mathesin elementarem superat. Multo magis autem alia utilissima et maxime necessaria problemata, quae ad ipsas planetarum orbitas ex observationibus determinandas pertinent, auxilium ab analysi sublimiori exigunt, atque imprimis sine his subsidiis vix quicquam circa cometarum vias explorari potest, quemadmodum et ego ostendi in miscell. Berol. volumine VII. **) Lunae theoriam

---

*) ***Dan. Bernoullii*** Hydrodynamica Strasb. 1738. 4.

) ***Eulerus:* Determinatio orbitae cometae a. 1742 observatae in Miscell. Berol. VII. p. 1.

autem quanquam ***Newtonus*** felicissime adumbravit ac firmissimis rationibus confirmavit, tamen eam ad optatum finem perducere non potuit. Requiruntur enim ad ejus perfectionem tot difficillimorum problematum mechanicorum solutiones, ad quas analysis infinitorum, quantumvis ea plerumque jam exculta videatur, minime sufficiens deprehenditur. Quod denique ad observationes attinet, eas ob refractionem corrigi debere notissimum est, ad tabulam autem refractionum condendam sola experientia non sufficit, sed requiritur theoria ex qua pro quavis altitudine apparente effectus refractionis definiri queat. Haec autem subtilissimos calculos ex analysi sublimiori omnino postulat, quemadmodum luculenter monstravit Celeb. ***Bouguer*** *) in dissertatione hac de re Parisiis edita. Ex his igitur conficitur, astronomiam non solum analysi infinitorum maxime indigere, sed etiam ipsam analysin nondum tantopere esse excultam, quantum usus astronomicus requirat.

Artilleria seu Pyrotechnia vulgo quoque partibus matheseos annumeratur, hocque nomine matheseos utilitas in bellicis disciplinis imprimis effertur. Praeter trivialia autem quaedam problemata geometrica, quibus ex diametris globorum projiciendorum eorum pondus et vice versa quaeritur, potissimum spectari solet via, quam globus ex tormento projectus describit, hincque regulas sibi formant secundum quas tormenta dirigi debeant ut globus datum locum feriat. Assumunt autem in hoc negotio mobile projectum parabolam describere, uti ***Galilaeus*** ostendit, quod autem, nisi motus in vacuo fiat, veritati non est consentaneum; fallunt igitur vehementer regulae et tabulae, quas ex hac hypothesi formaverunt, ipsis fatentibus artificibus, atque adeo errorem in theoriam conjiciunt, eam, nisi per praxin emendetur, nihil valere autumantes. Quamvis autem aer sit fluidum adeo subtile ut ab eo resistentia sensibilis oriri non posse videatur, tamen in motibus velocissimis, cujusmodi sunt globorum ex sclopetis et tormentis ejaculatorum, tanta aeris vis cernitur, ut via in aere descripta a parabola maxime abhorreat. Ad hunc ergo insignem errorem tollendum loco parabolae perperam ad hunc usum adhibitae induci debet vera illa linea curva, secundum quam mobilia in aere projecta moventur. In qua invenienda ***Newtonus*** multum desudasse videtur, neque tamen summa ejus in analysi sublimiori dexteritas ipsi ad hoc problema solvendum sufficiebat, honorem ergo hujus inventionis Celeb. ***Joh. Bernoullio*** **) reliquit, ex quo sufficienter apparet, quantopere in mathesi

---

*) Essai d'optique. Paris 1729. 8.

**) De motu corporum gravium pendulorum et projectilium. (Op. T. I. 515.)

sublimiori versatum esse oporteat eum, qui has pyrotechniae quaestiones adaequate resolvere voluerit. Deinde etiam haec pyrotechniae ars ob ignorationem principiorum, quibus innititur, nil minus adhuc quam nomen scientiae meruit; praeter ipsum enim corporum explosorum motum vis atque actio pulveris pyrii accensi, in qua cardo negotii versatur, nondum satis est explorata. Nuper demum sollertissimus Anglus ***Robins*** *) veram theoriam circa vim pulveris pyrii per profundissima ratiocinia elicuit, determinavit scilicet primo, quantam vim pulvis pyrius, statim ac ignem concipit, exerat et quanta celeritate globum ex tormento expellat, tum vero ipsum globi explosi motum accurate assignat. In quibus expediendis, etsi experimenta ipsum plurimum adjuverint, tamen nisi analysi sublimiori fuisset probe instructus, neque haec experimenta excogitare, neque quicquam ex iis concludere potuisset.

Circa navigationem brevior esse potero, vix enim quemquam fore arbitror, qui usum matheseos sublimioris in hoc negotio negare audeat. Si enim ad cursus navium qui per oceanum suscipiuntur attendamus, statim se offert linea loxodromica, cujus inventio certe mathesi elementari tribui nequit et per quam fere omnia problemata, quae circa cursum instituendum proponi solent, resolvuntur. Deinde vero universa hujus disciplinae theoria, qua fundamenta tam constructionis quam gubernationis navium continentur et evolvuntur, ita est ardua et profundissimam cum mechanicae tum hydrostaticae cognitionem requirit, ut sine analyseos sublimioris subsidio nihil prorsus praestari possit. Determinatio situs, quem navis in aqua occupat, ingentem calculum postulat, unde si figura et onerationis ratio definiri debeat, quo navis firmiter in suo situ perseveret, vim velorum sustineat atque subversioni reluctetur, ad abstrusissimos calculos est deveniendum. Postmodum quomodo navis sit dirigenda et vela disponenda ut propositus cursus maxime retineatur, etiamsi ventus obsistat, nisi analyseos sublimioris beneficio determinari nullo modo potest. Quae omnia evidentissime cognosci possunt ex Celeb. ***Bernoullii*** **) excellentissimo tractatu de manuaria nautica, egoque fusius exposui in binis libris, quos de scientia navali conscripsi, ita ut ex hac parte nullum prorsus dubium superesse possit.

Etiamsi physica, quae in cognoscendis omnium phaenomenorum, quae in mundo spectantur, causis occupatur, omni aperta utilitate careret, tamen ob

---

*) ***Robins:*** New principles of gunnery. London 1742. 8.

**) Essai d'une nouvelle théorie de la manoeuvre des vaisseaux. Basle 1714. 4.

summam objecti, circa quod versatur, dignitatem atque exellentiam a homine veritatis amante nullo modo negligi posset. Hinc igitur omnes eae disciplinae quae ad physicam uberius exolendam et perficiendam inserviunt ob hoc ipsum summopere utiles essent censendae. At vero physica non solum utilitate non caret, sed etiam uberrimos fructus in vitam communem importat, ex quo eo major matheseos utilitas erit censenda, si ostendero, sine ea in physica nihil omnino profici posse. Ac certe pleraque phaenomena, quae quidem explicare valemus, aeque ad mathesin atque ad physicam pertinent, cujusmodi sunt ea, quae per mechanicam, hydrostaticam, aerometriam, opticam et astronomiam explicantur. In omnibus autem phaenomenis, in quibus mutatio quaepiam spectatur, inprimis ad motum est respiciendum, unde is et quomodo efficiatur, quasnam variationes perpetiatur, et hujusmodi alia, quae plerumque profundissimam mechanicae cognitionem requirunt; quando autem natura fluiditatis se cuipiam phaenomeno immiscet, tum ex hydrodynamica multo accuratiori notitia est opus. Cum igitur in mundo omnes mutationes per motum efficiantur, perspicuum est, nisi mechanica seu motus scientia in subsidium vocetur, ne unicam quidem mutationem in mundo evenientem recte explicari posse. Casus autem, qui in natura videntur simplicissimi, si penitius (sic) inspiciantur et secundum leges mechanicas inquirantur, plerumque tantopere fiunt intricati, ut etiamsi analysis sublimioris usus concedatur, tamen enodatio perfecta ejus vires superet. Maxime hoc usu venit in physiologia, quae in explicandis motibus corporis animalis versatur: haec uti est pars physicae, ita phaenomena explicatu multo difficiliora occurrunt, ad quae praeter consummatam motuum tam solidorum quam fluidorum notitiam profundissima analyseos infinitorum cognitio requiritur. Quis enim his adminiculis destitutus audebit in motum sanguinis ex corde expulsi ejusque per arterias et venas promotionem inquirere? ante certe quam ista explicatio suscipiatur, multa eaque difficillima problemata resolvi debent, quibus aualysis sublimior, utcunque ea exculta videatur, vix adhuc accomodata judicari potest. Haec vero omnia luce meridiana fient clariora, si scripta eorum, qui phaenomena cum ad physicam tum ad physiologiam pertinentia rationali modo explicare sunt aggressi. ..... Inter haec solum ***Borellii*** *) librum de motu animalium nominasse sufficiat, ex quo fere ubique apparet, maximam analyseos vim requiri ad ea enucleanda, quae suscepisset, ob hunc enim defectum frequenter anxius haeret neque unde auxilium petat habet. Etiamsi enim pro eo tempore quo vixerat

*) *J. Alph. Borelli:* de motu animalium. Romae 1681. 2 Voll. 4.

esset matheseos peritissimus, tamen deinceps demum ea accesserunt incrementa, quae in hujusmodi investigationibus opem ferre queant.

His igitur instituto meo, quo summam analyseos sublimioris utilitatem declarare constitueram, abunde me satisfecisse arbitror. Quamvis enim pluribus aliis rationibus hoc idem uberius confirmari posset ostendendo, quantum vis ingenii per eam acuatur atque ad veritatem indagandam aptior reddatur, tamen quia contra has rationes ab osoribus matheseos multum excipi posset, in istis, quae attuli et quae nullo modo refelli possunt, acquiesco.

9.

Neue Theoreme der höheren Arithmetik.

(Von Herrn Dr. phil. *G. Eisenstein,* Privatdocent zu Berlin.)

Angeregt durch die gewichtigen Worte in No. 266. von *Gauſs* „Disquisitiones Arithmeticae," unternahm ich vor längerer Zeit eine ausführliche Untersuchung der quadratischen Formen mit mehreren Variabeln; die Früchte meiner Forschungen in diesem grofsen Felde zu publiciren bin ich bis jetzt theils durch andere Arbeiten, theils durch den Wunsch nach gröfserer Vereinfachung der Theorieen abgehalten worden. Ehe ich daher an die Herausgabe einer umfangreichen Abhandlung über diesen Gegenstand gehe, glaube ich den Freunden der Zahlentheorie vielleicht keinen unangenehmen Dienst zu erweisen, wenn ich ihnen einstweilen einige neue Sätze mittheile, welche sich hauptsächlich auf positive ternäre quadratische Formen beziehen.

Die Grundzüge zu einer Theorie der ternären Formen, welche später von *Seeber* in einem besondern Werke weiter verfolgt worden sind, finden sich in Disq. Arithm. in der zweiten Hälfte der fünften Section von No. 266. an. Es ist sehr wahrscheinlich, dafs *Gauſs* seine Untersuchungen viel weiter ausgeführt hat, als er am angeführten Orte sehen läfst; indessen führt er uns dort die ternären Formen nicht um ihrer selbst willen vor, sondern nur in einer Digression und als Hülfsmittel für die Theorie der binären Formen, um diese letztern durch jene näher zu beleuchten. — Die Nomenclatur, welcher sich *Seeber* in seinem Werke bedient, weicht in einigen Puncten von der *Gaufsischen* ab; ich werde hier bei derjenigen bleiben, welche *Gauſs* eingeführt hat. Hiernach ist eine ternäre quadratische Form oder schlechthin eine ternäre Form ein Ausdruck von folgender Gestalt:

$$ax^2+a'x'^2+a''x''^2+2bx'x''+2b'xx''+2b''xx' = f,$$

in welchem die Coëfficienten a, a', a'', b, b', b'' gegebene, die Gröfsen x, x', x'' unbestimmte oder variable ganze Zahlen vorstellen. Die Form

$$Ax^2+A'x'^2+A''x''^2+2Bx'x''+2B'xx''+2B''xx' = F,$$

in welcher

$$A = b^2-a'a'', \quad A' = b'^2-aa'', \quad A'' = b''^2-aa',$$
$$B = ab-b'b'', \quad B' = a'b'-bb'', \quad B'' = a''b''-bb'$$

ist, nennt *Gauſs* die zugeordnete Form der Form f. Die Determinante der Form f ist die Coëfficientenverbindung

$$ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b'' = D;$$

sie ist zugleich die negative Determinante des linearen Systems

$$\begin{pmatrix} a, & b'', & b' \\ b'', & a', & b \\ b', & b, & a'' \end{pmatrix},$$

welches ich das Formensystem der Form f nenne; das umgekehrte System des Formensystems mit der Determinante des letztern, d. h. mit $-D$, multiplicirt, liefert das Formensystem der zugeordneten Form; die Determinante der zugeordneten Form ist $= D^2$, und die zugeordnete von der zugeordneten $= Df$, d. h. sie geht aus f hervor, wenn man alle sechs Coëfficienten mit D multiplicirt. Wenn f durch eine lineare Substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{pmatrix} = S,$$

deren Coëfficienten ganze Zahlen und deren Determinante $= +1$ ist, in eine andere ternäre Form f' übergeht, wodurch zugleich der Rückweg von f' zu f durch das umgekehrte System des Systems S, welches ebenfalls ganze Coëfficienten hat, gegeben ist, so heifsen die beiden Formen f und f' *äquivalent*. Ihre zugeordneten Formen F und F' sind dann ebenfalls äquivalent und man erhält die Substitution von F in F', wenn man das System S umkehrt und dann transponirt, d. h. die Verticalreihen zu Horizontalreihen und die Horizontalreihen zu Verticalreihen macht. Äquivalente Formen haben dieselbe Determinante, denn das Formensystem von f' wird erhalten, wenn man das transponirte System des Systems S, das Formensystem von f und das System S selbst in der genannten Reihenfolge mit einander zu einem neuen Systeme zusammensetzt. Zu diesen algebraischen Beziehungen ist noch hinzuzufügen, dafs für äquivalente Formen derselbe gröfste gemeinschaftliche Theiler der Coëfficienten der Formensysteme Statt findet. Alle unter einander äquivalenten Formen werden jedesmal in eine Classe zusammengefafst; alle Formen einer Classe haben dieselbe Determinante; aber dieser Satz gilt nicht umgekehrt, sondern zu jeder Determinante gehört eine gewisse Anzahl Classen ternärer Formen, welche, wie *Gauſs* bewiesen hat, immer endlich ist. Dieses letztere Resultat gilt übrigens, um es beiläufig zu sagen, allgemein, und wenn man den Begriff des Formensystems, der Determinante und der Äquivalenz auf

Formen mit n Variabeln erweitert, so gehört für quadratische Formen mit n Variabeln zu jeder Determinante eine *endliche* Anzahl Classen.

Die Eintheilung der ternären Formen in bestimmte und unbestimmte und die der erstern in positive und negative ist nicht auf ganze Werthe der Coëfficienten und der Variabeln beschränkt. In der That läfst sich jede ternäre Form mit reellen Coëfficienten und reellen Variabeln durch eine lineare Substitution mit *reellen* Coëfficienten in eine Form transformiren, wie

$$\varepsilon\xi^2 + \varepsilon'\xi'^2 + \varepsilon''\xi''^2,$$

in welcher ε, ε', ε'' den Werth ± 1 haben. Sind nun ε, ε', ε'' alle $= +1$, so ist die Form, von welcher man ausging, eine positive; sind ε, ε', ε'' alle drei $= -1$, so ist sie eine negative; in den sechs übrigen Fällen ist sie eine unbestimmte Form. Diese Betrachtung gilt ebenfalls allgemein; nämlich jede quadratische Form mit n reellen Variabeln und reellen Coëfficienten kann durch eine reelle Substitution in ein Aggregat von n Quadraten transformirt werden, welche entweder durch $+$ oder durch $-$ verbunden sind; sind nun hier alle n Quadrate mit $+$ oder alle n mit $-$ behaftet, so ist die Form eine bestimmte, im ersten Fall eine positive, im zweiten eine negative; finden dagegen Zeichenwechsel Statt, so ist sie eine unbestimmte Form und man kann für letztere noch Unter-Abtheilungen nach der Anzahl der Zeichenwechsel machen; jede unbestimmte Form kann man übrigens auf diese Art in ein Aggregat von bestimmten Formen verwandeln, deren Anzahl bei ternären Formen immer $= 2$ ist. Durch Betrachtung der positiven Formen sind zugleich die negativen erledigt, welche aus jenen hervorgehen, wenn man alle Coëfficienten mit -1 multiplicirt. Characteristische Eigenschaften der positiven Formen sind (aufserdem dafs sie für alle reellen Werthe der Variabeln keine negativen Werthe annehmen können): dafs alle reellen Werthe der Variabeln, für welche eine positive Form einen und denselben Werth annimmt, zwischen ganz bestimmten Grenzen eingeschlossen sind, und dafs sie den Werth Null nur dann erhalten können, wenn sämmtliche Variabeln $= 0$ gesetzt werden.

Wenn man in das Substitutionssystem S für die Coëfficienten α, α' etc. alle möglichen ganzen Werthe successive einführt, welche die Determinante des Systems $= +1$ machen, und der Reihe nach alle daraus hervorgehenden Transformationen auf eine gegebene Form f anwendet, so wird man nicht stets lauter verschiedene Formen erhalten, sondern die Form f wird wiederkommen, und es werden überhaupt Formen wieder erscheinen, welche schon einmal da waren; man erhält durch diese Operation alle Formen der Classe K

der Form f, aber jede nicht einmal, sondern mehrmals; ja selbst unendlich oft. Wenn irgend eine dieser Formen nur eine ***endliche*** Anzahl mal erscheint, was bei positiven (negativen) Formen Statt findet, so erscheint jede andere Form derselben Classe eben so oft, nämlich so oft, als sich jede Form dieser Classe in sich selbst transformiren läfst; es sei δ mal. Nimmt man nun eine Form irgend einer andern Classe K' und wendet auf sie ebenfalls alle möglichen Substitutionen S an, so erhält man jede Form dieser Classe δ' mal, wenn δ' die Anzahl der Arten bezeichnet, auf welche sich jede Form der Classe K' in sich selbst oder in jede andere Form derselben Classe transformiren läfst. Die Substitutionen S sind für beide Classen dieselben, dagegen entspricht in der Classe K je δ Substitutionen ***nur eine einzige Form,*** während in der Classe K' je δ' Substitutionen ***nur eine Form*** entspricht. Obgleich daher jede Classe in der That unendlich viele Formen enthält, so kann man doch, wenn δ und δ' verschieden sind, nicht mit Recht sagen, dafs die Classe K ebenso viele Formen enthielte, als die Classe K'; im Gegentheil kann man behaupten, dafs die Formen-Anzahlen dieser beiden Classen im reciproken Verhältnifs der beiden Zahlen δ und δ' stehen und dafs der reciproke Werth von δ das wahre ***Maafs*** für die Totalität der Formen einer ***Classe,*** gewissermafsen für die ***Dichtigkeit*** der Classe sei. Man thut daher Unrecht, wenn man bei der Vergleichung oder Zusammenstellung mehrerer Classen, jede Classe als eine Einheit zählt, weil, um mich so auszudrücken, nicht jede Classe gleiche Berechtigung hat; man mufs vielmehr jede Classe nach ihrem ***Maafse*** $\frac{1}{\delta}$ zählen. Durch die Einführung dieses neuen Begriffs des ***Maafses*** der Classen, wird die ganze Theorie der ternären und die aller übrigen quadratischen Formen aufserordentlich vereinfacht und, wie ich zu glauben wage, verschönert, während ohne denselben kaum irgendwie vorwärts zu kommen wäre. Bei den binären Formen haben alle Classen ***dasselbe*** Maafs, gleiche Dichtigkeit; wenigstens gilt dies für alle Classen derselben Ordnung und mit wenigen Ausnahmen auch für die Vergleichung von Classen aus verschiedenen Ordnungen *); daher kommt es, dafs man bei den binären Formen die Maafse der Classen ganz vernachlässigen und jede Classe als Einheit zählen kann, denn der Begriff des Maafses ist nichts Absolutes, sondern hat nur relativen Sinn bei der Vergleichung der Classen unter einander, und man kann statt der Gröfse $\frac{1}{\delta}$ auch $\frac{c}{\delta}$

*) Diese Ausnahmefälle finden Statt, wenn die Determinante ein Quadrat, oder das Dreifache eines Quadrats ist. Vergl. Disq. Arithm. No. 179.

für das Maafs der Classen nehmen, wenn c eine Constante vorstellt, welche für alle Classen dieselbe bleibt.

Unter dem Maafse des Complexes mehrerer Classen verstehe ich die Summe der Maafse aller diesen Complex constituirenden Classen: z. B. unter dem Maafse aller Classen, welche zu derselben Determinante gehören, die Summe der Maafse aller dieser Classen; unter dem Maafse einer Ordnung, eines Genus, die Summe der Maafse aller Classen, welche diese Ordnung, resp. dieses Genus ausmachen. Das Hauptproblem, welches ich mir nun bei meinen Untersuchungen gestellt habe, ist, um es gleich von vorn herein zu sagen, die Erforschung des Maafses der Gesammtheit der Classen, welche zu einer Determinante gehören, und es ist mir gelungen, dieses Maafs für alle Determinanten durch allgemeine Formeln auszudrücken. Will man, was vielleicht manchem Leser bequemer erscheint, die Gröfse, welche ich bestimmt habe, unabhängig von dem neuen Begriffe des Maafses der Classen definiren, so mufs man sagen, sie werde erhalten, wenn man ein System nichtäquivalenter ternärer Formen f, f', f'', etc. für eine gegebene Determinante D aufstellt, zu jeder dieser Formen die Anzahl ihrer Transformationen $\delta, \delta', \delta'', \ldots$ in sich selbst berechnet und die Summe der reciproken Werthe dieser Anzahlen, also die Summe

$$\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'} + \frac{1}{\delta''} + \text{ etc.}$$

nimmt. Da es mir in dieser Notiz nicht auf Erschöpfung des Gegenstandes ankommt, so will ich annehmen, die Determinante sei *ungerade;* dadurch vermeide ich die Eintheilung der Formen in eigentliche und uneigentliche, welche nur für gerade Determinanten Statt findet. Ehe ich jedoch zu der Darstellung der Theoreme übergehe, welche den Hauptgegenstand dieser Note bilden, mufs ich zuvor die Zusammenfassung der zu derselben Determinante gehörigen Classen in Ordnungen vortragen.

Eintheilung in Ordnungen.

Das Princip, auf welchem die Eintheilung in Ordnungen bei den ternären Formen beruht, ist wesentlich verschieden von demjenigen bei den binären Formen. Wenn man nur solche Formen betrachtet, deren Coëfficienten keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, was wir von jetzt ab durchweg thun wollen, so fällt die Eintheilung in Ordnungen bei den binären Formen ganz weg, und es bleibt nur die Unterscheidung der eigentlichen Formen von den uneigentlichen (Disq. Arithm. No. 226, 227). Bei den ternären Formen bleibt

selbst dann noch, wenn man nur primitive Formen betrachtet, die Eintheilung in Ordnungen und beruht hier auf einem ganz neuen Eintheilungsgrunde. Wenn die Coëfficienten einer ternären Form f ohne gemeinschaftlichen Theiler angenommen werden, so können immer noch die Coëfficienten ihrer zugeordneten Form F einen gemeinschaftlichen Theiler haben, welcher auf keine Art entfernt werden kann; es sei Ω der gröfste (positive) gemeinschaftliche Theiler der Coëfficienten der Form F, so bleibt Ω für alle Formen f einer Classe derselbe, da ja die zugeordneten Formen äquivalenter Formen ebenfalls äquivalent sind und deshalb denselben gröfsten gemeinschaftlichen Theiler ihrer Coëfficienten haben; jeder Classe entspricht also ein ganz bestimmter Werth von Ω, den ich, um abzukürzen, den zugeordneten Factor dieser Classe nennen will; und man wird alle Classen, welchen derselbe Factor, d. h. derselbe gröfste gemeinschaftliche Theiler der Coëfficienten der zugeordneten Formen entspricht, in eine Ordnung zusammenfassen können, so dafs sich dann alle zu derselben Determinante D gehörigen Classen nach den verschiedenen Werthen, welche der zugeordnete Factor Ω erhalten kann, in eine Anzahl von Ordnungen zerlegen lassen. Sehen wir, welche Werthe dieser zugeordnete Factor für eine gegebene ungerade Determinante D annehmen kann. Da es sich hier nur um positive Formen handelt, so ist F negativ. Man setze $F = -\Omega\mathfrak{F}$, so wird $\mathfrak{F}$ eine positive und primitive Form. Die zugeordnete Form von $-\Omega\mathfrak{F}$ ist gleich dem Producte aus Ω^2 und der zugeordneten von $\mathfrak{F}$; andrerseits ist die zugeordnete von F gleich Df, und da f primitiv angenommen worden ist, so mufs Ω^2 in D aufgehen; Ω^2 mufs also quadratischer Theiler von D sein: wenn also D keine quadratischen Theiler hat, so existirt nur eine Ordnung, nämlich die Ordnung $\Omega = 1$. Es sei im Allgemeinen, da D negativ ist,

$$D = -\Omega^2\Delta:$$

dann ist offenbar die zugeordnete von $\mathfrak{F}$ gleich $-\Delta f$, deren Coëfficienten den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler Δ haben, und die Determinante von $\mathfrak{F}$ ist $-\Delta^2\Omega$, so dafs einerseits die Zahlen Ω und Δ, andrerseits die Formen f und $\mathfrak{F}$ in Reciprocität zu einander stehen. Die Wurzeln aller quadratischen Theiler von D können also Werthe von Ω sein; aber es folgt daraus noch nicht, dafs für alle diese Werthe von Ω wirklich Ordnungen existiren; die Wahrheit dieses Satzes, dafs jedem jener Werthe von Ω eine Ordnung entspricht, folgt erst daraus, dafs ich das Maafs für alle Ordnungen erforscht und dasselbe niemals gleich Null gefunden habe.

Wenn nun zunächst D ein Product aus lauter ungleichen Primzahlen und $= -\Delta$ ist, so existirt für eine solche Determinante nur eine einzige Ordnung und deren Maafs ist

$$= \frac{2\Delta - 1}{24} = \tfrac{1}{12}\Delta - \tfrac{1}{24}.$$

Man kann dies Resultat auch in folgender Art aussprechen:

„Wenn Δ ein positives Product aus lauter ungleichen Primfactoren ist, und man sucht für alle nichtäquivalenten positiven ternären Formen mit der Determinante $-\Delta$ die Anzahl ihrer Transformationen in sich selbst, so ist die zwölffache Summe der reciproken Werthe dieser Transformationszahlen, um $\frac{1}{2}$ vermehrt, gleich Δ, d. h. gleich der negativen Determinante."

Die Induction an einigen Beispielen wird dies deutlicher machen. Für die Determinante -1 giebt es nur die eine Form $x^2+y^2+z^2$, deren Transformationszahl 24 beträgt, und es ist $\frac{1}{24}\frac{2}{4} + \frac{1}{2} = 1$. Für die Determinante -3 existiren die beiden Formen $\binom{1,1,3}{0,0,0}$ und $\binom{1,2,2}{1,0,0}$ mit den Transformations-Anzahlen $\delta = 8$, $\delta' = 12$, und es ist in der That

$$12(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{12}) + \tfrac{1}{2} = 3;$$

während für die Determinante -5 die Transformations-Anzahlen 8 resp. 4 der beiden Formen $\binom{1,1,5}{0,0,0}$ und $\binom{1,2,3}{1,0,0}$, $12(\frac{1}{8}+\frac{1}{4})+\frac{1}{2} = 5$ ergeben. Zur Determinante -7 gehören drei Classen, welche durch die einfachsten Formen $\binom{1,1,7}{0,0,0}$, $\binom{1,2,4}{1,0,0}$, $\binom{2,2,3}{1,1,1}$ repräsentirt werden können; die erste läfst sich 8mal, die zweite 4mal, die dritte 6mal in sich selbst transformiren und es ist $12(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6})+\frac{1}{2} = 12\left(\frac{3+6+4}{24}\right)+\frac{1}{2} = 7$.

Im Allgemeinen habe ich aber zur Bestimmung des Maafses für alle Ordnungen folgendes Theorem gefunden, welches das obige als speciellen Fall einschliefst.

Theorem.

„Es sei $D = -\Omega^2\Delta$ irgend eine negative ungerade Determinante, aus welcher irgend ein quadratischer Theiler Ω^2 herausgezogen ist. Bezeichnet R den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler von Ω und Δ, und r, r', r'', etc. die verschiedenen Primfactoren von R, so ist das Maafs $\mathfrak{M}$ derjenigen Ordnung positiver ternärer Formen für die Determinante D,

welcher der Factor Ω zugeordnet ist,

$$= \tfrac{1}{12}\Omega\Delta\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\left(1-\frac{1}{r'^2}\right)\left(1-\frac{1}{r''^2}\right)\ldots,$$

wenn R kein Quadrat ist; ist dagegen R ein Quadrat, so gilt folgende Formel:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{24}(2\Omega\Delta - Q)\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\left(1-\frac{1}{r'^2}\right)\left(1-\frac{1}{r''^2}\right)\ldots,$$

wo Q das gröfste in $\Omega\Delta$ aufgehende Quadrat bedeutet."

Wenn Ω und Δ relative Primzahlen zu einander sind, so ist $R=1$ zu nehmen, und dann hat man $\mathfrak{M} = \frac{1}{24}(2\Omega\Delta - Q)$; denn $R=1$ ist ein Quadrat und es gilt also der zweite Fall.

Beispiel. Für die Determinante -9 existiren zwei Ordnungen, da 9 die beiden quadratischen Theiler 1 und 3^2 enthält. Die erste Ordnung, welcher der Factor 1 zugeordnet ist, d. h. für welche $\Omega=1$, $\Delta=9$ ist, enthält zwei Classen, welche durch die Formen

$$\binom{1,\,1,\,9}{0,\,0,\,0} \text{ und } \binom{1,\,2,\,5}{1,\,0,\,0}$$

repräsentirt werden können; ihre Transformations-Anzahlen sind 8 resp. 4 und ihre Maafse $\frac{1}{8}$ resp. $\frac{1}{4}$, also ist das Maafs dieser Ordnung $=\frac{3}{8}$. Um die Richtigkeit der Formel zu prüfen, hat man zu bedenken, dafs hier $R=1$ ist, also der zweite Fall des Theorems gilt, und dafs $Q=9$ ist, weil $\Omega\Delta=9$ das gröfste Quadrat 9 enthält; die Formel giebt demnach $\mathfrak{M} = \frac{1}{24}(2\cdot 9-9) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$; was mit der Beobachtung stimmt. — Die zweite Ordnung, welcher $\Omega=3$, $\Delta=1$ entspricht, enthält die beiden Formen

$$\underset{\delta=8}{\binom{1,\,3,\,3}{0,\,0,\,0}} \text{ und } \underset{\delta=12}{\binom{2,\,2,\,3}{0,\,0,\,1}};$$

ihr Maafs beträgt $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{5}{24}$. In Rücksicht auf die Formel gilt wieder der zweite Fall, weil $\Omega=3$ und $\Delta=1$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, also $R=1$ ist; ferner ist $Q=1$, da $\Omega\Delta=3$ keinen quadratischen Theiler hat, die Formel $\mathfrak{M} = \frac{1}{24}(2\Omega\Delta - Q)$ giebt also $\mathfrak{M} = \frac{1}{24}(2\cdot 3-1) = \frac{5}{24}$; wie erforderlich. Es ist mir leider nicht möglich ein Beispiel beizubringen, welches sich auf den ersten Fall des Theorems bezöge, in welchem R kein Quadrat ist, denn die Tabelle von *Seeber,* aus welcher die Formen entnommen sind *), obwohl sie bis 100 zu gehen scheint, geht doch in der That nur

*) Jedoch mit Übertragung auf die *Gaufsische* Bezeichnung.

bis zur Determinante -25; dies entspringt aus der abweichenden Definition, welche *Seeber* von einer Determinante gegeben hat; es wäre sehr zu wünschen, dafs ein geschickter Rechner es unternähme die *Seeber*sche Tabelle fortzusetzen. Die Transformations-Anzahlen der Formen, deren reciproke Werthe die Maafse der einzelnen Classen sind, finden sich natürlich nicht in der *Seeber*schen Tabelle; ich habe eine sehr einfache und expeditive Methode gefunden, nach welcher ich diese Anzahlen berechne, ohne die Transformationen selbst zu kennen. — Obgleich es mir an einem beobachteten Beispiel für den ersten Fall des allgemeinen Theorems mangelt, so will ich doch, um das Theorem in ein helleres Licht zu setzen, ein Beispiel nach der Theorie berechnen, welches eine gröfsere Mannigfaltigkeit darbietet. Ich wähle für die Determinante $-675 = -25\cdot 27$ diejenige Ordnung, welcher der Factor 3 zugeordnet ist; ich setze also $\Omega = 3$ und $\Delta = 75$; hier ist $R = 3$, $r = 3$, und das Theorem giebt $\mathfrak{M} = \frac{1}{12}\cdot 3\cdot 75(1-\frac{1}{9}) = \frac{1}{12}\cdot 3\cdot 75\cdot\frac{8}{9} = \frac{8\cdot 25}{12} = \frac{50}{3}$, so dafs also $\frac{50}{3}$ das Maafs derjenigen Ordnung für die Determinante -675 ist, welcher der Factor 3 zugeordnet ist. — Man zieht aus dem allgemeinen Theorem leicht die Folgerung, dafs diejenige Ordnung, welche zur Determinante $-\Omega^2\Delta$ und zum Factor Ω gehört, dasselbe Maafs hat, wie diejenige Ordnung, welcher zur Determinante $-\Delta^2\Omega$ und zum Factor Δ gehört, was auch a priori evident ist, und wir sehen zugleich, dafs nicht sowohl die Zahl D, als vielmehr die Zahl $\Omega\Delta$ die eigentliche Bestimmungsgröfse für ternäre Formen bildet, und dafs letztere sehr passend statt ersterer als Determinante eingeführt werden könnte.

Es existiren übrigens für gerade Determinanten ganz ähnliche Sätze, wenn man die eigentlichen und uneigentlichen Formen unterscheidet; wie schon weiter oben angedeutet worden ist.

Eintheilung in Genera.

Die Unter-Abtheilung der Ordnungen in Genera ist bei den ternären Formen weit mannigfaltiger, als bei den binären. Bei den letztern geschieht die Eintheilung nach den quadratischen Relationen, welche die durch die Formen darstellbaren Zahlen zu den verschiedenen Primtheilern der Determinante haben, und nach den quadratischen Relationen derselben zur Vier oder zur Acht, wenn diese Statt finden. Bei den ternären Formen hat man nicht allein die quadratischen Relationen der Formen selbst, sondern auch diejenigen ihrer zugeordneten Formen zu betrachten, wenn man eine vollständige und erschöpfende

Eintheilung in Genera erlangen will. Es sei $D = -\Omega^2 \Delta$ die (ungerade) Determinante einer gegebenen ternären Ordnung, welcher der Factor Ω zugeordnet ist. Die Eintheilung dieser Ordnung in Genera beruht auf folgenden Principien.

1. Zu jedem Primtheiler ω von Ω sind die durch eine Form f der Ordnung darstellbaren und nicht durch ω theilbaren Zahlen entweder sämmtlich quadratische Reste, oder sämmtlich quadratische Nichtreste; ich schreibe der Form f im ersten Falle den Character $f\mathfrak{R}\omega$, $\left(\frac{f}{\omega}\right) = 1$, im zweiten Falle den Character $f\mathfrak{R}\omega$, $\left(\frac{f}{\omega}\right) = -1$ zu. Alle Formen der Classe, welche f enthält, haben mit f denselben Character, und dieser kann also auch der ganzen Classe zugeschrieben werden.

2. Wenn durch $F = -\Omega\mathfrak{F}$ die zugeordnete Form der Form f bezeichnet wird, so ist $\mathfrak{F}$ primitiv und positiv, und die durch $\mathfrak{F}$ darstellbaren und durch irgend einen Primtheiler d von Δ nicht theilbaren Zahlen sind zu diesem Primtheiler d entweder sämmtlich quadratische Reste, oder sämmtlich Nichtreste. Ich schreibe je nach diesen beiden Fällen der Form f die zugeordnete quadratische Relation oder den zugeordneten Character $\mathfrak{F}\mathfrak{R}d$, $\left(\frac{\mathfrak{F}}{d}\right) = 1$, oder den zugeordneten Character $\mathfrak{F}\mathfrak{R}d$, $\left(\frac{\mathfrak{F}}{d}\right) = -1$ zu.

3. Aufser den Primfactoren von Ω existirt keine ungerade Primzahl, zu welcher f eine solche bestimmte quadratische Relation hätte, sondern in Bezug auf eine Primzahl, welche nicht in Ω aufgeht, als Modul, kann f sowohl quadratische Reste, als auch Nichtreste darstellen; und aufser den in Δ aufgehenden Primfactoren, existirt keine ungerade Primzahl, zu welcher $\mathfrak{F}$ eine bestimmte quadratische Relation hätte; in Bezug auf eine solche nicht in Δ aufgehende Primzahl können die durch $\mathfrak{F}$ darstellbaren Zahlen ohne Unterschied sowohl quadratische Reste, als auch Nichtreste sein.

4. Keine ternäre Form mit ungerader Determinante stellt ausschliefslich Zahlen $4n+1$ oder ausschliefslich Zahlen $4n+3$ dar; um so weniger kann eine ternäre Form ausschliefslich Zahlen von einer der vier Formen $8n+1$, $8n+3$, $8n+5$, $8n+7$ darstellen; auch kann sie nicht ausschliefslich Zahlen darstellen, zu welchen $+2$ oder -2 quadratischer Rest oder Nichtrest wäre.

5. Jede ternäre Form in der Ordnung Ω, Δ hat auf diese Weise zu allen Primtheilern von Ω und nur zu diesen ihre bestimmten eigenthümlichen, und zu allen Primtheilern von Δ und nur zu diesen ihre bestimmten zugeordneten Charactere. Die Gesammtheit aller dieser eigenthümlichen und aller die-

ser zugeordneten Charactere in Bezug auf die verschiedenen Primtheiler von Ω resp. Δ bildet den ***vollständigen Character*** der in Rede stehenden Form, so wie der sie enthaltenden Classe. Bezeichnet man demnach durch ω, ω', ω'', etc. die Primfactoren von Ω, welche nicht in Δ aufgehen, durch ∂, ∂', ∂'', ... die Primfactoren von Δ, welche nicht in Ω aufgehen, und durch r, r', r'', ... die gemeinschaftlichen Factoren von Ω und Δ, so wird der ***vollständige Character*** durch die Gesammtheit der Werthe folgender Symbole (*Legendre*schen Zeichen) gebildet:

$$(\sigma.)\quad \begin{cases} \left(\frac{f}{\omega}\right), \left(\frac{f}{\omega'}\right), \left(\frac{f}{\omega''}\right), \ldots., \quad \left(\frac{f}{r}\right), \left(\frac{f}{r'}\right), \left(\frac{f}{r''}\right), \ldots., \\ \left(\frac{\mathfrak{F}}{\partial}\right), \left(\frac{\mathfrak{F}}{\partial'}\right), \left(\frac{\mathfrak{F}}{\partial''}\right), \ldots., \quad \left(\frac{\mathfrak{F}}{r}\right), \left(\frac{\mathfrak{F}}{r'}\right), \left(\frac{\mathfrak{F}}{r''}\right), \ldots., \end{cases}$$

wo jedes ω und jedes ∂ ***einen***, jedes r dagegen ***zwei*** Charactere entstehen läfst.

6. Die Gesammtheit aller Formen oder aller Classen, welchen derselbe vollständige Character entspricht, bildet ein Genus. Man erhält alle vollständigen Charactere der verschiedenen Genera, wenn man jedem der Symbole in dem Schema (σ.) seine beiden Werthe ± 1 ertheilt und alle Combinationen dieser Doppelwerthe bildet. Die Anzahl dieser Combinationen, also die Anzahl der Genera ist eine Potenz von 2, deren Exponent gleich ist der Anzahl aller ω, plus der Anzahl aller ∂, plus der doppelten Anzahl aller r. Es ist übrigens keinesweges a priori evident, dafs jedem dieser vollständigen Charactere in der That ein Genus entspricht, aber ich habe das Maafs keines dieser Genera der Null gleich gefunden. Es geht hieraus unter andern hervor, dafs die Determinante -1 die einzige ist, zu welcher nur ***ein*** Genus ternärer positiver Formen gehört und dafs jede andere Determinante in jeder Ordnung mindestens zwei Genera enthält.

Für die Determinante -9 zerfällt z. B. jede der beiden Ordnungen in zwei Genera, deren jedes eine Classe enthält, so dafs die vier Classen dieser Determinante auf folgende Art eingetheilt werden:

$$\boldsymbol{D = -9}$$

$\Omega = 1,\quad \Delta = 9$	$\Omega = 3,\quad \Delta = 1$
$\left(\frac{\mathfrak{F}}{3}\right) = 1$ | $\left(\frac{\mathfrak{F}}{3}\right) = -1$	$\left(\frac{f}{3}\right) = 1$ | $\left(\frac{f}{3}\right) = -1$
$\begin{pmatrix}1, & 1, & 9\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1, & 2, & 5\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1, & 3, & 3\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2, & 2, & 3\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$
$\delta = 8$ | $\delta = 4$	$\delta = 8$ | $\delta = 12$

Die resp. Maafse dieser vier Genera sind $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$.

Wenn die Determinante eine negative Primzahl ist, so existiren immer nur zwei Genera; z. B. die Determinante -7 giebt ein Genus, für welches $\left(\frac{\mathfrak{F}}{7}\right)=1$, welches zwei Classen enthält, und ein zweites, für welches $\left(\frac{\mathfrak{F}}{7}\right)=-1$, mit einer Classe:

$$D=-7$$

$\left(\frac{\mathfrak{F}}{7}\right)=1$		$\left(\frac{\mathfrak{F}}{7}\right)=-1$
$\begin{pmatrix}1,&1,&7\\0,&0,&0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1,&2,&4\\1,&0,&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2,&2,&3\\1,&1,&1\end{pmatrix}$
$\delta=8$	$\delta=4$	$\delta=6$

Die Maafse dieser beiden Genera sind $\frac{3}{8}$ resp. $\frac{1}{6}$. In ähnlicher Art ist für die Determinanten -3 und -5:

$D=-3$		$D=-5$	
$\left(\frac{\mathfrak{F}}{3}\right)=1$	$\left(\frac{\mathfrak{F}}{3}\right)=-1$	$\left(\frac{\mathfrak{F}}{5}\right)=1$	$\left(\frac{\mathfrak{F}}{5}\right)=-1$
$\begin{pmatrix}1,&1,&3\\0,&0,&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1,&2,&2\\1,&0,&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1,&1,&5\\0,&0,&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1,&2,&3\\1,&0,&0\end{pmatrix}$
$\delta=8$	$\delta=12$	$\delta=8$	$\delta=4$

Im Allgemeinen, wenn $\Omega=1$ ist, so existiren nur die Relationen von $\mathfrak{F}$ zu den Primfactoren von Δ als Eintheilungsgrund für die Genera; wenn $\Delta=1$ ist, nur diejenigen von f zu Ω; wenn aber Ω und Δ beide von 1 verschieden sind, so vereinigen sich beide Arten von Relationen zu einem doppelten Eintheilungsgrunde.

Die Bestimmung des Maafses aller dieser Genera ist in folgendem allgemeinen Theorem enthalten:

Theorem.

„Es sei $D=-\Omega^2\Delta$ eine ungerade Determinante, welche den quadratischen Theiler Ω^2 enthält; ω, ω', ω'', ... seien die nicht in Δ enthaltenen verschiedenen Primfactoren von Ω; ∂, ∂', ∂'', ... diejenigen von Δ, welche nicht in Ω aufgehen, endlich r, r', r'', ... die gemeinschaftlichen Primfactoren von Ω und Δ. Giebt man den sämmtlichen Symbolen in dem Schema $(\sigma.)$ bestimmte Werthe, so dafs man ein bestimmtes Genus der Ordnung Ω, Δ erhält, dessen vollständiger Character durch die Gesammtheit jener Werthe ausgedrückt ist: so ist das Maafs eines solchen Genus durch folgende Formel gegeben:"

$$\mathfrak{M}=\frac{\Omega\Delta}{24}(2-\varepsilon)\,\Pi\left\{\frac{\omega+\left(\frac{-\Delta f}{\omega}\right)}{2\omega}\right\}\,\Pi\left\{\frac{\partial+\left(\frac{-\Omega\mathfrak{F}}{\partial}\right)}{2\partial}\right\}\,\Pi\left\{\frac{r^2-1}{4r^2}\right\},$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ***durch die Gleichung***

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{\Omega-1}{2}\cdot\frac{\Delta-1}{2}}\left(\frac{-f}{\Omega}\right)\left(\frac{-\mathfrak{F}}{\Delta}\right)$$

„bestimmt wird."

Die drei Multiplicationen Π in der Formel des Theorems beziehen sich resp. auf alle ω, alle ∂, alle r, welche weiter oben definirt worden sind, und es ist hierbei zu betrachten, dafs die Nenner 2 und 4, welche sich unter Π befinden, nicht vor das Zeichen herausgesetzt werden dürfen, da sie in jedem Factor des Products vorkommen sollen. Ferner sind in der Formel $\left(\frac{-\Delta f}{\omega}\right)$ und $\left(\frac{-\Omega\mathfrak{F}}{\partial}\right)$ ***Legendre***sche Zeichen, deren Werthe durch den vollständigen Character des Genus gegeben sind, denn f bedeutet hier irgend eine beliebige Form des Genus, dessen Maafs man bestimmen will, und $-\Omega\mathfrak{F}$ die zugeordnete Form irgend einer solchen Form. Die Bedeutung der Symbole $\left(\frac{-f}{\Omega}\right)$ und $\left(\frac{-\mathfrak{F}}{\Delta}\right)$ in dem Werthe von ε ist ebenfalls nicht zu verkennen; es sind dies verallgemeinerte ***Legendre***sche Zeichen. — In die Formel für $\mathfrak{M}$ gehen also die einzelnen Charactere des Genus zu den Primzahlen ω und zu den ∂ ein, und auch die zu den r finden sich wenigstens in dem Werthe von ε, den sie mitbestimmen helfen; es findet also ***nicht***, wie bei den binären Formen, eine gleichförmige Vertheilung des Maafses der ganzen Ordnung auf ihre einzelnen Genera Statt, sondern eine ungleichmäfsige, indem sich im Allgemeinen das Maafs des Genus mit seinen Characteren zugleich ändert. Man kann jedoch eine Bedingung angeben, unter welcher Genera gleiches Maafs haben. Da nämlich in der allgemeinen Formel die Relationen zu den r nur im Werthe von ε vorkommen und sonst nicht weiter erscheinen: so wird man aus dem vollständigen Character irgend eines Genus den eines andern ableiten, welches mit jenem gleiches Maafs hat, wenn man die Relationen zu allen ω und zu allen ∂ ungeändert läfst und blofs die Relationen zu den r ändert, letzteres mit der Rücksicht, dafs sich ε nicht ändern darf, welches letztere höchstens eine einzige Bedingung zwischen den Relationen zu den r geben kann. Die Anzahl der jedesmaligen Genera, welche gleiches Maafs haben, ist also entweder $2^{\mu-1}$ oder 2^{μ}, wenn μ die Anzahl aller r, und es ist zu leicht a priori anzugeben, welcher dieser beiden Fälle jedesmal Statt finden mufs, als dafs es nöthig wäre mich länger dabei aufzuhalten.

Um das Theorem an einem speciellen Falle deutlich zu machen, sei $D = -q$, wo q eine ungerade Primzahl. In diesem Falle ist $\Omega = 1$, $\Delta = q$,

also sind weder die ω, noch die r vorhanden und alle ∂ reduciren sich auf die einzige Primzahl q; ferner ist $\varepsilon = \left(\frac{-\mathfrak{F}}{q}\right)$; die Formel des Theorems giebt daher

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{4}\tfrac{1}{8}\left\{2-\left(\frac{-\mathfrak{F}}{q}\right)\right\}\left\{q+\left(\frac{-\mathfrak{F}}{q}\right)\right\},$$

d. h. für dasjenige Genus, dessen Character $\mathfrak{F}\mathfrak{R}q$ oder $\left(\frac{\mathfrak{F}}{q}\right) = 1$ ist,

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{4}\tfrac{1}{8}\left\{2-(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right\}\left\{q+(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right\},$$

und für das andere Genus, dessen Character $\mathfrak{F}\mathfrak{R}q$, oder $\left(\frac{\mathfrak{F}}{q}\right) = -1$, ist,

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{4}\tfrac{1}{8}\left\{2+(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right\}\left\{q-(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right\}.$$

Wir können die Vergleichung dieser Formel mit den obigen Beispielen für die Determinanten -3, -5 und -7 dem Leser überlassen.

Da nach einer Bemerkung von *Seeber* die Theorie der positiven ternären Formen für die Crystallographie von Wichtigkeit sein soll, so wünsche ich, dafs die neuen Sätze, welche mir dieser Theorie hinzuzufügen gelungen ist, für die Physik von einigem Nutzen sein mögen. Ich bitte zugleich die Crystallographen, mich in dieser Hinsicht zu belehren, damit ich mich bei meinen Untersuchungen über diesen Gegenstand ihrem Vortheil möglichst nahe anschliefsen könne.

Zum leichteren Verständnifs des hier Gesagten und für den practischen Gebrauch habe ich eine Tabelle beigefügt, welche für die dreizehn ungeraden Determinanten von -1 bis -25 die zu ihnen gehörenden Classen, in Ordnungen und Genera eingetheilt, enthält. Da es bequem ist, wenn man bei einer Form sogleich aus der blofsen Ansicht eines ihrer drei ersten Coëfficienten und eines der drei ersten Coëfficienten ihrer zugeordneten Form ihren vollständigen Character und also das Genus, in welches sie rangirt werden mufs, erkennen kann, so wird man die Classen durch solche Formen f zu repräsentiren suchen, in welchen wenigstens einer der drei ersten Coëfficienten zur Determinante, oder wenigstens zu Ω relative Primzahl ist, und für welche zugleich die zugeordneten Formen $-\Omega\mathfrak{F}$ so beschaffen sind, dafs wenigstens einer der drei ersten Coëfficienten in $\mathfrak{F}$ zur Determinante, oder wenigstens zu Δ relative Primzahl ist. Entweder besitzt eine vorgelegte Form schon diese beiden Eigenschaften, oder man kann sie beide zugleich durch eine leicht zu findende Transformation in eine äquivalente Form erreichen, wenn

man bedenkt, dafs irgend einer der drei ersten Coëfficienten in f, den man sofort zu jeder beliebigen Zahl zur relativen Primzahl machen kann, sich nicht ändert, wenn man den ihm entsprechenden Variabeln ungeändert läfst und blofs die beiden andern Variabeln transformirt: denn hierdurch erlangt man die Möglichkeit, noch aufserdem über einen der drei ersten Coëfficienten der zugeordneten Form zu disponiren. So erkennt man z. B. bei der Form $\binom{1,3,3}{0,0,0}$, welche zu der Ordnung $\Omega=3$, $\Delta=1$ gehört, sogleich aus ihrem ersten Coëfficienten 1, dafs diese Form nur Zahlen darstellen kann, welche zu 3 quadratische Reste sind; und aus dem ersten oder zweiten Coëfficienten 2, der Form $\binom{2,2,3}{0,0,1}$, welche zu derselben Ordnung gehört, erkennt man sogleich, dafs diese Form nur Zahlen darstellen kann, welche zu 3 quadratische Nichtreste sind. Die Form $\binom{2,3,\ 5}{0,0,-1}$ gehört zur Ordnung $\Omega=5$, $\Delta=1$; ihr erster und zweiter Coëfficient 2 und 3 sind nicht durch 5 theilbar und zu 5 Nichtreste, also kann die Form überhaupt nur Zahlen $\mathfrak{N}5$, d. h. von der Form $5n\pm2$ darstellen. Der Form $f=\binom{1,2,13}{-1,0,\ 0}$, welche zur Ordnung $\Omega=1$, $\Delta=25$ gehört, ist die Form $\binom{-25,-13,-2}{-\ 1,\ \ 0,\ \ 0}$ zugeordnet, also ist $\mathfrak{F}=\binom{25,13,2}{1,\ 0,0}$, und aus jedem der beiden Coëfficienten 13 oder 2 von $\mathfrak{F}$ erkennt man, dafs der Form $\binom{1,2,13}{-1,0,\ 0}$ der Character $\mathfrak{F}\mathfrak{N}5$, $\left(\frac{\mathfrak{F}}{5}\right)=-1$ zugeordnet ist. — Da aus jeder vorgelegten Form ihre zugeordnete Form $F=-\Omega\mathfrak{F}$, also auch $\mathfrak{F}$ sehr leicht berechnet werden kann, so hielt ich es nicht für nöthig, die zugeordneten Formen oder die Formen $\mathfrak{F}$ in die Tabelle mit aufzunehmen. — Durch die Eintheilung in Genera wird die Lösung der Aufgabe, zu entscheiden, ob zwei vorgelegte ternären Formen mit derselben Determinante äquivalent sind, oder nicht, aufserordentlich vereinfacht: denn bevor man irgend eine andere Operation an den beiden Formen vornimmt, wird man zunächst untersuchen (was sehr leicht ist), ob sie in dasselbe Genus gehören, oder nicht; stimmen ihre vollständigen Charactere nicht vollkommen mit einander überein, so können die beiden Formen unmöglich äquivalent sein; stimmen aber ihre vollständigen Charactere überein, gehören also die Formen in dasselbe Genus, so kann es sich treffen, dafs dieses Genus nur eine Classe enthält, und dann sind die vorgelegten Formen sicher äquivalent; enthält das Genus dagegen mehrere Classen, so mufs man freilich eine andere Methode zu Hülfe nehmen. Wenn man also auf diese Weise auch nicht immer seinen Zweck erreicht, so hat

das Verfahren doch jedenfalls den negativen Nutzen, dafs man sich durch dasselbe in vielen Fällen grofse Mühe ersparen kann. Unter den 33 Generibus, in welche sich die 52 Classen der Tabelle theilen, befinden sich 17, also etwa die Hälfte, in welchen nur eine Classe vorkommt, 14 Genera enthalten 2 Classen, 1 Genus enthält 3 und 1 Genus 4 Classen. Die Maafse der Genera, so wie die Anzahl der in ihnen enthaltenen Classen bilden mit steigenden Determinanten eine Progression, welche weit schneller wächst, als für die binären Formen. Die Anzahl der Determinanten, welchen eine bestimmte Classification entspricht, ist immer endlich, und im Allgemeinen kleiner als bei binären Formen.

Man bemerke noch folgende allgemeine Eigenschaft der Genera. Ich sagte oben, dafs kein Genus ausschliefslich weder Zahlen von einer der vier Formen $8n+1, 3, 5, 7$, noch ausschliefslich Zahlen von zweien dieser Formen repräsentiren könne; dagegen existiren in jeder Ordnung Genera, welche eine dieser vier Formen auf *keine Weise* repräsentiren können, während sie die drei übrigen ohne Unterschied repräsentiren, und während auch die übrigen Genera derselben Ordnung, welche diese Eigenschaft nicht besitzen, alle vier Formen ohne Unterschied darstellen. In der That findet zwischen den einzelnen Characteren, welche den vollständigen Character eines Genus in irgend einer Ordnung constituiren, entweder die Relation

$$\left(\frac{f}{\Omega}\right)\left(\frac{\mathfrak{F}}{\Delta}\right) = +(-1)^{\frac{\Omega+1}{2}\cdot\frac{\Delta+1}{2}},$$

oder die entgegengesetzte Relation

$$\left(\frac{f}{\Omega}\right)\left(\frac{\mathfrak{F}}{\Delta}\right) = -(-1)^{\frac{\Omega+1}{2}\cdot\frac{\Delta+1}{2}}$$

Statt. Hiernach theilen sich alle Genera derselben Ordnung in zwei Gruppen; die Genera der ersten Gruppe, für welche die erste der beiden eben geschriebenen Relationen Statt findet, stellen alle Zahlen der vier Formen $8n+1, 3, 5, 7$ dar; aber kein Genus der zweiten Gruppe kann eine Zahl darstellen, welche $\equiv 7\Delta \pmod 8$ ist, wohl aber stellen die Genera der zweiten Gruppe ohne Unterschied Zahlen dar, welche $\equiv \Delta$, 3Δ oder $5\Delta \pmod 8$ sind. Sehr bekannt ist der specielle Fall, dafs keine Zahl $8n+7$ durch die Summe von drei Quadraten darstellbar ist; die Determinante -1 ist die einzige, für welche die erste Gruppe gänzlich fehlt. Für die Determinante -3 constituirt die Form $\binom{1, 1, 3}{0, 0, 0}$, für welche $\left(\frac{\mathfrak{F}}{3}\right) = 1$ ist, die erste Gruppe; diese Form stellt ohne Unterschied Zahlen $8n+1, 3, 5, 7$ dar; die Form $\binom{1, 2, 2}{-1, 0, 0}$ dagegen, für

welche $\left(\frac{\mathfrak{F}}{3}\right) = -1$, bildet die zweite Gruppe und stellt nur Zahlen $8n+1, 3, 7$ und nicht Zahlen $8n+5$ dar. Ich verweile nicht bei den ganz ähnlichen Unterscheidungen und den ganz ähnlichen Criterien, welche sich auf die vier Formen $8n$, $8n+2, 4, 6$ beziehen. Es sind dies Nachklänge des quadratischen Reciprocitätsgesetzes in die ternären Formen hinüber, oder desjenigen Fundamentalsatzes, welcher bewirkt, dafs bei den binären Formen nur die Hälfte der a priori möglichen Genera wirklich existirt. Übrigens stellt jedes Genus sämmtliche (positive) Zahlen *wirklich* dar, welche es mit Hinsicht auf diese Criterien und mit Hinsicht auf seinen vollständigen Character darzustellen fähig ist. So stellt z. B. die Form $\binom{1,\ 1,\ 3}{0,\ 0,\ 0}$ wirklich *jede* ungerade Zahl dar, und die Form $\binom{1,\ 2,\ 2}{-1,\ 0,\ 0}$ *jede* ungerade Zahl, welche nicht $\equiv 5 \pmod 8$ ist; die Form $\binom{1,\ 5,\ 5}{0,\ 0,\ 0}$ stellt in der That jede ungerade Zahl dar, welche zu 5 quadratischer Rest und nicht $\equiv 7 \pmod 8$ ist; d. h. alle Zahlen $10n \pm 1$, welche nicht von der Form $8n+7$, sind durch ein Quadrat und die fünffache Summe zweier Quadrate darstellbar; die Form $\binom{2,\ 3,\ \ 5}{0,\ 0,\ -1}$ endlich stellt wirklich alle ungeraden Zahlen dar, welche zu 5 quadratische Nichtreste sind, also alle Zahlen $10n \pm 3$.

Ich beschliefse dieses Résumé mit einigen speciellen Sätzen über die Darstellung von Zahlen durch quaternäre Formen. In diesen Sätzen erhalten die Variabeln der Formen alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞, ohne weitere Beschränkung, wenn es sich um Darstellungen überhaupt handelt; bei den *eigentlichen* Darstellungen findet die Beschränkung Statt, dafs die Variabeln keinen gemeinschaftlichen Theiler haben dürfen.

„Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen irgend einer ungeraden „Zahl m durch die Form $x^2+y^2+z^2+u^2$ beträgt

$$8a^{\alpha-1}(a+1)b^{\beta-1}(b+1)c^{\gamma-1}(c+1)\ldots. = 8m\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\ldots.,$$

„wenn $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots.$, und $a, b, c, \ldots.$ die verschiedenen Primfactoren „von m sind."

„Die Anzahl aller Darstellungen der ungeraden Zahl m durch die Summe „von 4 Quadraten ist gleich der achtfachen Factorensumme dieser Zahl *)."

---

*) Dieser Satz ist nicht neu, sondern schon vor langer Zeit von *Jacobi* aus der Theorie der elliptischen Functionen abgeleitet worden.

„Es sei m eine Zahl von einer der vier Formen $12n+1$, $12n+5$, „$12n+7$, $12n+11$; dann ist die Anzahl der eigentlichen Darstellungen von „$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ durch

$$x^2+y^2+z^2+3u^2,$$

„je nach diesen vier linearen Formen von m, resp. gleich dem 6fachen, 12fachen, „2fachen oder 4fachen des folgenden Products:

$$a^{\alpha-1}\left(a+(-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)\right)b^{\beta-1}\left(b+(-1)^{\frac{b-1}{2}}\left(\frac{b}{3}\right)\right)c^{\gamma-1}\left(c+(-1)^{\frac{c-1}{2}}\left(\frac{c}{3}\right)\right)\ldots.$$"

„Die Anzahl aller Darstellungen von m ebenfalls durch die Summe von drei Quadraten und ein dreifaches Quadrat ist je nach denselben vier linearen Formen von m gleich der 6fachen, —12fachen, —2fachen, oder 4fachen Differenz zwischen der Summe derjenigen Factoren von m, welche eine der beiden Formen $12n\pm1$ haben, und der Summe derjenigen Factoren von m, welche eine der beiden Formen $12n\pm5$ haben."

„Mit Unterscheidung derselben vier linearen Formen $12n+1$, 5, 7, 11 „von m ist die Anzahl der eigentlichen Darstellungen von m durch die Form

$$x^2+y^2+2z^2-2uz+2u^2$$

„resp. gleich dem 4fachen, 2fachen, 12fachen, oder 6fachen von

$$a^{\alpha-1}\left(a+(-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)\right)b^{\beta-1}\left(b+(-1)^{\frac{b-1}{2}}\left(\frac{b}{3}\right)\right)c^{\gamma-1}\left(c+(-1)^{\frac{c-1}{2}}\left(\frac{c}{3}\right)\right)\ldots.,$$

„und die Anzahl aller Darstellungen von m durch dieselbe Form ist resp. gleich „der 4fachen, —2fachen, —12fachen, oder 6fachen Differenz zwischen der „Summe derjenigen Factoren von m, welche eine der beiden Formen $12n\pm1$ „haben, und der Summe der übrigen Factoren von m, welche von einer der bei„den Formen $12n\pm5$ sind."

„Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden, nicht durch „5 theilbaren Zahl m durch die Form

$$x^2+y^2+z^2+5u^2$$

„beträgt, wenn $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots.$, entweder

$$6\,a^{\alpha-1}\left(a+\left(\frac{a}{5}\right)\right)b^{\beta-1}\left(b+\left(\frac{b}{5}\right)\right)c^{\gamma-1}\left(c+\left(\frac{c}{5}\right)\right)\ldots. \text{ oder}$$

$$4\,a^{\alpha-1}\left(a+\left(\frac{a}{5}\right)\right)b^{\beta-1}\left(b+\left(\frac{b}{5}\right)\right)c^{\gamma-1}\left(c+\left(\frac{c}{5}\right)\right)\ldots.,$$

„je nachdem m zu 5 quadratischer Rest oder Nichtrest ist.

„Die Anzahl aller Darstellungen einer ungeraden, nicht durch 5 theilbaren „Zahl m durch die Form $x^2+y^2+z^2+5u^2$ ist, wenn m zu 5 quadratischer

„Rest, gleich der 6fachen, und wenn m zu 5 Nichtrest ist, gleich der —4fachen „Differenz zwischen der Summe derjenigen Factoren von m, welche zu 5 qua- „dratische Reste sind und der Summe derjenigen Factoren von m, welche zu 5 „Nichtreste sind."

Diese Sätze sind nur specielle Fälle eines allgemeinen Satzes, dessen Auseinandersetzung aber zu viele vorläufige Erörterungen und Definitionen erfordern würde.

Man kann nach *Jacobi's* Anleitung aus der Theorie der elliptischen Functionen, nämlich aus den in „Fundamenta nova etc." gegebenen Entwicklungen der zweiten, vierten, sechsten und achten Potenz von $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ merkwürdige Theoreme über die Darstellung von Zahlen durch die Summe von zwei, vier, sechs und acht Quadraten ziehen. Bei meinen Untersuchungen werden diese Sätze durch rein arithmetische Betrachtungen bewiesen und erscheinen als specielle Fälle allgemeinerer Sätze; zugleich sieht man die Ursache ein, warum jene Entwicklungen mit der achten Potenz abgeschlossen sind, da in der That 8 die höchste Anzahl der Variabeln ist, für welche zur Determinante —1 nur eine Classe von Formen gehört, die durch die Summe von Quadraten repräsentirt werden kann. Aufser den bekannten Sätzen für 2 und 4 Quadrate hat man folgende:

„Die Anzahl der Darstellungen einer ungeraden Zahl durch die Summe „von sechs Quadraten ist, wenn diese Zahl von der Form $4n+1$ ist, gleich „der 12fachen, und wenn sie von der Form $4n+3$ ist, gleich der —20fachen „Differenz zwischen der Summe der Quadrate derjenigen ihrer Factoren, welche „die Form $4n+1$ haben und der Summe der Quadrate derjenigen ihrer Fac- „toren, welche die Form $4n+3$ haben."

„Die Anzahl der Darstellungen einer ungeraden Zahl durch die Summe von „acht Quadraten ist gleich der sechszehnfachen Summe der Cuben ihrer Factoren."

Für 10 Quadrate habe ich noch gefunden, „dafs die Zahlen von der Form $4n+3$ sich so oft durch 10 Quadrate darstellen lassen, als die 12fache Differenz zwischen der Summe der Biquadrate derjenigen ihrer Factoren, welche von der Form $4n+3$ sind, und der Summe der Biquadrate derer, welche von der Form $4n+1$ sind, beträgt." Aber für die Zahlen der Form $4n+1$ existirt kein ähnlicher Satz.

Ich kann nicht unterlassen, bei dieser Gelegenheit noch des grofsen Nutzens und der vortrefflichen Anleitung zu erwähnen, welche mir bei meinen Untersuchungen, aufser den Arbeiten von *Gaufs*, die von *Dirichlet*, im 19ten und 21ten Bande dieses Journals, gewährt haben.

Berlin, Februar 1847.

Tabelle für die Eintheilung derjenigen positiven ternären Formen in Genera, welche zu den 13 ungeraden Determinanten von −1 bis −25 gehören.

$D = -\Omega^2 \Delta$, zugeordnete Form von f gleich $-\Omega \mathfrak{F}$.

D	Ω	Δ	Character von f	Character von $\mathfrak{F}$	Genera ternärer positiver Formen, durch die in ihren Classen enthaltenen einfachsten Formen repräsentirt.
−1	1	1	. .	. . .	$\left(\begin{smallmatrix}1,&1,&1\\0,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$
−3	1	3	. .	$\mathfrak{R}3$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&1,&3\\0,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$
				$\mathfrak{R}3$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&2\\-1,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$
−5	1	5	. .	$\mathfrak{R}5$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&1,&5\\0,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$
				$\mathfrak{R}5$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&3\\-1,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$
−7	1	7	. .	$\mathfrak{R}7$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&1,&7\\0,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&4\\-1,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$
				$\mathfrak{R}7$	$\left(\begin{smallmatrix}2,&2,&3\\1,&1,&1\end{smallmatrix}\right)$
−9	1	9	. .	$\mathfrak{R}3$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&1,&9\\0,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$
				$\mathfrak{R}3$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&5\\-1,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$
	3	1	$\mathfrak{R}3$	. . .	$\left(\begin{smallmatrix}1,&3,&3\\0,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$
			$\mathfrak{R}3$	. . .	$\left(\begin{smallmatrix}2,&2,&3\\0,&0,&-1\end{smallmatrix}\right)$
−11	1	11	. .	$\mathfrak{R}11$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&1,&11\\0,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}1,&3,&4\\-1,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$
				$\mathfrak{R}11$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&6\\-1,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$
−13	1	13	. .	$\mathfrak{R}13$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&1,&13\\0,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}2,&2,&5\\1,&1,&1\end{smallmatrix}\right)$
				$\mathfrak{R}13$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&7\\-1,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}2,&3,&3\\-1,&0,&-1\end{smallmatrix}\right)$
−15	1	15	. .	$\mathfrak{R}3\ \mathfrak{R}5$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&1,&15\\0,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}1,&4,&4\\-1,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$
				$\mathfrak{R}3\ \mathfrak{R}5$	$\left(\begin{smallmatrix}2,&2,&5\\0,&0,&-1\end{smallmatrix}\right)$
				$\mathfrak{R}3\ \mathfrak{R}5$	$\left(\begin{smallmatrix}2,&3,&3\\0,&0,&-1\end{smallmatrix}\right)$
				$\mathfrak{R}3\ \mathfrak{R}5$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&8\\-1,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}1,&3,&5\\0,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$
−17	1	17	. .	$\mathfrak{R}17$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&1,&17\\0,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&9\\-1,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$
				$\mathfrak{R}17$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&3,&6\\-1,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}2,&3,&4\\1,&1,&1\end{smallmatrix}\right)$
−19	1	19	. .	$\mathfrak{R}19$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&1,&19\\0,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}1,&4,&5\\-1,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}2,&3,&4\\-1,&-1,&0\end{smallmatrix}\right)$
				$\mathfrak{R}19$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&10\\-1,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}2,&2,&7\\1,&1,&1\end{smallmatrix}\right)$
−21	1	21	. .	$\mathfrak{R}3\ \mathfrak{R}7$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&1,&21\\0,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$
				$\mathfrak{R}3\ \mathfrak{R}7$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&3,&7\\0,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}2,&3,&4\\0,&-1,&0\end{smallmatrix}\right)$
				$\mathfrak{R}3\ \mathfrak{R}7$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&11\\-1,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}3,&3,&3\\0,&-1,&-1\end{smallmatrix}\right)$
				$\mathfrak{R}3\ \mathfrak{R}7$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&5,&5\\-2,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}2,&2,&7\\0,&0,&-1\end{smallmatrix}\right)$
−23	1	23	. .	$\mathfrak{R}23$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&1,&23\\0,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&12\\-1,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}1,&3,&8\\-1,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}1,&4,&6\\-1,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$
				$\mathfrak{R}23$	$\left(\begin{smallmatrix}2,&3,&5\\-1,&0,&-1\end{smallmatrix}\right)$
−25	1	25	. .	$\mathfrak{R}5$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&1,&25\\0,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}2,&3,&5\\-1,&-1,&0\end{smallmatrix}\right)$
				$\mathfrak{R}5$	$\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&13\\-1,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}2,&2,&9\\1,&1,&1\end{smallmatrix}\right)$
	5	1	$\mathfrak{R}5$	. . .	$\left(\begin{smallmatrix}1,&5,&5\\0,&0,&0\end{smallmatrix}\right)$
			$\mathfrak{R}5$	. . .	$\left(\begin{smallmatrix}2,&3,&5\\0,&0,&-1\end{smallmatrix}\right)$

10.

Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.

(Von Herrn Dr. phil. *G. Eisenstein*, Privatdocent zu Berlin.)

IV. Über einen allgemeinen Satz, welcher das Additionstheorem für elliptische Functionen als speciellen Fall enthält.

Wenn *Gauſs* seinen schon gefundenen Beweisen des quadratischen Reciprocitätsgesetzes eine Reihe neuer hinzugefügte, zum Theil um den Weg zu der weit schwierigern Theorie der biquadrtischen Reste zu erleichtern, so möchte es nach diesem Vorbilde nicht unpassend erscheinen, in ähnlicher Weise den Fundamentaltheoremen über elliptische Functionen immer neue Seiten abzugewinnen, in der Hoffnung, es könnte die eine oder die andere Wendung zur Aufklärung und leichtern Erforschung der Eigenschaften der *Abel*schen Functionen etwas beitragen. — So sahen wir, wie neulich *Hermite*, von den trigonometrischen Reihen ausgehend, welche den Zähler und Nenner der elliptischen Functionen constituiren, zu dem *Abel*schen Theorem für diese Functionen gelangte, indem er sich auf dasselbe Princip stützte, auf welches ich schon im 27ten Bande dieses Journals Seite 187 aufmerksam gemacht habe, dafs nämlich jede homogene Verbindung jener Reihen wieder eine ähnliche Reihe hervorbringt. — Hierher gehört auch das elegante Verfahren, durch welches *Richelot* die *Lagrange*sche Integrationsmethode auf die *Abel*schen Functionen ausgedehnt hat.

In Nr. II. dieser Beiträge habe ich einen Beweis des Additionstheorems gegeben, welcher hauptsächlich auf dem Umstande beruht, dafs die geraden Differentialquotienten der elliptischen Functionen durch ganze rationale Verbindungen dieser Functionen, die ungeraden Differentialquotienten derselben durch Producte aus ganzen rationalen Verbindungen in die Wurzelgröfse ausgedrückt werden. Der hier folgende Beweis, welcher auf demselben Principe beruht, unterscheidet sich dennoch in wesentlichen Puncten von dem ersten und läfst zugleich deutlich sehen, warum das Verfahren nicht gelingt, wenn die Function unter der Quadratwurzel auf einen höheren als den vierten Grad

steigt, obwohl auch dann noch jene eben erwähnte Eigenschaft der Differentialquotienten Statt findet.

Es sei $x = \varphi(t)$ diejenige Function von t, für welche

$$t = \int_0 \frac{\partial x}{\Delta(x)}$$

ist, indem der Kürze wegen $\Delta(x)$ die Quadratwurzel aus einer geraden ganzen Function $2n$ten Grades

$$x^{2n} + bx^{2n-2} + \ldots + ex^2 + 1 = \lambda(x)$$

bezeichnet, nämlich $\Delta(x) = \sqrt{(\lambda(x))}$. Da zufolge der eben gemachten Annahme $\frac{\partial x}{\partial t} = \Delta(x)$, $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \lambda(x)$, $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda'(x)}{\Delta(x)} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{2}\lambda'(x) = nx^{2n-1} + (n-1)bx^{2n-3} + \text{etc.}$ ist, so erhält man die beiden ersten Differentialquotienten jeder Function $F(x)$ von x, nach t, wie folgt ausgedrückt:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial t} = F'(x)\Delta(x), \qquad \frac{\partial^2 F(x)}{\partial t^2} = F'(x)\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + F''(x)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2$$
$$= F'(x)(nx^{2n-1} + (n-1)bx^{2n-3} + \text{etc.})$$
$$+ F''(x)(x^{2n} + bx^{2n-2} + \text{etc.}).$$

Hieraus sieht man sogleich, dafs, wenn $F(x)$ eine ganze Function von x ist, $\frac{\partial^2 F(x)}{\partial t^2}$ ebenfalls eine ganze Function von x sein wird, deren Grad um $2n-2$ Einheiten (bei den elliptischen Functionen um 2 Einheiten, bei den Sinus um 0 Einheiten) höher ist, als der von $F(x)$; und zwar wird, wenn Ax^μ das höchste Glied in $F(x)$ ist, das höchste Glied in $\frac{\partial^2 F(x)}{\partial t^2}$,

$$\mu A x^{\mu-1} \cdot nx^{2n-1} + \mu(\mu-1)Ax^{\mu-2} \cdot x^{2n} = \mu(\mu+n-1)Ax^{\mu+2n-2}$$

sein. Geht man demnach von x selbst als der einfachsten ganzen Function aus und bildet successive dessen gerade Differentialquotienten nach t, so werden dieselben sämmtlich ganze Functionen von x sein, deren Grade fortwährend um $2n-2$ Einheiten steigen, und es werden die höchsten Glieder von

$$x, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 x}{\partial t^4}, \quad \text{etc.}, \quad \frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}}, \quad \text{resp. sein:}$$

$$x, \quad nx^{2n-1}, \quad n(2n-1)(3n-2)x^{4n-3}, \quad \text{etc.},$$
$$n(2n-1)(3n-2)\ldots((2\mu-1)n-2\mu+2)x^{2\mu n-2\mu+1},$$

so dafs man schreiben kann:

$$(1.) \quad \frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}} = n(2n-1)(3n-2)\ldots((2\mu-1)n-2\mu+2)x^{2\mu n-2\mu+1} + N,$$

wo die Anzahl der numerischen Factoren, deren Product den Coëfficienten

des höchsten Gliedes bildet, $2\mu-1$ beträgt, und wo durch N der Complex aller derjenigen Glieder ausgedrückt wird, welche niedrigere Potenzen von x enthalten, als die $2\mu n-2\mu+1$te. Ich werde nämlich hier und im Folgenden, wenn es mir bei einer ganzen Function lediglich auf die Betrachtung ihres höchsten Gliedes ankommt, nur dieses schreiben und die Summe aller übrigen Glieder durch $+N$ andeuten; in umgekehrter Weise werde ich, wenn es mir bei einer nach *steigenden* Potenzen der Variabeln geordneten ganzen Function, oder unendlichen Reihe, nur auf das niedrigste oder Anfangsglied ankommt, diesem die Summe der höhern Glieder mit $+H$ anfügen. — Für elliptische Functionen ist $n=2$ und die Formel (1.) wird für diese

$$(1'.)\quad \frac{\partial^{2\mu}x}{\partial t^{2\mu}} = (2\mu)!\,x^{2\mu+1}+N.$$

Übrigens ist leicht zu sehen, dafs die ganze Function zur Rechten in (1.) oder (1'.) nur ungerade Potenzen von x enthält.

Den allgemeinen Ausdruck für die ungeraden Differentialquotienten von x nach t erhält man, wenn man (1.) noch einmal nach t differentiirt, nämlich:

$$(2.)\quad \frac{\partial^{2\mu+1}x}{\partial t^{2\mu+1}} = \Delta(x)\{n(2n-1)(3n-2)\ldots(2\mu n-2\mu+1)x^{2\mu n-2\mu}+N\},$$

d. h. gleich dem Producte aus $\Delta(x)$ in eine gerade ganze Function von x, wo aber das neue N um einen Grad niedriger ist, als das obige in (1.) und eben deshalb wiederum jenes in (2.) dieselbe Rolle spielt, wie dieses in (1.). Für elliptische Functionen ist

$$(2'.)\quad \frac{\partial^{2\mu+1}x}{\partial t^{2\mu+1}} = \Delta(x)\{(2\mu+1)!\,x^{2\mu}+N\}.$$

Aufser diesen Entwicklungen der Differentialquotienten von x nach *fallenden* Potenzen von x, bei welchen nur die höchsten Glieder berechnet, die übrigen blofs angedeutet sind, bedürfen wir noch der Entwicklungen von t^h und $\frac{t^h}{\Delta(x)}$ nach *steigenden* Potenzen von x, oder vielmehr nur der niedrigsten, d. h. der Anfangsglieder dieser Entwicklungen. Da $\lambda(x)$, nach steigenden Potenzen von x geordnet, mit 1 anfangen soll, so fangen $\Delta(x)$ und $\frac{1}{\Delta(x)}$ ebenfalls mit 1 an, und $\int_0 \frac{\partial x}{\Delta(x)} = t$ fängt mit x, folglich t^h mit x^h und $\frac{t^h}{\Delta(x)}$ ebenfalls mit x^h an. Nach obiger Übereinkunft kann also geschrieben werden:

$$(3.)\quad t^h = x^h+H,$$

$$(4.)\quad \frac{t^h}{\Delta(x)} = x^h+H.$$

Diese Reihen enthalten nur gerade, oder nur ungerade Potenzen von x, je nachdem h gerade oder ungerade ist.

Nach dem *Taylor*schen Satze können folgende vier Entwicklungen angenommen werden, in welchen $\varphi(u) = y$ gesetzt ist, so dafs y dieselbe Function von u, welche x von t, und u dieselbe Function von y, welche t von x ist:

$$\varphi(t+u) = x + \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{u}{1!} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{u^2}{2!} + \text{etc.} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\frac{\partial^\mu x}{\partial t^\mu}\cdot\frac{u^\mu}{\mu!},$$

$$\varphi(t-u) = x - \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{u}{1!} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{u^2}{2!} - \text{etc.} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}(-1)^\mu\frac{\partial^\mu x}{\partial t^\mu}\cdot\frac{u^\mu}{\mu!},$$

$$\varphi(u+t) = y + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{t}{1!} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\cdot\frac{t^2}{2!} + \text{etc.} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\frac{\partial^\mu y}{\partial u^\mu}\cdot\frac{t^\mu}{\mu!},$$

$$\varphi(u-t) = y - \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{t}{1!} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\cdot\frac{t^2}{2!} - \text{etc.} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}(-1)^\mu\frac{\partial^\mu y}{\partial u^\mu}\cdot\frac{t^\mu}{\mu!}.$$

Addirt man einerseits die zweite dieser vier Gleichungen zur ersten, subtrahirt andrerseits die vierte von der dritten, bemerkt, dafs $\varphi(u+t) = \varphi(t+u)$ und $\varphi(u-t) = -\varphi(t-u)$ ist, und dividirt jedesmal durch $2\Delta(y)$, so erhält man das doppelte Resultat:

$$(5.)\qquad \frac{\varphi(t+u)+\varphi(t-u)}{2\Delta(y)} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}}\cdot\frac{u^{2\mu}}{\Delta(y)(2\mu)!},$$

$$(6.)\qquad \frac{\varphi(t+u)+\varphi(t-u)}{2\Delta(y)} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\frac{\partial^{2\mu+1} y}{\Delta(y)\,\partial u^{2\mu+1}}\cdot\frac{t^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}.$$

Da hier links in beiden Gleichungen Dasselbe steht, so kann man die beiden Reihen zur Rechten in (5.) und (6.) einander gleich setzen. Diese Vergleichung liefert, wie wir sogleich sehen werden, für $n = 2$, d. h. für elliptische Functionen, unmittelbar das Additionstheorem, und für gröfsere Werthe von n erhält man einen ziemlich merkwürdigen und allgemeinen Satz, welcher zugleich den Grund sehen läfst, weshalb in diesem Falle ein Additionstheorem in derselben Weise, wie für die elliptischen Functionen, nicht existirt. — In der That zeigen wir, dafs sich die Reihen zur Rechten in (5.) und (6.) in aufsteigende Doppelreihen nach Potenzen und Producten von x und y umformen lassen. Was zunächst die Reihe in (5.) betrifft, so setze man statt $\frac{u^{2\mu}}{\Delta(y)(2\mu)!}$, nach Anleitung von (4.), die Entwicklung nach steigenden geraden Potenzen von y, welche mit $\frac{y^{2\mu}}{(2\mu)!}$ anfängt, und nach (1.) setze man statt der Differentialquotienten $\frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}}$ die ihnen gleichen ganzen und ungeraden Functionen von x,

welche man sich hier nach steigenden Potenzen von x, also in umgekehrter Art wie in (1.), geordnet vorstellen mufs. Irgend eine bestimmte Potenz von y, z. B. die $2k$te, kommt nur in den ersten $k+1$ ersten Gliedern von (5.), nämlich für die Werthe $\mu = 0$ bis $\mu = k$ vor, während alle folgenden nur *höhere* Potenzen von y als die $2k$te enthalten, nach (4.); von der andern Seite enthält keine der ungeraden ganzen Functionen, durch welche die Differentialquotienten in diesen $k+1$ ersten Gliedern ausgedrückt werden, eine Potenz von x, deren Exponent $>$ als $2kn-2k+1$ wäre, nach (1.), und dieses Maximum des Exponenten $2kn-2k+1$ zeigt sich nur in dem einzigen $k+1$ten Gliede der Reihe, und zwar erscheint die Potenz von x, welche diesem Exponenten entspricht, mit dem Coëfficienten $n(2n-1)(3n-2)\ldots((2k-1)n-2k+2)$, welchen ich, um abzukürzen, durch K bezeichne. Hieraus folgt: wenn man die ganze Reihe (5.) nach steigenden Potenzen von y ordnet (so dafs die Coëfficienten Reihen nach x sind), so enthält der Coëfficient von y^{2k} nur solche Potenzen von x, deren Exponenten $\leqq 2kn-2k+1$ sind, und zwar ist die höchste, nämlich die $2kn-2k+1$te Potenz von x in diesem Coëfficienten von y^{2k}, mit $\frac{K}{(2k)!}$ multiplicirt; mit andern Worten, bezeichnet man überhaupt das allgemeine Glied der Producte von Potenzen von x und y in einer Doppelreihe nach x und y, welche in Bezug auf x ungerade, in Bezug auf y gerade ist, durch $x^{2h+1}y^{2k}$, so dafs im Allgemeinen h und k unabhängig von einander alle ganzen Werthe von 0 bis ∞ erhalten können, so ist für die Reihe (5.)

$$2h+1 \leqq 2kn-2k+1,$$

oder, was dasselbe besagt,

$$(\alpha.) \qquad h \leqq (n-1)k,$$

d. h. andere Glieder, andere Potenzproducte $x^{2h+1}y^{2k}$ können nicht vorkommen, als solche, die der Bedingung (α.) genügen; aufserdem ist für $h = (n-1)k$ der Coëfficient des Potenzproducts $= \frac{K}{(2k)!}$, *was sich für* $n = 2$ *auf* 1 *reducirt.*

Die Betrachtung der Reihe (6.) ergiebt ein ähnliches Resultat. Hier mufs man die Potenzen von t in $\frac{t^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}$ nach (3.) in Reihen nach steigenden ungeraden Potenzen von x umsetzen, welche jedesmal mit $\frac{x^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}$ anfangen; die durch $\Delta(y)$ dividirten ungeraden Differentialquotienten $\frac{\partial^{2\mu+1}y}{\Delta(y)\partial u^{2\mu+1}}$

mufs man nach Anleitung von (2.) durch

$$n(2n-1)(3n-2)\ldots.(2\mu n-2\mu+1)y^{2\mu n-2\mu}+N,$$

d. h. durch gerade ganze Functionen von y vom jedesmaligen Grade $2\mu n-2\mu$ ausdrücken. Fafst man nun irgend eine bestimmte Potenz von x, z. B. die $2h+1$te ins Auge, so wird man dieselbe nur in den ersten $h+1$ Gliedern der Reihe (6.), welche $\mu = 0, 1, 2,$ bis h entsprechen, finden, denn in den folgenden Gliedern fängt $\frac{t^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}$ schon gleich mit höheren Potenzen von x an. Die Potenzen von y, mit welchen diese bestimmte Potenz von x multiplicirt ist, übersteigen in jenen $h+1$ ersten Gliedern nirgends die $(2hn-2h)$te, und diese letztere selbst kommt nur in dem einzigen $h+1$ten Gliede, und zwar mit $n(2n-1)(3n-2)\ldots.(2hn-2h+1)$ multiplicirt vor, so dafs das Potenzproduct $y^{2hn-2h}x^{2h+1}$ den Quotienten aus der eben geschriebenen Zahl durch $(2h+1)!$ zum Coëfficienten hat. In der nach x und y geordneten Reihe (6.) kommt folglich jede Potenz x^{2h+1} von x nur mit solchen Potenzen von y multiplicirt vor, deren Exponenten $\leqq 2(n-1)h$ sind; d. h. das allgemeine Potenzproduct $x^{2h+1}y^{2k}$ der entwickelten Reihe (6.) genügt der Bedingung

$$(\beta.) \qquad k \leqq (n-1)h,$$

und wenn $k=(n-1)h$, so läfst sich der Coëfficient des Potenzproductes a priori bestimmen; für elliptische Functionen wird er $=1$.

Da die beiden Doppelreihen (5.) und (6.) für jeden Werth von x und y übereinstimmen müssen und nur verschiedene Anordnungen einer und derselben Doppelreihe nach steigenden Potenzen und Potenzproducten von x und y bilden, so können auch Glieder, welche der erstern fehlen, in der zweiten nicht vorkommen, und umgekehrt. Die einzige Doppelreihe, in welche die beiden, aus Entwicklung von (5.) und (6.) hervorgehenden, verschmelzen, vereinigt demnach die beiden Bedingungen (α.) und (β.) in sich, und man hat folgendes Theorem, bei welchem noch zu bemerken, dafs man aus der Entwicklung von $\frac{\varphi(t+u)+\varphi(t-u)}{2\Delta y}$ sofort die von $\frac{\varphi(t+u)-\varphi(t-u)}{2\Delta(x)}$ erhält, wenn man t mit u und x mit y vertauscht, und dafs man aus diesen beiden Entwicklungen $\varphi(t+u)$ und $\varphi(t-u)$ selbst erhält, wenn man die erste mit $\Delta(y)$, die zweite mit $\Delta(x)$ multiplicirt und addirt, resp. subtrahirt.

Theorem.

Es sei $x=\varphi(t)$ diejenige Function von t, welche mit t zugleich verschwindet und der Differentialgleichung $\frac{\partial x}{\partial t}=\Delta(x)$ genügt, oder, was

dasselbe ist, für welche

$$t = \int_0 \frac{\partial x}{\Delta(x)},$$

wo $\Delta(x)$ *die Quadratwurzel aus einer ganzen und geraden Function* $2n^{ten}$ *Grades von* x *bezeichnet, in welcher wir den ersten und letzten Coëfficienten* $= 1$ *annehmen. Wenn man* $\varphi(u) = y$ *setzt und folgende Entwicklungen für* $\varphi(t+u)$ *und* $\varphi(t-u)$ *annimmt:*

$$\varphi(t+u) = \Sigma C_{h,k} x^{2h+1} y^{2k} \Delta(y) + \Sigma C_{h,k} y^{2h+1} x^{2k} \Delta(x),$$
$$\varphi(t-u) = \Sigma C_{h,k} x^{2h+1} y^{2k} \Delta(y) - \Sigma C_{h,k} y^{2h+1} x^{2k} \Delta(x),$$

so kommen in den Reihen, welche sich auf die ganzen positiven und Nullwerthe von h *und* k *beziehen, nur diejenigen Werthe von* h *und* k *vor, welche gleichzeitig den beiden Bedingungen*

$$h \leqq (n-1)k, \qquad k \leqq (n-1)h$$

genügen; für alle andern Werthe von h *und* k *wird* $C_{h,k} = 0$. *Ausserdem nimmt der Coëfficient* $C_{h,k}$ *für* $h = (n-1)k$ *den Werth*

$$\frac{n \cdot (2n-1)(3n-2) \ldots . ((2k-1)n - 2k + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . \; 2k}$$

und für $k = (n-1)h$ *den Werth*

$$\frac{n \cdot (2n-1)(3n-2) \ldots . (2hn - 2h + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . (2h+1)}$$

an.

Für den speciellen Fall der elliptischen Functionen, in welchem $n = 2$ ist, werden die Bedingungen des Theorems

$$h \leqq k \quad \text{und} \quad k \leqq h;$$

sie reduciren sich also auf $k = h$ und der Coëfficient $C_{h,h}$ wird $= 1$; die Reihen verwandeln sich daher in diesem Fall in einfache geometrische Reihen, welche sich summiren lassen und dann das Additionstheorem geben, nemlich:

$$\varphi(t+u) = \Sigma x^{2h+1} y^{2h} \Delta(y) + \Sigma y^{2h+1} x^{2h} \Delta(x) = \frac{x\Delta(y) + y\Delta(x)}{1 - x^2 y^2},$$

$$\varphi(t-u) = \Sigma x^{2h+1} y^{2h} \Delta(y) - \Sigma y^{2h+1} x^{2h} \Delta(x) = \frac{x\Delta y - y\Delta x}{1 - x^2 y^2}.$$

Um den Beweis unseres Theorems in ein noch helleres Licht zu setzen, will ich durch besondere Buchstaben die Entwicklungs-Coëfficienten der Differentialquotienten und der Potenzen der Integrale t und u bezeichnen. Es sei

$$\frac{\partial^{2\mu}x}{\partial t^{2\mu}} = \alpha_0^{(\mu)}x + \alpha_1^{(\mu)}x^3 + \alpha_2^{(\mu)}x^5 + \text{etc.},$$

$$\frac{\partial^{2\mu+1}y}{\Delta(y)\,\partial u^{2\mu+1}} = \beta_0^{(\mu)} + \beta_1^{(\mu)}y^2 + \beta_2^{(\mu)}y^4 + \text{etc.},$$

$$\frac{t^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} = \gamma_0^{(\mu)}x + \gamma_1^{(\mu)}x^3 + \gamma_2^{(\mu)}x^5 + \text{etc.},$$

$$\frac{u^{2\mu}}{\Delta(y)(2\mu)!} = \delta_0^{(\mu)} + \delta_1^{(\mu)}y^2 + \delta_2^{(\mu)}y^4 + \text{etc.};$$

dann verschwinden, worin der Nerv des Beweises besteht, $\alpha_\sigma^{(\mu)}$ und $\beta_\sigma^{(\mu)}$, sobald $\sigma > (n-1)\mu$ wird, d. h., wenn $(n-1)\mu < \sigma$ ist; und $\gamma_\sigma^{(\mu)}$, $\delta_\sigma^{(\mu)}$ verschwinden, wenn $\sigma < \mu$ ist, d. h. sobald $\mu > \sigma$ wird. Die Seiten rechts von (5.) und (6.) werden nun durch Substitution dieser Reihen:

$$(5.)\qquad \frac{\varphi(t+u)+\varphi(t-u)}{2\Delta(y)}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\{[\alpha_0^{(\mu)}x + \alpha_1^{(\mu)}x^3 + \text{etc.}]\,[\delta_0^{(\mu)} + \delta_1^{(\mu)}y^2 + \delta_2^{(\mu)}y^4 + \text{etc.}]\},$$

$$(6.)\qquad \frac{\varphi(t+u)+\varphi(t-u)}{2\Delta(y)}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\{[\beta_0^{(\mu)} + \beta_1^{(\mu)}y^2 + \beta_2^{(\mu)}y^4 + \text{etc.}]\,[\gamma_0^{(\mu)}x + \gamma_1^{(\mu)}x^3 + \gamma_2^{(\mu)}x^5 + \text{etc.}]\}.$$

Der Coëfficient von $x^{2h+1}y^{2k}$ in (5.) wird folglich

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\alpha_h^{(\mu)}\delta_k^{(\mu)} = C_{h,k},$$

und der Coëfficient desselben Potenzproductes in (6.) wird

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\beta_k^{(\mu)}\gamma_h^{(\mu)} = C_{h,k}.$$

Da nun für alle Werthe von μ, welche k übertreffen, $\delta_k^{(\mu)}$, und für alle Werthe von μ, welche h übersteigen, $\gamma_h^{(\mu)}$ verschwindet, so braucht man die beiden Summen für $C_{h,k}$ statt von $\mu = 0$ bis $\mu = \infty$, nur von $\mu = 0$ bis $\mu = k$ für die erste, und nur von $\mu = 0$ bis $\mu = h$ für die zweite auszudehnen. Also

$$C_{h,k} = \sum_{\mu=0}^{\mu=k}\alpha_h^{(\mu)}\delta_k^{(\mu)} = \sum_{\mu=0}^{\mu=h}\beta_k^{(\mu)}\gamma_h^{(\mu)}.$$

Da nun andrerseits $\alpha_h^{(\mu)}$ für alle Werthe von μ, welche $(n-1)\mu < h$ machen, und $\beta_k^{(\mu)}$ für alle Werthe von μ, die $(n-1)\mu < k$ machen, verschwindet, so verschwindet die ganze erste Summe, wenn $(n-1)k < h$ ist, und die ganze zweite Summe, wenn $(n-1)h < k$; wenn $(n-1)k = h$ ist, so reducirt sich die erste Summe auf das einzige Glied

$$\alpha_{(n-1)k}^{(k)}\delta_k^{(k)} = \frac{n(2n-1)(3n-2)\ldots((2k-1)n-2k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2k},$$

welches $\mu = k$ entspricht; und wenn $(n-1)h = k$ ist, so reducirt sich die zweite Summe auf ihr letztes Glied

$$\beta^{(h)}_{(n-1)h}\gamma^{(h)}_h = \frac{n(2n-1)(3n-2)\ldots.(2hn-2h+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots.(2h+1)}.$$

Im Allgemeinen wird man in der ersten Summe für $C_{h,k}$ alle diejenigen Anfangswerthe von μ vernachlässigen, welche $(n-1)\mu < h$ machen, und die Summe, statt mit $\mu = 0$, erst mit demjenigen kleinsten Werthe von μ anfangen lassen, welcher zuerst $(n-1)\mu \geqq h$ macht. Liegt dieses Minimum von μ schon über k hinaus, so hat die Summe natürlich gar keine Glieder, und verschwindet: liegt dasselbe aber zwischen 0 und k, oder fällt mit k zusammen, so enthält die Summe wirklich so viele Glieder, als es ganze Zahlen von diesem Minimum an incl. bis zu k incl. giebt; nämlich für μ sind alle ganzen Werthe zu setzen, welche

$$\frac{h}{n-1} \leqq \mu \leqq k$$

machen, deren Anzahl übrigens $1 + E\left(k - \frac{h}{n-1}\right)$ beträgt; was für elliptische Functionen in 1 übergeht. In derselben Weise kann man die zweite Summe, statt von $\mu = 0$, erst von demjenigen kleinsten Werthe von μ anfangen lassen, welcher zum ersten Male $(n-1)\mu \geqq k$ macht, und die Summe hat gar keine Glieder, wenn dieses Minimum von μ schon über h hinausliegt, da die Summe sich nur bis h erstreckt; liegt dagegen dieses Minimum unter h oder fällt mit h zusammen, welches geschieht, wenn $(n-1)h \geqq k$ ist, so sind für μ alle diejenigen Werthe zu nehmen, welche

$$\frac{k}{n-1} \leqq \mu \leqq h$$

machen, deren Anzahl $1 + E\left(h - \frac{k}{n-1}\right)$ beträgt; für elliptische Functionen 1.

Nur bei einigen Folgerungen, die man aus diesen Betrachtungen ziehen kann, verweile ich einen Augenblick, die übrigen dem Leser überlassend. Ich multiplicire die Gleichung

$$C_{h,k} = \sum_{\mu=0}^{\mu=k} \alpha^{(\mu)}_k \delta^{(\mu)}_k = \sum_{\mu=0}^{\mu=h} \beta^{(\mu)}_k \gamma^{(\mu)}_h$$

mit x^{2h+1}, summire nach h von $h = 0$ bis $h = \infty$, und erhalte

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=k} \delta^{(\mu)}_k \cdot \frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}} = \sum_{h=0}^{k=\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{\mu=h} \beta^{(\mu)}_k \gamma^{(\mu)}_h\right) x^{2k+1} = \sum_{h=E\left(\frac{k}{n-1}\right)}^{h=(n-1)k} C_{h,k}\, x^{2h+1},$$

was sich für elliptische Functionen auf x^{2k+1} reducirt. Ich multiplicire dieselbe Gleichung mit y^{2k}, summire nach k von $k = 0$ bis $k = \infty$ und erhalte

$$\sum_{k=E\left(\frac{h}{n-1}\right)}^{k=(n-1)h} C_{h,k}\, y^{2k} = \sum_{\mu=0}^{\mu=h} \gamma_h^{(\mu)} \cdot \frac{\partial^{2\mu+1} y}{\Delta(y)\,\partial u^{2\mu+1}}, \text{ folglich auch}$$

$$\Delta(x) \sum_{k=E\left(\frac{h}{n-1}\right)}^{k=(n-1)h} C_{h,k}\, x^{2k} = \sum_{\mu=0}^{\mu=h} \gamma_h^{(\mu)} \cdot \frac{\partial^{2\mu+1} x}{\partial t^{2\mu+1}},$$

was sich für elliptische Funtionen links auf x^{2h} reducirt. Man vergleiche auch *Jacobi* „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum" Seite 126.

Ich nehme noch folgende Entwicklungen an, um sie in die Formel des Theorems zu substituiren:

$$x^{2\mu+1} = \eta_0^{(\mu)} t + \eta_1^{(\mu)} t^3 + \eta_2^{(\mu)} t^5 + \text{ etc.},$$
$$x^{2\mu}\Delta(x) = \vartheta_0^{(\mu)} + \vartheta_1^{(\mu)} t^2 + \vartheta_2^{(\mu)} t^4 + \text{ etc.};$$

und die ähnlichen zwischen y und u. Setzt man diese Reihen, in welchen $\eta_\sigma^{(\mu)}$ und $\vartheta_\sigma^{(\mu)}$ gleich Null sind, sobald $\mu > \sigma$ ist, in die Formel

$$\varphi(t+u) = \Sigma C_{h,k} x^{2h+1} y^{2k} \Delta(y) + \Sigma C_{h,k} y^{2h+1} x^{2k} \Delta(x),$$

so erhält man

$$\varphi(t+u) = \Sigma C_{h,k} x^{2h+1} (\vartheta_0^{(k)} + \vartheta_1^{(k)} u^2 + \text{ etc.}) + \Sigma C_{h,k} x^{2k} \Delta(x) \eta_0^{(h)} u + \eta_1^{(h)} u^3 + \text{ etc.}),$$
$$\varphi(t+u) = \Sigma C_{h,k} y^{2k} \Delta(y) (\eta_0^{(h)} t + \eta_1^{(h)} t^3 + \text{etc.}) + \Sigma C_{h,k} y^{2h+1} (\vartheta_0^{(k)} + \vartheta_1^{(k)} t^2 + \text{etc.});$$

ordnet man hier die erste Reihe nach Potenzen von u, die zweite nach Po- von t und vergleicht mit den Entwicklungen von $\varphi(t+u)$, welche der *Taylor*-sche Satz darbietet, so folgt

$$\frac{1}{(2\mu)!} \cdot \frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}} = \sum_{h,k} \vartheta_\mu^{(k)} C_{h,k} x^{2h+1}, \qquad \frac{1}{(2\mu+1)!} \cdot \frac{\partial^{2\mu+1} x}{\partial t^{2\mu+1}} = \sum_{h,k} \eta_\mu^{(h)} C_{h,k} x^{2k} \Delta(x),$$

$$\frac{1}{(2\mu+1)!} \cdot \frac{\partial^{2\mu+1} y}{\partial u^{2\mu+1}} = \Sigma \eta_\mu^{(h)} C_{h,k} y^{2k} \Delta(y), \qquad \frac{1}{(2\mu)!} \cdot \frac{\partial^{2\mu} y}{\partial u^{2\mu}} = \Sigma \vartheta_\mu^{(k)} C_{h,k} y^{2h+1}.$$

In diesen Reihen verschwinden $\eta_\mu^{(h)}$ und $\vartheta_\mu^{(k)}$, sobald $h > \mu$ resp. $k > \mu$ ist, und da $C_{h,k}$ verschwindet, sobald $k > (n-1)h$ und sobald $h > (n-1)k$ ist, so erhält man auf diese Weise wiederum rückwärts die Entwicklung des 2μten Differentialquotienten von x nach t oder von y nach u durch eine ganze Function vom Grade $2\mu(n-1)+1$, und die des $2\mu+1$ten Differential-quotienten durch das Product einer ganzen Function vom Grade $2\mu(n-1)$ in $\Delta(x)$. Es läfst sich hieraus mit Leichtigkeit beweisen, dafs die Eigenschaft, welche das obige allgemeine Theorem ausspricht, eine *ausschliefsliche* Eigen-schaft der *Abel*schen Integrale bildet, so dafs jede Function, welche dem Theo-rem Genüge leistet, nothwendig die Umkehrung eines *Abel*schen Integrals ist.

Berlin, im Februar 1847.

V. Über die Differentialgleichungen, welchen der Zähler und der Nenner bei den elliptischen Transformationsformeln genügen.

Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche *Jacobi* zur Bestimmung des Zählers und Nenners der Transformationsformeln für die elliptischen Functionen aufgestellt hat, haben mich von jeher mit dem gröfsten Interesse erfüllt. Schon in einer frühern Arbeit versuchte ich zu denselben auf einem Wege zu gelangen, welcher von demjenigen verschieden ist, welchen *Jacobi* eingeschlagen hat *). Wenn ich nun wiederum auf denselben Gegenstand zurückkomme, so geschieht dies, weil ich jetzt die einfachsten und wahren Principien für die Ableitung jener Differentialgleichungen gefunden zu haben glaube: Principien, welche auch bei andern Untersuchungen von Nutzen sein können, und die ich deshalb hier mittheilen will.

Wenn irgend einer Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln x und y ein algebraisches Integral genügt, so kann man dasselbe immer auf die Form $U=0$ bringen, wo U eine ganze Function von x und y ist. Es wird angenommen, die Differentialgleichung sei selbst algebraisch, d. h. die Coëfficienten der Differentiale oder der Differentialquotienten seien algebraische Verbindungen aus x und y; man wird übrigens die Differentialgleichung immer auf eine solche Form bringen können, in welcher die Differentiale oder Differentialquotienten nur rational vorkommen und die Coëfficienten in Bezug auf den einen Variabeln, z. B. x, rational sind. Eliminirt man mit Hülfe der aus $U=0$ abgeleiteten Gleichungen $\partial U=0$, $\partial^2 U=0$ u. s. w. aus der vorgelegten Differentialgleichung alle Differentiale von x und y, so wird man zu einem Resultate der Elimination $R=0$ gelangen, in welchem R eine ganze Function von x ist, deren Coëfficienten von y abhängen. Da nun die Gleichung $R=0$ jedesmal erfüllt ist, sobald man in R statt x eine Wurzel der Gleichung $U=0$ setzt, so hat die $R=0$ alle Wurzeln der Gleichung $U=0$; diese Wurzeln sind sämmtlich Functionen von y allein, und da die Gleichung $U=0$, in Bezug auf x aufgelöset, keine *gleichen* Wurzeln haben kann, so lange y allgemein bleibt, so mufs ***R durch U algebraisch theilbar sein;***

*) *Jacobi's* Beweis stützt sich auf die Theorie der Transformation der elliptischen Integrale zweiter Gattung.

setzt man also den Quotienten der Division $= R_1$, so hat man das Resultat

$$R = UR_1,$$

wo R_1 eine neue ganze Function von x ist, deren Grad um den Grad von U niedriger ist, als der von R; übrigens ist R_1 auch in Bezug auf y ganz, sobald R diese Eigenschaft besitzt und die höchste Potenz von x in U den Coëfficienten 1 hat. Da man aus der vorgelegten Differentialgleichung durch wiederholte Differentiationen neue bilden kann, denen ebenfalls das algebraische Integral $U = 0$ genügt, so wird man unendlich viele solche Resultate der Elimination $R = 0$ erhalten können, denen jedesmal genügt wird, sobald $U = 0$ ist, und man wird unter ihnen dasjenige heraussuchen, oder durch Combination mehrerer ein solches Resultat $R = 0$ zu erhalten suchen, in welchem der Grad von R und demnach auch der von R_1 möglichst niedrig ist. Um nun R_1 zu finden, differentiire man die Gleichung $R = UR_1$, in welcher x und y als unabhängige Variabeln angesehen werden können, nach x allein; dies giebt

$$R' = UR_1' + U'R_1,$$

und für alle Werthe von x, welche $U = 0$ machen, hat man also $R' = U'R_1$ und $R_1 = \frac{R'}{U'}$. Gelingt es nun mit Hülfe der vorgelegten Differentialgleichung diesen speciellen Werth von R_1, welcher in Form eines Quotienten erscheint, unter der Voraussetzung $U = 0$ durch eine ganze Function von x auszudrücken, welche ich mit S_1 bezeichnen will, so sind die beiden ganzen Functionen R_1 und S_1 einander gleich für alle Werthe von x, die $U = 0$ machen, und es ist, für dieselben Werthe von x, $R_1 - S_1 = 0$, und demnach ist $R_1 - S_1$ für alle Werthe von x algebraisch durch U theilbar; man hat daher eine Gleichung von der Form

$$R_1 = UR_2 + S_1,$$

wo R_2 wiederum ganz in Bezug auf x und von niederem Grade als R_1 ist. Fährt man auf diese Weise fort die Bestimmung von R_2 auf die einer Function von niederem Grade, u. s. w., zurückzuführen, so gelangt man zuletzt entweder auf eine Constante in Bezug auf x, oder auf eine Function, welche sich durch andere Methoden bestimmen läfst. Wenn das Verfahren gelingt, so sieht man leicht, dafs man zu einem Ausdrucke für R geführt wird, welcher gewissermafsen nach Potenzen von U geordnet ist, und da R nur aus den partiellen Differentialquotienten von U nach x und y zusammengesetzt ist, so erhält man eine partielle Differentialgleichung zur Bestimmung von U. Führt man in dieser partiellen Differentialgleichung die Differentiationen nach y

wirklich aus, so erhält man eine totale Differentialgleichung in Bezug auf x, welche, da sie ganz unabhängig von dem Werthe von y gilt, in Bezug auf y gehörig zerfällt werden kann und dann eine Reihe von totalen Differentialgleichungen liefert, welche zur Bestimmung der Coëfficienten in U, als reiner Functionen von x dienen.

Um von diesen allgemeinen Betrachtungen, welche sich auch auf mehr als zwei Variabeln ausdehnen lassen, zu unserem Gegenstande zurückzukommen, sei, wenn es möglich ist, $U = 0$ ein algebraisches Integral einer Differentialgleichung von der Form

$$\frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{\partial y}{\sqrt{\psi(y)}},$$

wo $\varphi(x)$ eine ganze Function von x vom Grade μ und $\psi(y)$ eine beliebige Function von y sein mag. Der Grad von U, in Bezug auf x, welchen ich nach *Abel's* Vorgange durch δU bezeichnen will, sei $= n$. Um die Rechnung abzukürzen, sei statt x eine neue Variable t durch die Relation $\frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}} = \partial t$ eingeführt, so dafs unsere Differentialgleichung

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sqrt{\psi(y)}, \qquad \partial y^2 = \psi(y)\partial t^2$$

wird. Die Differentiation der Gleichung $U = 0$ giebt

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t} = 0,$$

und wenn man die in $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)$ enthaltene irrationale Function $\sqrt{\varphi(x)}$ eliminirt, so erhält man

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung ist wirklich eine ganze Function von x vom Grade $2n + \mu - 2$, denn es ist $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2$ $= \varphi(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$, wo $\varphi(x)$ vom Grade μ, $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$ vom Grade $n-1$, $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$ vom Grade $2n-2$, also $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2$ vom Grade $2n+\mu-2$, während $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$ von demselben Grade wie U, also $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2$ vom Grade $2n$ ist; sobald demnach $\mu \geqq 2$ ist, so ist der ganze obige Ausdruck vom Grade $2n+\mu-2$. Da nun jene ganze Function

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2$$

für jeden der Gleichung $U = 0$ genügenden Werth von x verschwindet, so ist sie durch U algebraisch theilbar. Es sei

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = UV;$$

dann ist V vom Grade $n+\mu-2$, nämlich $\delta V = 2n+\mu-2-\delta U = n+\mu-2$. Um V zu finden, oder wenigstens den speciellen Werth, den V annimmt, wenn für x eine Wurzel der Gleichung $U = 0$ gesetzt wird, differentiire man nach t allein, indem man y als constant ansieht und setze nachher $U = 0$; man erhält

$$2\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) - 2\psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial y}\right) = V\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right).$$

Um den Ausdruck zur Linken durch $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)$ dividiren zu können, mufs man für $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$ seinen Werth aus der Gleichung $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t} = 0$, oder $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\sqrt{\psi(y)}$ setzen; man erhält so, wenn man sogleich mit $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)$ dividirt:

$$2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) + 2\sqrt{\psi(y)}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial y}\right) = V.$$

Dieser Ausdruck für den *speciellen* Werth von V, obgleich sehr einfach, kann doch nicht zum weitern Fortschritt und zur Auffindung des *allgemeinen* Werthes von V benutzt werden, denn er ist keine ganze Function von x*); zwar ist $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)$ eine solche, aber nicht $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial y}\right)$, was noch die Irrationalität $\sqrt{\varphi(x)}$ enthält; man mufs also $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial y}\right)$ durch einen andern Ausdruck ersetzen. Differentiirt man nun die Gleichung $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ noch einmal nach allem t, so erhält man

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0;$$

dies von dem Ausdrucke für V,

$$V = 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t} \text{ subtrahirt, giebt}$$

$$V = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

---

*) Allgemein ist hier ein Werth, wenn in ihm die Variabeln x und y gänzlich von einander unabhängig angenommen werden können; speciell, wenn er nur in sofern gültig ist, als die Variabeln x und y mit einander durch die Gleichung $U = 0$ verknüpft werden.

Dieser Ausdruck für V ist sicher eine ganze Function von x, denn

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\varphi(x) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\varphi'(x)$$

ist ganz und vom Grade $n+\mu-2$; $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$ und $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)$ sind, ebenso wie U, ganz und vom Grade n, weil die partielle Differentiation nach y in dieser Hinsicht gar nichts ändern kann; endlich $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \psi(y)$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\psi'(y)$ enthalten x gar nicht; es ist also wirklich der zuletzt aufgestellte Ausdruck für V ganz in x, und wir sehen, dafs er vom Grade $n+\mu-2$, also sein Grad $= \delta V$ ist. Die Differenz zwischen dem allgemeinen V und jenem Ausdruck ist folglich, nach den im Anfange auseinandergesetzten allgemeinen Principien, durch U theilbar und man hat für jeden Werth von x und y:

$$V = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + UW,$$

wo W eine ganze Function von x ist. Der Grad von W ist leicht zu bestimmen, denn es ist $\delta(UW) = \delta V = n+\mu-2$, $\delta U = n$, folglich $\delta W = \mu-2$; der Grad von W ist also, was sehr wesentlich zu bemerken, gänzlich unabhängig von dem Grade von U und hängt nur von dem der Function $\varphi(x)$ ab.

Setzt man nun den jetzt gefundenen allgemeinen Werth von V in die Gleichung

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = UV,$$

ersetzt $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ durch ihre Werthe $\psi(y)$ und $\frac{1}{2}\psi'(y)$, und überträgt die Differentiationen nach t, wenn man will, auf solche nach x, so erhält man ein sehr allgemeines Theorem, nämlich eine partielle Differentialgleichung für U, welche man zerfällen kann, sobald die Zusammensetzung von U in Bezug auf y festgesetzt wird.

Es sei U von der Form $P+Qy$, wo P und Q von y unabhängig sind, $\delta P = n$, $\delta Q = n-1$ und in P der Coëfficient des höchsten Gliedes $= 1$ ist; dann ist also, wenn man U nach x ordnet, der Coëfficient des höchsten Gliedes $= 1$, und die übrigen Coëfficienten sind von der Form $a+by$, wo a und b constant sind. Ferner seien $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ ganze Functionen vom vierten Grade. Unter diesen Voraussetzungen, welche bei der Transformation der elliptischen Integrale Statt finden, hat man $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = Q$, $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)y$, $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right)y$, $\delta W = 2$. Nach Ein-

setzung dieser Werthe geht die partielle Differentialgleichung in

$$(1.)\quad \left\{\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)y\right\}^2-\psi(y)\,Q^2=U\left\{\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right)y-\tfrac{1}{2}Q\psi'(y)+UW\right\}$$

über. Man überzeugt sich leicht nach der für U festgesetzten Form, dafs V sowohl als W auch in Bezug auf y ganz sein werden. Was die Grade dieser ganzen Functionen in Bezug auf y betrifft, so wird der Grad des Ausdrucks

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2-\psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2,$$

welcher $=UV$ ist, offenbar gleich dem vom $\psi(y)$, also $=4$, mithin der von V gleich 3; von demselben Grade 3 ist offenbar auch der für $V-UW$ gewonnene Ausdruck

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)-\tfrac{1}{2}Q\psi'(y);$$

denn dessen Grad in Bezug auf y ist gleich dem von $\psi'(y)$, weil $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)$ nur vom ersten, dagegen $\psi'(y)$ vom dritten Grade ist; folglich ist auch UW vom dritten (höchstens) und W also vom zweiten Grade in y. W ist also sowohl in x als in y vom zweiten Grade, und man kann setzen:

$$W=p+qy+ry^2,$$

wo p, q, r vom zweiten Grade in x und von y unabhängig sind. Es bleibt also nun weiter nichts zu thun, als diesen Werth von W in die Gleichung (1.) zu setzen, Alles auf beiden Seiten nach Potenzen von y zu ordnen und die Coëfficienten derselben Potenzen einander gleich zu setzen. Man erhält durch diese Zerfällung, da beide Seiten der Gleichung (1.) in Bezug auf y vom fünften Grade sind, sechs Gleichungen, von denen aber nur drei totale Differentialgleichungen für P und Q sind, während die übrigen drei zur Bestimmung der drei Functionen von x, zweiten Grades, p, q und r benutzt werden können. Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes, welche keine Schwierigkeiten hat, überlasse ich dem Leser, da es mir nur darauf ankam, die Principien und die Methode so klar als möglich auseinanderzusetzen.

IV. Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind.

1.

So wie bei den Kreisfunctionen unendliche Producte vorkommen, deren Factoren dadurch definirt werden, dafs sie der Reihe nach für alle Werthe der Variabeln verschwinden, welche Glieder einer nach beiden Seiten fortgesetzten arithmetischen Folge sind, d. h. für alle Werthe von der Form $\alpha m+\beta$, wenn m alle ganzen (positiven, negativen und Null) Zahlen von $-\infty$ bis ∞ und α, β Constanten vorstellen: so setzen sich die elliptischen Functionen aus unendlichen Doppelproducten zusammen, bei welchen die Wurzelwerthe der einzelnen Factoren durch die Glieder einer arithmetischen Reihe mit doppeltem Eingang bestimmt werden, d. h. durch die Glieder einer Doppelreihe, deren allgemeines Glied die Form $\alpha m+\beta n+\gamma$ hat, wo m und n gleichzeitig und unabhängig von einander alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞ durchlaufen. Die bei den Kreisfunctionen vorkommenden unendlichen Producte sind also von der Form

$$\Pi\left\{1-\frac{x}{\alpha m+\beta}\right\},$$

und die bei den elliptischen Functionen vorkommenden unendlichen Doppelproducte sind von der Form

$$\Pi\left\{1-\frac{x}{\alpha m+\beta n+\gamma}\right\}.$$

Ehe ich zu der genauen Untersuchung dieser letztern unendlichen Doppelproducte übergehe, will ich zunächst einen Augenblick bei der Betrachtung des Ausdruckes $\alpha m+\beta n+\gamma$ selbst verweilen, in welchem die drei Constanten α, β, γ im Allgemeinen irgend welche complexe Werthe haben können. Es sei

$$\alpha m+\beta n+\gamma = u.$$

Diesen Ausdruck u kann man als eine Form ansehen, durch welche gewisse Werthe dargestellt werden können. Die Natur des Ausdrucks hängt in dieser Hinsicht offenbar hauptsächlich von dem Verhältnifs der beiden Coëfficienten α und β ab, und γ spielt nur eine Nebenrolle. Wenn α zu β in reellem und rationalem Verhältnifs steht, d. h., wenn der Quotient $\frac{\beta}{\alpha}$ einer

reellen und rationalen Zahl gleich ist, so stellt der Ausdruck u jeden Werth, welchen er darstellt, unendlich oft dar, d. h. es giebt dann jedesmal unendlich viele zusammengehörige Paare von ganzen Werthen m, n, für welche u einen und denselben Werth annimmt; denn es sei in der That, wenn dieser Fall Statt findet, $\frac{\beta}{\alpha}$ in den kleinsten Zahlen rational ausgedrückt $= \frac{\nu}{\mu}$, wo μ und ν ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler sind, und man setze $\alpha = \mu\delta$, $\beta = \nu\delta$, so wird

$$u = \delta(\mu m + \nu n) + \gamma,$$

und da hier der Ausdruck $\mu m + \nu n$ jede ganze Zahl und jede unendlich oft darstellt, so sind die Werthe des Ausdrucks u nichts anders, als die Werthe von $\delta m + \gamma$, wenn man jeden derselben unendlich oft geschrieben denkt; mit andern Worten: u stellt nur die Glieder einer *einfachen* arithmetischen Reihe dar, aber jedes derselben unendlich oft; in diesem Falle würde also das unendliche Doppelproduct nichts anders sein, als ein unendliches einfaches Product, in welchem man jeden Factor unendlich oft geschrieben hätte, der Werth des Products wäre also stets unendlich grofs, und deshalb ist dieser Fall unbedingt auszuschliefsen; aus denselben Gründen ist natürlich der Fall auszuschliefsen, wenn einer der beiden Coëfficienten α, β (oder gar beide) Null wären. Wenn zweitens α zu β in reellem, aber irrationalem Verhältnisse steht, so sei $\beta = \omega\alpha$ und ω reell, aber irrational; der Ausdruck u wird dann zu

$$u = \alpha(m + n\omega) + \gamma.$$

Hier kann, da ω irrational ist, nach einem bekannten Satze, $m + n\omega$ jeder beliebigen reellen Gröfse so nahe kommen, als man will, und zwar geschieht dies für unendlich viele Paare m, n; es kann also auch u jedem Werthe von der Form $\alpha k + \gamma$, wo k beliebig reell ist, für unendlich viele ganze Werthe m, n beliebig nahe rücken. Diese Folgerung ist aber in Bezug auf das unendliche Doppelproduct ebenso wenig annehmbar, als die des ersten Falles, und deshalb der zweite Fall gleich dem ersten zu verwerfen; man müfste denn festsetzen, dafs für m und n nicht *alle* ganzen Werthe genommen werden sollen, sondern nur solche, welche noch einer gewissen Bedingung genügen, etwa der, dafs ein dem u ähnlicher Ausdruck $\alpha' m + \beta' m + \gamma'$ oder vielmehr dessen analytischer Modul stets zwischen ganz bestimmten Grenzen eingeschlossen bleiben solle. Es bleibt noch der dritte Fall, wenn α zu β in imaginärem Verhältnifs steht, wenn also der reelle Theil des Quotienten der beiden complexen Zahlen α und β von Null verschieden ist. Dieser Fall hat nicht die Schwie-

rigkeiten der andern beiden Fälle; denn während dort die Anzahl der ganzen Werthe von m und n, für welche der analytische Modul von u zwischen bestimmten Grenzen liegt, stets unendlich grofs ist, sobald sie von 0 verschieden ist, d. h. sobald nur überhaupt irgend ein Werth des Moduls von u zwischen jene Grenzen fällt: so ist hier dagegen diese Anzahl stets endlich und begrenzt. Es möge der analytische Modul einer complexen Zahl durch den Buchstaben M bezeichnet werden, so dafs $M(p+qi) = +\sqrt{(p^2+q^2)}$, wenn p und q reell sind; es sei ferner $\alpha = a+a'i$, $\beta = b+b'i$, $\gamma = c+c'i$. Setzt man $am+bn+c = v$, welches der reelle Theil von u ist, und $a'm+b'n+c' = v'$, welches der Coëfficient von i in u ist, so erhält man $M(u) = \sqrt{(v^2+v'^2)}$; soll nun $M(u)$ zwischen gewissen Grenzen liegen, so müssen um so mehr v und v', abgesehn vom Zeichen, zwischen denselben Grenzen liegen, also liegen auch $v-c$ und $v'-c'$ dann zwischen ganz bestimmten Grenzen, und da die Determinante $ab'-ba'$ des linearen Systems von Gleichungen

$$am+bn = v-c,$$
$$a'm+b'n = v'-c',$$

durch welches man m und n in $v-c$ und $v'-c'$ ausdrücken kann, in unserem Falle von 0 verschieden ist, so sind auch m und n zwischen bestimmte Grenzen eingeschlossen, und da zwischen diesen nur eine endliche Anzahl von *ganzen* Werthen liegen, so existirt um so mehr nur eine endliche Anzahl von ganzen Werthenpaaren m, n, für welche $M(u)$ zwischen den gegebenen Grenzen liegt. Namentlich giebt es also nur eine endliche Anzahl von Combinationen m, n, welche den analytischen Modul von u kleiner machen, als irgend ein gegebner positiver Werth. Wir setzen demnach hier stets das Verhältnifs der beiden Coëfficienten α und β als imaginär voraus. Diese Betrachtungen sind nicht neu, aber es schien mir nicht unpassend, sie hier besonders hervorzuheben.

Die Eigenschaften eines Products lassen sich am besten untersuchen, wenn man die Logarithmen der einzelnen Factoren betrachtet. Die Variable x in unserem Producte $\Pi\left(1-\frac{x}{u}\right)$ wird als beliebig complex vorausgesetzt. Der Logarithmus von $1-\frac{x}{u}$ läfst sich in eine convergente Reihe nach Potenzen von x entwickeln, sobald $M(u) > M(x)$ ist; es ist daher zweckmäfsig, von dem Producte vor der Hand diejenigen Factoren auszuschliefsen, in welchen $M(u) \leqq M(x)$ ist; die Anzahl dieser auszuschliefsenden Factoren ist nach

dem Vorhergehenden endlich, und es werde das Product der übrigen durch

$$\Pi'\left(1-\frac{x}{u}\right)$$

bezeichnet, in welchen also m und n nur diejenigen ganzen Werthe durchlaufen, welche der Bedingung $M(u) > M(x)$ genügen. Unter dieser Voraussetzung ist

$$\log\left(1-\frac{x}{u}\right) = -\frac{x}{u} - \frac{x^2}{2u^2} - \frac{x^3}{3u^3} - \frac{x^4}{4u^4} - \text{etc.},$$

folglich der Logarithmus des ganzen Productes

$$(1.) \quad = -x\Sigma'\frac{1}{u} - \frac{x^2}{2}\Sigma'\frac{1}{u^2} - \frac{x^3}{3}\Sigma'\frac{1}{u^3} - \frac{x^4}{4}\Sigma'\frac{1}{u^4} - \text{etc.};$$

die Summen mit accentuirtem Zeichen Σ' erstrecken sich ebenfalls nur über diejenigen ganzen Werthe von m und n, welche der Bedingung $M(u) > M(x)$ genügen, und die Anordnung der Werthe von u in diesen Doppelsummen, d. h. die Reihenfolge, in welcher die Glieder addirt werden, ist dieselbe, als diejenige, in welcher die Factoren des Products multiplicirt werden sollen. Diese Umformung des Logarithmen des Productes ist statthaft, sobald man zeigen kann, dafs die Summen, welche die Coëfficienten der Reihe (1.) bilden, convergent sind, und dafs die Reihe (1.) selbst convergirt, unabhängig von der Reihenfolge ihrer Glieder; also auch dann noch, wenn man statt aller Glieder ihre analytischen Moduln setzt. Was nun zunächst die Coëfficienten der Reihe betrifft, so werde ich beweisen, dafs sie vom dritten ab inclusive, also die Coëfficienten von x^3, x^4, x^5, in inf. nicht blofs convergiren, sondern sogar gänzlich unabhängig von der Anordnung der Werthe u sind und stets ganz bestimmte und immer dieselben Werthe annehmen, in welcher Reihenfolge man auch die Glieder der Summen beim Addiren auf einander folgen läfst; die Coëfficienten von x und x^2 dagegen, nämlich die Summen $\Sigma'\frac{1}{u}$ und $\Sigma'\frac{1}{u^2}$ können zwar convergent sein, wenn man ihre Glieder in passender Reihenfolge addirt, aber sie sind weder stets convergent, bei jeder Reihenfolge, noch behalten sie immer denselben Werth, wenn man von einer Anordnung der Glieder, bei welcher sie convergiren, zu einer andern übergeht. Es convergiren nämlich die Summen

$$\Sigma'\frac{1}{u^\mu}$$

unabhängig von der Anordnung der Glieder, und auch dann noch, wenn man statt aller Glieder ihre analytischen Moduln setzt, so oft der Exponent $\mu > 2$

ist. Ersetzt man in der That alle Glieder in dieser Reihe durch ihre analytischen Moduln, indem man α, β, γ in ihre complexen Werthe $\alpha = a + a'i$, $\beta = b + b'i$, $\gamma = c + c'i$ auflöset und demnach $u = am + bn + c + i(a'm + b'n + c')$,

$$M(u) = ((am + bn + c)^2 + (a'm + b'n + c')^2)^{\frac{1}{2}}$$

setzt, so erhält man

$$\Sigma' \frac{1}{\{(am + bn + c)^2 + (a'm + b'n + c')^2\}^{\frac{\mu}{2}}};$$

es ist also blofs zu beweisen, dafs

$$\Sigma \frac{1}{\{(am + bn + c)^2 + (a'm + b'n + c')^2\}^{\mu}}$$

convergirt, wenn $\mu > 1$ ist. Dieser Satz ist nur ein specieller Fall eines viel allgemeineren, welchen ich, da er auch bei andern Untersuchungen von Nutzen sein kann, hier in Folgendem auseinandersetzen will.

Die τfache Reihe

$$\Sigma \frac{1}{\{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \ldots + m_\tau^2\}^{\mu}},$$

in welcher alle Indices m_1, m_2, m_3, ... m_τ alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞ durchlaufen mit Ausschlufs der einen Combination

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 0, \quad \ldots. \quad m_\tau = 0,$$

convergirt, wenn $\mu > \frac{1}{2}\tau$ ist.

Man beweiset zunächst, dafs die Reihe convergirt, wenn die Indices blofs alle positiven ganzen Werthe durchlaufen. Man theile die ganze Reihe unter dieser letztern Voraussetzung in Partialreihen, auf die Art, dafs in derjenigen von diesen Partialreihen, welche ich durch $(k_1, k_2, \ldots. k_\tau)$ bezeichne, die Indices den folgenden Beschränkungen unterworfen sind:

$$(K.) \quad \begin{cases} 2^{k_1} \leqq m_1 < 2^{k_1+1}, \\ 2^{k_2} \leqq m_2 < 2^{k_2+1}, \\ 2^{k_3} \leqq m_3 < 2^{k_3+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2^{k_\tau} \leqq m_\tau < 2^{k_\tau+1}, \end{cases}$$

wo $k_1, k_2, \ldots. k_\tau$ combinando nach und nach jede der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, in inf. vorstellen können. Die Anzahl der diesen Beschränkungen genügenden Werthe beträgt für jeden einzelnen Index $2^{k+1} - 2^k = (2-1)2^k = 2^k$, also beträgt die Anzahl der Combinationen der Indices

$$m_1, \; m_2, \; m_3, \; \ldots. \; m_\tau,$$

welche jenen Bedingungen genügen offenbar $2^{k_1}\cdot 2^{k_2}\ldots 2^{k_\tau}=2^{\Sigma k}=2^{\tau\varkappa}$, wenn durch $\varkappa=\frac{k_1+k_2+\ldots+k_\tau}{\tau}$ das arithmetische Mittel aller k bezeichnet wird; dies ist die Anzahl der Glieder der Partialreihe. Was die Glieder selbst betrifft, so zieht man aus den obigen Ungleichungen die folgende:

$$\Sigma 2^{2k}\leqq m_1^2+m_2^2+m_3^2+\ldots+m_\tau^2<\Sigma 2^{2k+2},$$

folglich um so mehr $2^{2\varkappa}\leqq\Sigma m^2$, da $\varkappa$ nicht gröfser als wenigstens eine der Zahlen $k_1, k_2, \ldots k_\tau$, also $2^{2\varkappa}<\Sigma 2^{2k}$ ist; und hieraus wiederum

$$\frac{1}{(m_1^2+m_2^2+m_3^2+\ldots+m_\tau^2)^\mu}\leqq\frac{1}{2^{2\varkappa\mu}};$$

folglich sind sämmtliche einzelne Glieder der Partialreihe nicht gröfser als $\frac{1}{2^{2\varkappa\mu}}$, und da ihre Anzahl, wie schon bemerkt, $2^{\varkappa\tau}$ beträgt, so ist die Summe aller Glieder der Partialreihe nicht gröfser als

$$\frac{2^{\varkappa\tau}}{2^{2\varkappa\mu}}=\frac{1}{2^{\varkappa(2\mu-\tau)}}=\frac{1}{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}k_1}}\cdot\frac{1}{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}k_2}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}k_\tau}};$$

die Summe aller Partialreihen, für welche $k_1, k_2, \ldots k_\tau$ sämmtlich nicht gröfser als die bestimmte Zahl k sind, ist mithin nicht gröfser als

$$\sum_{k_1=0}^{k_1=k}\sum_{k_2=0}^{k_2=k}\ldots\sum_{k_\tau=0}^{k_\tau=k}\frac{1}{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}k_1}}\cdot\frac{1}{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}k_2}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}k_\tau}}$$

$$=\left\{1+\frac{1}{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}}}+\frac{1}{2^{2\frac{2\mu-\tau}{\tau}}}+\frac{1}{2^{3\frac{2\mu-\tau}{\tau}}}+\ldots+\frac{1}{2^{k\frac{2\mu-\tau}{\tau}}}\right\}^\tau.$$

Diese geometrische Reihe convergirt für $k=\infty$, sobald $2\mu-\tau$ positiv, also $\mu>\frac{1}{2}\tau$ ist, und hat dann zur Summe

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}}}}=\frac{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}}}{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}}-1}.$$

Es ist also die Summe aller dieser Partialsummen, d. h. die Summe aller Glieder der vorgelegten Reihe, für welche die Indices den Bedingungen genügen,

$$0<m_1<2^{k+1},\quad 0<m_2<2^{k+1},\quad 0<m_3<2^{k+1},\quad \ldots\quad 0<m_\tau<2^{k+1}$$

kleiner als $\left\{\frac{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}}}{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}}-1}\right\}^\tau=\frac{2^{2\mu-\tau}}{\left(2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}}-1\right)^\tau}$, so grofs auch k genommen wird, wenn nur der Exponent μ gröfser als die halbe Ordnung der Reihe $\frac{1}{2}\tau$ ist. Da man nun, wenn die Summationen in der vorgelegten Reihe sich von $m_1=1$ bis

$m_1 = M_1$, $m_2 = 1$ bis $m_2 = M_2$, ... $m_\tau = 1$ bis $m_\tau = M_\tau$ erstrecken, immer k so grofs annehmen kann, dafs 2^{k+1} gröfser als die gröfste der Zahlen M_1, M_2, ... M_τ wird, so ist hiermit die Convergenz der Reihe erwiesen und zugleich, dafs ihre Summe $\leqq \frac{2^{2\mu-\tau}}{\left(2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}}-1\right)^\tau}$ ist. Für negative Werthe der Indices erhält die Reihe denselben Werth, als für positive, da in ihr nur die Quadrate der Indices vorkommen. Es bleibt noch der Fall, wenn einer oder einige der Indices, z. B. σ derselben, wo $0 < \sigma < \tau$ ist, den Werth Null haben, d. h. es bleiben noch diejenigen Glieder der ursprünglich vorgelegten Reihe zu betrachten, in welchen σ Indices den Werth Null erhalten. Dieser Theil der Reihe kann als eine $(\tau-\sigma)$fache Summe von derselben Form als die vorgelegte und mit den $\tau-\sigma$ nicht verschwindenden übrigen Indices angesehen werden, welche nach dem vorhergehenden sicher convergirt, da ja um so mehr $\mu > \frac{1}{2}(\tau-\sigma)$ ist, wenn schon $\mu > \frac{1}{2}\tau$ war. Da also auf diese Weise die ursprüngliche Reihe aus einer endlichen Anzahl von convergirenden Reihen zusammengesetzt wird, so convergirt sie ebenfalls. Man könnte übrigens ebenso leicht zeigen, dafs sie nothwendig divergirt, sobald $\mu \leqq \frac{1}{2}\tau$ ist. Auf dieselbe Weise könnte man auch den noch allgemeineren Satz nachweisen, dafs die τfache Reihe $\Sigma \frac{1}{(m_1^\nu + m_2^\nu + \ldots + m_\tau^\nu)^\mu}$ convergirt oder divergirt, je nachdem $\mu > \frac{\tau}{\nu}$ oder $\leqq \frac{\tau}{\nu}$ ist; nur mufs man bemerken, dafs die Summe nur positive Werthe der Indices umfassen darf, wenn ν ungerade ist.

Der eben bewiesene Satz über die Convergenz einer Gattung von rein numerischen Reihen dient nur als Hülfssatz, um die Convergenz einer allgemeineren Gattung darzuthun, welche eine grofse Anzahl von constanten Coëfficienten in sich schliefst.

Denn man nehme irgend ein System von τ^2 ***reellen*** Constanten a an, wie:

$$(A.)\quad \begin{cases} a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & a_1^{(3)}, & \ldots. & a_1^{(\tau)}, \\ a_2^{(1)}, & a_2^{(2)}, & a_2^{(3)}, & \ldots. & a_2^{(\tau)}, \\ a_3^{(1)}, & a_3^{(2)}, & a_3^{(3)}, & \ldots. & a_3^{(\tau)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_\tau^{(1)}, & a_\tau^{(2)}, & a_\tau^{(3)}, & \ldots. & a_\tau^{(\tau)}, \end{cases}$$

welche der einzigen Bedingung unterworfen sind, dafs die aus dem System gebildete Determinante von ***Null*** verschieden sein soll, und formire mit Hülfe dieser Constanten als Coëfficienten τ lineare und homogene Verbindungen w der τ Indices m_1, m_2, ... m_τ, nämlich

$$\begin{aligned} w_1 &= a_1^{(1)} m_1 + a_1^{(2)} m_2 + \ldots + a_1^{(\tau)} m_\tau , \\ w_2 &= a_2^{(1)} m_1 + a_2^{(2)} m_2 + \ldots + a_2^{(\tau)} m_\tau , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_\tau &= a_\tau^{(1)} m_1 + a_\tau^{(2)} m_2 + \ldots + a_\tau^{(\tau)} m_\tau ; \end{aligned}$$

man nehme ferner noch τ andere ***reelle*** Constanten $c_1, c_2, \ldots c_\tau$ an und bilde die Verbindung

$$(w_1+c_1)^2 + (w_2+c_2)^2 + \ldots + (w_\tau+c_\tau)^2 = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} (w_\sigma+c_\sigma)^2 = \Omega,$$

welche als eine Function der τ Indices $m_1, m_2, \ldots m_\tau$ zu betrachten ist, und insofern die allgemeinste positive Form zweiten Grades mit τ Variabeln vorstellt; dann behaupte ich, dafs die τfache Reihe

$$\Sigma \frac{1}{\Omega^\mu},$$

in welcher alle Indices m unabhängig von einander alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞ durchlaufen *), ebenfalls convergirt, sobald der Exponent $\mu > \frac{1}{2}\tau$ ist.

Man wähle irgend ein System von τ nicht negativen ganzen Zahlen $k_1, k_2, \ldots k_\tau$ und betrachte alle ganzen Werthe der Indices $m_1, m_2, \ldots m_\tau$, welche den folgenden τ Bedingungen Genüge leisten:

$$(K.) \quad \begin{cases} k_1 \leqq M(w_1+c_1) < k_1+1, \\ k_2 \leqq M(w_2+c_2) < k_2+1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_\tau \leqq M(w_\tau+c_\tau) < k_\tau+1, \end{cases}$$

deren allgemeine Form $k \leqq M(w+c) < k+1$ ist. Die Anzahl dieser Werthe ist stets endlich und läfst sich in ganz bestimmte Grenzen einschliefsen, welche von den ganzen Zahlen $k_1, k_2, \ldots k_\tau$ ***unabhängig*** sind. Wenn man nämlich die linearen Gleichungen, welche die w durch die m ausdrücken, algebraisch nach den m auflöset, so erhält man ein ganz bestimmtes System von τ^2 neuen Coëfficienten:

$$(B.) \quad \begin{cases} b_1^{(1)}, & b_1^{(2)}, & b_1^{(3)}, & \ldots & b_1^{(\tau)}, \\ b_2^{(1)}, & b_2^{(2)}, & b_2^{(3)}, & \ldots & b_2^{(\tau)}, \\ b_3^{(1)}, & b_3^{(2)}, & b_3^{(3)}, & \ldots & b_3^{(\tau)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_\tau^{(1)}, & b_\tau^{(2)}, & b_\tau^{(3)}, & \ldots & b_\tau^{(\tau)}, \end{cases}$$

---

*) Es kann höchstens eine einzige Combination der Indices geben, für welche $\Omega = 0$ ist, nämlich für welche die sämmtlichen τ Gröfsen von der Form $w+c$ verschwinden; diese Combination ist, wenn sie existirt, in der Reihe auszuschliefsen.

mit deren Hülfe die m durch die w linear ausgedrückt werden, wie folgt:

$$\begin{aligned} m_1 &= b_1^{(1)} w_1 + b_1^{(2)} w_2 + b_1^{(3)} w_3 + \ldots + b_1^{(\tau)} w_\tau, \\ m_2 &= b_2^{(1)} w_1 + b_2^{(2)} w_2 + b_2^{(3)} w_3 + \ldots + b_2^{(\tau)} w_\tau, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_\tau &= b_\tau^{(1)} w_1 + b_\tau^{(2)} w_2 + b_\tau^{(3)} w_3 + \ldots + b_\tau^{(\tau)} w_\tau. \end{aligned}$$

Dies erfordert aber wesentlich, dafs die Determinante des Systems (*A.*) und somit auch die des Systems (*B.*) von Null verschieden sei, wie wir es vorausgesetzt haben. Da nun in den Ungleichheiten (*K.*) die Moduln der Gröfsen von der Form $w+c$ vorkommen, so ist es passend, $w+c$ durch $M(w+c)$ auszudrücken und $w+c = \varepsilon M(w+c)$ zu setzen, wo ε sowohl $=+1$ als $=-1$ sein kann, da $w+c$ sowohl positiv als negativ genommen werden darf. Man setze nämlich

$$w_1+c_1 = \varepsilon_1 M(w_1+c_1), \quad w_2+c_2 = \varepsilon_2 M(w_2+c_2), \quad \text{u. s. w.},$$

wo jeder der Buchstaben ε_1, ε_2, u. s. w. jeden der beiden Werthe ± 1 haben kann; die Anzahl dieser Zeichen-Combinationen ist 2^τ. Jede der Gleichungen von der Form

$$m = b^{(1)} w_1 + b^{(2)} w_2 + \ldots + b^{(\tau)} w_\tau,$$

wo der untere Index von m und von b irgend einer aus der Reihe 1, 2, 3 bis τ sein kann, läfst sich zunächst auf die Form

$$m = b^{(1)}(w_1+c_1) + b^{(2)}(w_2+c_2) + \ldots + b^{(\tau)}(w_\tau+c_\tau) - (b^{(1)}c_1 + b^{(2)}c_2 + \ldots + b^{(\tau)}c_\tau),$$

und dann auf die Form

$$\begin{aligned} m &= \varepsilon_1 b^{(1)} M(w_1+c_1) + \varepsilon_2 b^{(2)} M(w_2+c_2) + \ldots + \varepsilon_\tau b^{(\tau)} M(w_\tau+c_\tau) \\ &\quad - (b^{(1)}c_1 + b^{(2)}c_2 + \ldots + b^{(\tau)}c_\tau) \\ &= \Sigma \varepsilon_\sigma b^{(\sigma)} M(w_\sigma+c_\sigma) - \Sigma b^{(\sigma)} c_\sigma \end{aligned}$$

bringen, wo in den Summen σ die Werthe 1, 2, 3, ... τ (*t.*) erhält. Nun liefert jede Ungleichheit von der Form

$$k \leqq M(w+c) < k+1,$$

in welcher der untere Index von k, w, und c irgend eine Zahl σ aus der Reihe (*t.*) sein kann, wenn man sie mit εb multiplicirt, wo der untere Index von ε und der obere von b ebenfalls σ ist, eine andere, entweder von der Form

$$\varepsilon bk \leqq \varepsilon b M(w+c) < \varepsilon bk + \varepsilon b,$$

oder von der Form

$$\varepsilon bk + \varepsilon b < \varepsilon b M(w+c) \leqq \varepsilon bk,$$

je nachdem εb positiv oder negativ ist; addirt man alle diese Ungleichheiten, welche den verschiedenen Werthen von σ entsprechen und berücksichtigt hier-

bei die eben erwähnte Verschiedenartigkeit der Form, so erhält man

$$\Sigma\varepsilon_\sigma b^{(\sigma)} k_\sigma + p \leqq \Sigma\varepsilon_\sigma b^{(\sigma)} M(w_\sigma + c_\sigma) \leqq \Sigma\varepsilon_\sigma b^{(\sigma)} k_\sigma + q,$$

wo p die Summe aller negativen und q die Summe aller positiven Glieder der Reihe

$$\varepsilon_1 b^{(1)},\ \varepsilon_2 b^{(2)},\ \varepsilon_3 b^{(3)},\ \ldots.\ \varepsilon_\tau b^{(\tau)}$$

bezeichnet. Subtrahirt man in dieser letzteren Ungleichheit von allen Gliedern die Gröfse $\Sigma b^{(\sigma)} c_\sigma$, so wird das zwischen den Zeichen $\leqq$ stehende nach dem Obigen der Werth von m, und man erhält

$$\Sigma b^{(\sigma)}(\varepsilon_\sigma k_\sigma - c_\sigma) + p \leqq m \leqq \Sigma b^{(\sigma)}(\varepsilon_\sigma k_\sigma - c_\sigma) + q.$$

Wenn eine *ganze Zahl* m, wie hier, zwischen zwei reelle Grenzen eingeschlossen ist, oder mit diesen zusammenfällt, so kann die Anzahl ihrer Werthe nie gröfser sein als die um eine Einheit vermehrte Differenz der Grenzen: hier ist die Differenz der Grenzen offenbar $= q - p$, d. h. gleich der Summe der absoluten Werthe der Gröfsen $\varepsilon_1 b^{(1)},\ \varepsilon_2 b^{(2)},\ \varepsilon_3 b^{(3)},\ \ldots.\ \varepsilon_\tau b^{(\tau)}$, folglich $= \Sigma M(b^{(\sigma)})$, und die Zahl der Werthe von m, welche zwischen diesen Grenzen eingeschlossen sind, oder mit ihnen zusammenfallen, ist daher höchstens $= 1 + \Sigma M(b^{(\sigma)})$. Die Ungleichung, durch welche m zwischen bestimmte Grenzen eingeschlossen wird, steht für τ Ungleichheiten, welche aus ihr hervorgehen, wenn man m und die b nach und nach mit jeder der Zahlen aus der Reihe $(t.)$ als unterem Index versieht; es ist folglich die Anzahl der Werthe von m_1, von m_2, von m_3, u. s. w., welche diesen Bedingungen der Reihe nach genügen, höchstens und respective

$$= 1 + \Sigma M(b_1^{(\sigma)}),\quad = 1 + \Sigma M(b_2^{(\sigma)}),\quad = 1 + \Sigma M(b_3^{(\sigma)}),\ \text{u. s. w. f.};$$

die Anzahl der Combinationen von ganzen Werthen $m_1, m_2, m_3, \ldots. m_\tau$, welche allen diesen τ Bedingungen zugleich genügen, ist demnach höchstens gleich dem Producte

$$[1 + \Sigma M(b_1^{(\sigma)})][1 + \Sigma M(b_2^{(\sigma)})][1 + \Sigma M(b_3^{(\sigma)})] \ldots. [1 + \Sigma M(b_\tau^{(\sigma)})],$$

und da diese Schlüsse für jede der 2^τ Zeichen-Combinationen gelten, durch welche die Werthe von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots. \varepsilon_\tau$ bestimmt werden, und deren jeder ein solches System von Ungleichheiten für $m_1, m_2, \ldots. m_\tau$ entspricht, so ist im Ganzen die Anzahl aller Combinationen von ganzen Werthen $m_1, m_2, m_3, \ldots.$, welche den Bedingungen $(K.)$ genügen, gewifs nie gröfser als

$$2^\tau \prod_{\sigma'=1}^{\sigma'=\tau} \{1 + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} M(b_{\sigma'}^{(\sigma)})\}.$$

Wird dieses letztere Product durch C bezeichnet, so kann also jene Anzahl

nie gröfser sein, als die Constante C, welche, wie es behauptet wurde, gänzlich unabhängig von den ganzen Zahlen $k_1, k_2, k_3, \ldots$ ist und stets dieselbe bleibt, welche Werthe man auch den letzteren beilegt. Im Allgemeinen: wenn $k_1, k_2, \ldots k_\tau$; $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_\tau$ irgend welche 2τ positive Werthe haben, so ist die Anzahl der Combinationen ganzer m, welche den Bedingungen

$$\begin{aligned} k_1 &\leqq M(w_1+c_1) < k_1+\delta_1, \\ k_2 &\leqq M(w_2+c_2) < k_2+\delta_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_\tau &\leqq M(w_\tau+c_\tau) < k_\tau+\delta_\tau \end{aligned}$$

genügen, stets $\leqq 2^\tau(1+\Sigma\delta_\sigma M(b_1^{(\sigma)}))(1+\Sigma\delta_\sigma M(b_2^{(\sigma)}))\ldots(1+\Sigma\delta_\sigma M(b_\tau^{(\sigma)}))$, und wenn $k_1, k_2, \ldots$ irgend welche reelle, $\delta_1, \delta_2, \ldots$ aber irgend welche positive Werthe haben, so ist die Anzahl der Combinationen ganzer m, welche den Bedingungen

$$\begin{aligned} k_1 &\leqq w_1+c_1 < k_1+\delta_1, \\ k_2 &\leqq w_2+c_2 < k_2+\delta_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_\tau &\leqq w_\tau+c_\tau < k_\tau+\delta_\tau \end{aligned}$$

genügen, stets $\leqq (1+\Sigma\delta_\sigma M(b_1^{(\sigma)}))(1+\Sigma\delta_\sigma M(b_2^{(\sigma)}))\ldots(1+\Sigma\delta_\sigma M(b_\tau^{(\sigma)}))$; die obere Grenze für diese Anzahlen ist also stets unabhängig von den Zahlen $k_1, k_2, \ldots$ und hangt nur von den Differenzen $\delta_1, \delta_2, \ldots$ ab. Es ist dies ein höchst wichtiger und bei vielen Anwendungen, welche die Verallgemeinerung specieller Sätze betreffen, unentbehrlicher Satz, dessen Beweis sich jedoch, so viel ich bemerkt habe, noch nirgends findet. Sollte er dessenungeachtet schon irgendwo gegeben sein, so verzichte ich gern auf die Priorität, auf welche ich auch in Bezug auf viele andere Dinge gern verzichten will, dürfte ich nur dadurch des oft sehr lästigen und Zeit raubenden Durchstöberns aller möglichen Bücher überhoben sein, in welchen möglicherweise über diesen oder jenen Gegenstand schon etwas angedeutet sein könnte, um so mehr, da meine Verhältnisse mir nicht erlauben, stets eine reichhaltige Literatur bei der Hand zu haben.

Wenn man in der Reihe $\Sigma\frac{1}{\Omega^\mu}$ den Complex derjenigen Glieder betrachtet, für welche die Indices $m_1, m_2, \ldots m_\tau$ den Ungleichheiten (K.) genügen: wenn man diesen Complex, der als eine Partialreihe betrachtet werden kann, durch $(k_1, k_2, \ldots k_\tau)$ bezeichnet, und nun in diesem Ausdrucke $(k_1, k_2, \ldots k_\tau)$ die verschiedenen k, unabhängig von einander, alle nicht ne-

gativen ganzen Werthe durchlaufen läfst, so erschöpft man offenbar durch die Totalität aller der unendlich vielen hieraus hervorgehenden Partialreihen alle Glieder der Reihe $\Sigma\frac{1}{\Omega^\mu}$, und es ist folglich

$$\Sigma\frac{1}{\Omega^\mu} = \Sigma(k_1, k_2, \ldots . k_\tau),$$

wenn in der zweiten Summe k_1, k_2, ... k_τ alle ganzen Werthe von 0 bis ∞ durchlaufen. Von der andern Seite ergeben sich aus den Ungleichheiten (**K**.) die folgenden:

$$k_1^2 \leqq (w_1+c_1)^2 < (k_1+1)^2, \quad k_2^2 \leqq (w_2+c_2)^2 < (k_2+1)^2, \text{ u. s. w., mithin}$$
$$k_1^2+k_2^2+\ldots .+k_\tau^2 \leqq (w_1+c_1)^2+(w_2+c_2)^2+\ldots .+(w_\tau+c_\tau)^2$$
$$< (k_1+1)^2+(k_2+1)^2+\ldots .+(k_\tau+1)^2,$$

und wenn nicht alle k der Null gleich sind, so folgt hieraus

$$\frac{1}{(w_1+c_1)^2+(w_2+c_2)^2+\text{etc.}} \leqq \frac{1}{k_1^2+k_2^2+\ldots .+k_\tau^2}, \quad \frac{1}{\Omega^\mu} \leqq \frac{1}{(k_1^2+k_2^2+\ldots .+k_\tau^2)^\mu}.$$

Es sind folglich, mit Ausschlufs der Partialreihe (0, 0, ... 0), alle Glieder der Partialreihe $(k_1, k_2, \ldots . k_\tau)$ nicht gröfser als $\frac{1}{(k_1^2+k_2^2+\ldots .+k_\tau^2)^\mu}$, und da die Anzahl der Glieder dieser Partialreihe nicht gröfser ist, als die Constante C, welche für alle Partialreihen dieselbe bleibt, so ist die Summe aller Glieder der Partialreihe nicht gröfser als $\frac{C}{(k_1^2+k_2^2+\ldots .+k_\tau^2)^\mu}$; dieses Resultat gilt für alle Partialreihen mit Ausschlufs der einzigen (0, 0, ... 0); zerlegt man daher die Reihe $\Sigma\frac{1}{\Omega^\mu}$ in die Partialreihe (0, 0, ... 0) und in die Summe aller übrigen Partialreihen und wendet auf jede dieser übrigen das eben gefundene Resultat an, indem man besonders bemerkt, dafs C für alle Partialreihen denselben Werth hat, so erhält man

$$\Sigma\frac{1}{\Omega^\mu} = \Sigma(k_1, k_2, \ldots . k_\tau) = (0, 0, \ldots . 0) + \Sigma(k_1, k_2, \ldots . k_\tau) \dotplus (0, 0, \ldots . 0)$$
$$\leqq (0, 0, \ldots 0) + C\Sigma\frac{1}{(k_1^2+k_2^2+\ldots .+k_\tau^2)^\mu},$$

wo $\dotplus$ ein Ausschliefsungszeichen ist; da nun die Reihe (0, 0, ... 0) nur eine endliche Anzahl, nämlich nicht mehr als C Glieder enthält und die Reihe $\Sigma\frac{1}{(k_1^2+k_2^2+\ldots .+k_\tau^2)^\mu}$, in welcher die Indices k_1, k_2, ... k_τ alle nicht negativen ganzen Werthe mit Ausschlufs der einen Combination 0, 0, ... 0

durchlaufen, nach der weiter oben angestellten Untersuchung convergirt, wenn $\mu > \frac{1}{2}\tau$ ist, so ist hiermit auch die Convergenz der Reihe $\Sigma\frac{1}{\Omega^\mu}$ für den Fall $\mu > \frac{1}{2}\tau$ nachgewiesen.

Die Doppelreihe $\Sigma\frac{1}{\{(am+bn+c)^2+(a'm+b'n+c')^2\}^\mu}$, welche sich von der andern, in welcher Σ' vor demselben allgemeinen Gliede steht, nur durch das Hinzutreten einer endlichen Anzahl von Anfangsgliedern unterscheidet, ist offenbar unter den eben betrachteten Reihen enthalten, wenn man $\tau = 2$ setzt und die Bedingung hinzufügt, dafs die Determinante $ab'-ba'$ von 0 verschieden sein soll; diese letztere Bedingung ist aber erfüllt, sobald vorausgesetzt wird, wie wir es schon aus anderen Gründen angenommen haben, dafs der Quotient

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a+a'i}{b+b'i} = \frac{(a+a'i)(b-b'i)}{b^2+b'^2} = \frac{ab+a'b'}{b^2+b'^2} - i\cdot\frac{ab'-a'b}{b^2+b'^2}$$

keiner ***reellen*** Zahl gleich sein soll. Es convergirt mithin die Reihe

$$\Sigma'\frac{1}{\{(am+bn+c)^2+(a'm+b'n+c')^2\}^\mu} = \Sigma'\frac{1}{M(u)^{2\mu}}, \text{ sobald } \mu > 1 \text{ ist,}$$

und es convergirt folglich auch die ursprüngliche Reihe $\Sigma'\frac{1}{u^\mu}$, so wie die Reihe $\Sigma\frac{1}{u^\mu}$, in welcher m und n alle ganzen Werthe ohne Beschränkung durchlaufen können, ***unabhängig von der Anordnung der Glieder,*** sobald $\mu > 2$; wenn aber $\mu \leqq 2$ ist, so convergiren diese letzteren beiden Reihen, selbst wenn sie überhaupt convergiren, doch sicher nie unabhängig von der Anordnung der Glieder; denn es fällt nicht schwer, durch Hülfe der obigen Principien auch die Divergenz der Reihen von der Form $\Sigma\frac{1}{\Omega^\mu}$ in allen den Fällen nachzuweisen, wenn $\mu \leqq \frac{1}{2}\tau$ ist. Es bleibt indessen hier noch eine Lücke: es entsteht nämlich die Frage, ob der umgekehrte Satz eines bekannten Satzes richtig ist, ob nämlich eine von der Anordnung der Glieder unabhängig convergirende Reihe stets convergent bleibt, wenn man statt aller Glieder der Reihe deren analytische Moduln nimmt, ob man daher daraus, dafs eine Reihe in eine divergente übergeht, wenn man statt der Glieder deren analytische Moduln schreibt, nothwendig schliefsen darf, dafs die Reihe in ihrer ursprünglichen Form nicht unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren könne. Wenn alle Glieder der Reihe reell sind, so mufs für sich allein die Summe aller positiven, so wie die Summe aller negativen Glieder eine convergente Reihe bilden.

und deshalb convergirt dann auch die Summe der absoluten Werthe aller Glieder; wenn aber die Glieder complex (imaginär) sind, so bringe man das allgemeine Glied auf die Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, wo r der Modul des Gliedes ist: dann müssen auch die beiden Reihen, deren allgemeine Glieder $r\cos\varphi$ und $r\sin\varphi$ sind, unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren, und da in ihnen die Glieder reell sind, so müssen sie diese Eigenschaft auch behalten, wenn für $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ stets nur der absolute Werth gesetzt wird; da nun abgesehn vom Zeichen $\cos\varphi < 1$, $\sin\varphi < 1$ und deshalb $\cos\varphi^2 < \cos\varphi$, $\sin\varphi^2 < \sin\varphi$ ist, so müssen um so mehr die Reihen, deren allgemeine Glieder $r\cos\varphi^2$ und $r\sin\varphi^2$ sind, in demselben Sinne convergiren, denn sie entstehen durch Verkleinerung des numerischen Werthes aller Glieder aus den beiden vorhergehenden. Jene Reihen, welche nun aus lauter positiven Gliedern $r\cos\varphi^2$, $r\sin\varphi^2$ zusammengesetzt sind, geben durch Addition eine ebenfalls convergente Reihe, deren allgemeines Glied $= r(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) = r$ ist, nämlich gleich dem analytischen Modul des allgemeinen Gliedes der ursprünglichen Reihe, und somit ist also der angezogene Satz aufser Zweifel gestellt. Die strenge Sonderung der Reihen, welche ihre Convergenz einer besondern Anordnung verdanken und welche bei einer Änderung dieser Anordnung theils divergent werden, theils ihre Summe ändern können, von denen, welche ganz unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren und stets dieselbe Summe behalten, in welcher Reihenfolge man auch die Glieder aufeinander folgen lasse, ist wohl hauptsächlich ***Dirichlet*** zu verdanken, welcher in seiner vortrefflichen Abhandlung über die Arithmetische Progression in sehr interessante Details über diesen Gegenstand eingeht.

2.

Nachdem das eine der drei Probleme, auf welche die Reihe (1.) führt, absolvirt ist, nämlich der Nachweis, dafs die Reihen von der Form $\Sigma'\frac{1}{u^\mu}$ und $\Sigma\frac{1}{u^\mu}$, wenn der Exponent $\mu > 2$ ist, unabhängig von der Reihenfolge ihrer Glieder convergiren, gehe ich zu dem Beweise der Convergenz der Reihe (1.) selbst über, welche auch dann noch Statt findet, wenn man statt aller Glieder ihre analytischen Moduln setzt. Zunächst kann man beliebig viele Anfangsglieder der Reihe weglassen, da diese zur Convergenz oder Divergenz nichts beitragen können; es ist für die folgenden Schlüsse nur nöthig, die beiden ersten Glieder wegzulassen. Ferner kann man die numerischen Multiplicatoren $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ... der einzelnen Glieder ebenfalls weglassen, da diese

Multiplicatoren die Convergenz, wenn sie Statt findet, nicht vermindern. Es handelt sich also darum, die Convergenz der folgenden Reihe nachzuweisen:

$$(Mx)^3 M\left(\Sigma' \frac{1}{u^3}\right) + (Mx)^4 M\left(\Sigma' \frac{1}{u^4}\right) + (Mx)^5 M\left(\Sigma' \frac{1}{u^5}\right) + \text{in inf.},$$

deren allgemeines Glied

$$M(x)^\mu M\left(\Sigma' \frac{1}{u^\mu}\right)$$

ist, und wo μ alle ganzen positiven Werthe von 3 bis ∞ durchläuft. Nach einem bekannten Satze, welcher bei der geometrischen Repräsentation der complexen Zahlen (imaginären Gröfsen) nichts anderes besagt, als dafs eine Seite eines Polygons kleiner ist, als die Summe aller übrigen, oder dafs die gerade Linie der kürzeste Weg zwischen zwei Puncten ist, weifs man, dafs der analytische Modul einer Summe kleiner ist (oder wenigstens nicht gröfser) als die Summe der analytischen Moduln aller einzelnen Summanden; man hat folglich

$$M\left(\Sigma' \frac{1}{u^\mu}\right) < \Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu},$$

und wenn daher die Reihe convergirt, deren allgemeines Glied

$$M(x)^\mu \Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu}$$

ist, so wird die vorgelegte Reihe *a fortiori* convergiren; denn da man alle Glieder der vorgelegten Reihe verkleinert, sobald man $\Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu}$ statt $M\left(\Sigma' \frac{1}{u^\mu}\right)$ substituirt, so wird die vorgelegte Reihe gewifs convergiren, sobald die neue Reihe diese Eigenschaft besitzt. Die Convergenz dieser letztern Reihe kann man nach den bekannten Methoden auf zwei Arten beweisen, indem man entweder zeigt, dafs der Quotient aus dem $\mu+1$ten Gliede durch das μte Glied mit wachsendem μ gegen eine Grenze convergirt, die unter der Einheit liegt, oder indem man zeigt, dafs die μte Wurzel aus dem μten Gliede für wachsende μ ebenfalls gegen eine Grenze < 1 convergirt. Nach der oben festgesetzten Bedeutung des Zeichens Σ' erhalten in der Summe $\Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu}$ die Indices m und n nur solche Werthe, welche $M(u) > M(x)$ machen; es sei M_0 der kleinste der Werthe, welche unter dieser Beschränkung der stets positive Ausdruck $M(u)$ für alle ganzen Werthe der Indices annehmen kann und C sei die Anzahl der Combinationen $m, n,$ für welche $M(u) = M_0$ wird; diese Anzahl ist nach dem Obigen endlich; ferner sei M_1 der der Gröfse nach auf diesen M_0 folgende Werth von $M(u)$, d. h. es sei M_1 der kleinste Werth.

welchen $M(u)$ für alle ganzen Werthe der Indices unter der Beschränkung $M(u) > M_0$ annimmt; die drei Gröfsen $M(x)$, M_0 und M_1 genügen dann der Ungleichheit

$$M(x) < M_0 < M_1,$$

und der Reihe $\Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu}$ kann man, wenn man die C Anfangsglieder, für welche $M(u) = M_0$ ist, herauszieht, die Form

$$\Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu} = \frac{C}{M_0^\mu} + \Sigma'' \frac{1}{M(u)^\mu}$$

geben, wo die zweite Summe sich über alle diejenigen ganzen Werthe von m und n erstreckt, für welche $M(u) \geqq M_1$ wird, für welche also auch

$$\frac{1}{M(u)} \leqq \frac{1}{M_1}$$

ist. Wählt man eine bestimmte Zahl ν, welche > 2 ist, z. B. $\nu = 3$, erhebt die eben geschriebene Ungleichheit, welche sich auf alle Glieder der Reihe Σ'' bezieht, auf beiden Seiten zur Potenz $\mu - \nu$, welches für ein hinlänglich grofses μ (z. B. $\mu > 3$) stets positiv ist, und multiplicirt dann beide Seiten mit $\frac{1}{M(u)^\nu}$, so leitet man aus jener Ungleichheit die folgende ab:

$$\frac{1}{M(u)^\mu} \leqq \frac{1}{M_1^{\mu-\nu}} \cdot \frac{1}{M(u)^\nu},$$

und diese liefert, wenn man über alle der Bedingung genügenden Combinationen der Indices summirt:

$$\Sigma'' \frac{1}{M(u)^\mu} < \frac{1}{M_1^{\mu-\nu}} \Sigma'' \frac{1}{M(u)^\nu}.$$

Letztere Summe $\Sigma'' \frac{1}{M(u)^\nu}$ ist eine ganz bestimmte Constante, welche von μ nicht abhängt; man hat demnach folgende obere Grenze für $\Sigma \frac{1}{M(u)^\mu}$ gefunden, nämlich, wenn man die Constante

$M_1^\nu \Sigma'' \frac{1}{M(u)^\nu}$, für welche man z. B.

$M_1^3 \Sigma'' \frac{1}{M(u)^3}$ wählen kann, durch δ bezeichnet, so ist

$$\Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu} < \frac{C}{M_0^\mu} + \frac{\delta}{M_1^\mu}.$$

Als untere Grenze für dieselbe Summe bietet sich unmittelbar der Ausdruck $\frac{C}{M_0^\mu}$ dar, und man hat demnach:

$$\frac{C}{M_0^\mu} < \Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu} < \frac{C}{M_0^\mu} + \frac{\delta}{M_1^\mu};$$

wenn man hier $\mu+1$ statt μ setzt, so ergiebt sich

$$\frac{C}{M_0^{\mu+1}} < \Sigma' \frac{1}{M(u)^{\mu+1}} < \frac{C}{M_0^{\mu+1}} + \frac{\delta}{M_1^{\mu+1}}.$$

Für den Quotienten der in diesen beiden Ungleichheiten zwischen den Zeichen $<$ stehenden Summen

$$\frac{\Sigma' \frac{1}{M(u)^{\mu+1}}}{\Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu}}$$

erhält man demnach eine untere Grenze, wenn man die untere Grenze in der zweiten Ungleichheit durch die obere Grenze in der ersten dividirt, und man erhält für denselben Quotienten eine obere Grenze, wenn man die obere in der zweiten durch die untere in der ersten dividirt; nach einer einfachen Reduction werden diese beiden Grenzen des Quotienten der beiden Summen resp.

$$\frac{C}{CM_0 + \delta M_0 \left(\frac{M_0}{M_1}\right)^\mu} \quad \text{und} \quad \frac{C + \delta \left(\frac{M_0}{M_1}\right)^{\mu+1}}{CM_0};$$

da nun wegen $M_0 < M_1$ die Potenz $\left(\frac{M_0}{M_1}\right)^\mu$ für $\mu = \infty$ verschwindet, so convergiren beide Grenzen für $\mu = \infty$ gegen dieselbe Gröfse $\frac{C}{CM_0} = \frac{1}{M_0}$, und folglich convergirt auch der obige Quotient gegen dieselbe Grenze $\frac{1}{M_0}$. Bei der Reihe, deren Convergenz wir untersuchen und deren allgemeines Glied

$$M(x)^\mu \Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu}$$

ist, wird nun der Quotient aus dem $\mu+1$ten durch das μte Glied gleich dem eben betrachteten Quotienten multiplicirt mit $M(x)$, also wird die Grenze jenes Quotienten für $\mu = \infty$,

$$= \frac{M(x)}{M_0},$$

also offenbar < 1, weil $M_0 > M(x)$ war, folglich u. s. w. Man könnte auf dieselbe Art nachweisen, dafs die μte Wurzel aus $\Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu}$ stets zwischen zwei Grenzen liegt, welche beide für $\mu = \infty$ gegen $\frac{1}{M_0}$ convergiren, und es

würde daraus ebenfalls die Convergenz der in Rede stehenden Reihe hervorgehen; ich will mich aber hierbei nicht aufhalten, sondern gehe zur Lösung des dritten Problems, nämlich zur Betrachtung der Summen $\Sigma'\frac{1}{u}$ und $\Sigma'\frac{1}{u^2}$ über, indem ich untersuche, bei welcher Reihenfolge der Glieder sie convergiren und welche Modificationen sie erleiden, wenn man von einer Anordnung zu einer andern übergeht.

3.

Aus dem Vorhergehenden ist klar, dafs das unendliche Product $\Pi'\left(1-\frac{x}{u}\right)$ convergiren und sein Logarithmus durch die Reihe (1.) ausgedrückt sein wird, sobald man bei der successiven Heranziehung der Factoren zur Bildung des Products unter den Werthen von u dieselbe Reihenfolge beobachtet, welche sie bei den beiden Summen $\Sigma'\frac{1}{u}$ und $\Sigma'\frac{1}{u^2}$ einnehmen müssen, damit letztere beiden convergiren. Da ferner die Coëfficienten von x^3, x^4, u. s. w. in der Reihe des Logarithmen von der Anordnung der Glieder ***unabhängige*** Summen sind, so kann jede Modification, welche durch ein verändertes Arrangement der Factoren des Products eintreten sollte, nur die beiden ersten Glieder der Entwicklung des Logarithmen, nämlich die Coëfficienten von x und x^2 treffen; bezeichnet man demnach die Zuwachse, welche $\Sigma'\frac{1}{u}$ und $\Sigma'\frac{1}{u^2}$ erlangen können, wenn man von einem Arrangement der Glieder zu einem andern übergeht, resp. durch p und q, so erlangt der Logarithmus des Products bei dieser Veränderung einen Zuwachs von der Form $-px-\frac{1}{2}qx^2$, wo p und q von x unabhängig sind und nur von α, β, γ abhangen; das Product selbst erlangt also einen Factor von der Form

$$e^{-px-\frac{1}{2}qx^2}.$$

Man kann die Form von p und q als Functionen von γ a priori angeben. Durch das Zeichen ∇ sei die Modification angegeben oder der Zuwachs, welchen eine Reihe bei der Veränderung der Anordnung ihrer Glieder erleidet, wenn die Convergenz dieser Reihe wesentlich von der Reihenfolge der Glieder abhangt; ist die Reihe unabhängig von der Anordnung der Glieder, so ist ∇ stets $= 0$. Was die einfachsten Operationen mit dem Zeichen ∇ betrifft, so kann man zunächst offenbar bei einer Summe, vor welcher es steht, eine beliebige endliche Anzahl von Anfangsgliedern hinzufügen oder fortlassen; denn

die Summe dieser endlichen Anzahl von Gliedern kann durch Permutation der Glieder keine Modification erleiden; aus demselben Grunde kann man ferner auch eine Gruppe von unendlich vielen Gliedern fortlassen oder hinzufügen, wenn diese Gruppe eine Reihe constituirt, welche unabhängig von der Anordnung der Glieder convergirt. Bei der Berechnung von $\nabla\Sigma'\frac{1}{u}$ und $\nabla\Sigma'\frac{1}{u^2}$ kann man folglich die, eine Anzahl Anfangsglieder ausschliefsende Bedingung $M(u)>M(x)$ fortlassen, und statt ihrer die andere $M(\alpha m+\beta n)>M(\gamma)$ festsetzen, wodurch man zuerst eine gewisse Anzahl von Anfangsgliedern hinzufügt und dann wiederum eine andere ebenfalls endliche Anzahl von Anfangsgliedern ausschliefst. Unter der Bedingung $M(\alpha m+\beta n)>M(\gamma)$ lassen sich die allgemeinen Glieder der beiden Reihen, deren beide Modificationen man sucht, in convergente Reihen nach Potenzen von γ entwickeln; man erhält

$$\frac{1}{\alpha m+\beta n+\gamma}=\frac{1}{\alpha m+\beta n}-\frac{\gamma}{(\alpha m+\beta n)^2}+\frac{\gamma^2}{(\alpha m+\beta n)^3}-\text{ in inf.},$$

$$\frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^2}=\frac{1}{(\alpha m+\beta n)^2}-\frac{2\gamma}{(\alpha m+\beta n)^3}+\frac{3\gamma^2}{(\alpha m+\beta n)^4}-\text{ in inf.}$$

Mit Hülfe dieser Umformungen lassen sich obige Reihen, deren allgemeine Glieder hier entwickelt sind, selbst in Reihen nach Potenzen von γ entwickeln; die Convergenz dieser letztern Reihen folgt unmittelbar aus denselben Principien, durch welche ich oben in §. 2. die Convergenz der Reihe (1.) bewies; in der That sind sie in dieser Beziehung genau von derselben Form, wie die Reihe (1.) und gehen aus derselben hervor, wenn man dort $\gamma=0$ setzt und die numerischen Multiplicatoren $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc., welche auf die Convergenz keinen Einflufs üben, durch andere Multiplicatoren ersetzt, welche eben so wenig die Convergenz weder vermehren noch vermindern. Die Coëfficienten in diesen Reihen nach Potenzen von γ werden Reihen von der Form $\Sigma\frac{1}{(\alpha m+\beta n)^\mu}$, welche unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren, sobald $\mu>2$ wird, wie in §. 1. bewiesen worden ist; man kann daher bei der Bestimmung von ∇ in den Reihen nach Potenzen von γ diejenigen Potenzen von γ weglassen, welche Coëfficienten von jener Form haben, in denen $\mu>2$ ist; dies gestattet also bei der Reihe für $\Sigma'\frac{1}{u}$ die Fortlassung aller Glieder bis auf die beiden ersten, und bei der für $\Sigma'\frac{1}{u^2}$ die Fortlassung aller Glieder bis auf das einzige erste.

Man erhält demnach

$$\nabla\Sigma'\frac{1}{u} = \nabla\Sigma\frac{1}{\alpha m+\beta n}\text{*)} - \gamma\nabla\Sigma\frac{1}{(\alpha m+\beta n)^2}, \text{ und}$$

$$\nabla\Sigma'\frac{1}{u^2} = \nabla\Sigma\frac{1}{(\alpha m+\beta n)^2}.$$

Obgleich die Indices in denjenigen Summen, vor welchen hier zur Rechten das Zeichen ∇ steht, noch der Beschränkung $M(\alpha m+\beta n) > M(\gamma)$ unterworfen sind, so kann man doch diese Beschränkung wiederum fortlassen und braucht nur die einzige Combination $m=0$, $n=0$ auszuschliefsen. Thut man dies und setzt der Kürze wegen für der Augenblick die sowohl von x als von γ unabhängigen Constanten

$$\nabla\Sigma\frac{1}{\alpha m+\beta n} = a \quad \text{und} \quad \nabla\Sigma\frac{1}{(\alpha m+\beta n)^2} = b,$$

so wird $p = a-b\gamma$, $q = b$, und der ganze Zuwachs des Logarithmen von $\Pi\left(1-\frac{x}{u}\right)$ wird von der Form $-(a-b\gamma)x - \frac{1}{2}bx^2 = -ax - \frac{1}{2}bx^2 + b\gamma x$; der Factor, welcher zu dem Producte selbst hinzutreten kann, wenn man von einem convergenten Arrangement der Factoren zu einem anderen ebenfalls convergenten übergeht, ist folglich stets von der Form

$$e^{-(a-b\gamma)x-\frac{1}{2}bx^2},$$

wo die beiden Constanten a, b einzig von α und β abhangen.

Es wird der Gegenstand des folgenden Paragraphen sein, nachzuweisen, dafs die Reihen $\Sigma\frac{1}{(\alpha m+\beta n)^\varrho}$, in welchen $\varrho=1$ oder $=2$ sein kann, convergiren, sobald man die Glieder in der Reihenfolge so auf einander folgen läfst, dafs man erst nach dem einen Index m summirt, indem man je zwei entgegengesetzte Werthe $\pm m$ zusammenfafst, und dann das Resultat der Summation nach m wiederum nach dem andern Index n summirt, indem man ebenfalls je zwei entgegengesetzte Werthe desselben $\pm n$ unmittelbar nach einander nimmt. Hier dagegen will ich für einige der einfachsten und wichtigsten Änderungen dieses Arrangements der Glieder die Werthe der Modificationen $\nabla\Sigma\frac{1}{(\alpha m+\beta n)^\varrho}$ zu bestimmen suchen.

---

*) Es ist hier sehr unwesentlich, zu bemerken, dafs $\Sigma\frac{1}{\alpha m+\beta n}$ bei einem gewissen Arrangement der Glieder den Werth *Null* hat; man mufs aber deshalb nicht glauben, dafs diese Reihe stets den Werth Null hätte.

Wenn man in irgend einer Doppelsumme oder einem unendlichen Doppelproducte eine *durchgreifende* Vertauschung der Glieder anbringen will. d. h. eine solche, welche sich nicht blofs auf einen *endlichen* Theil der Summe oder des Products bezieht: so kann man dies am einfachsten dadurch erreichen, dafs man statt der Indices m und n neue Indices m' und n' einführt, welche mit den ersteren durch Relationen von solcher Form verknüpft sind, dafs jeder Combination von ganzen m, n eine und nur eine Combination von ganzen m', n' und umgekehrt entspricht; d. h. man wird zwei solche Gleichungen zwischen m, n und m', n' annehmen, dafs die Werthe von m' und n', welche sich aus diesen Gleichungen in m und n ausgedrückt finden, stets eindeutig und ganz sind, wenn für m und n ganze Zahlen angenommen werden; und dafs ebenso, wenn man umgekehrt vermittels derselben Gleichungen oder durch deren Auflösung m und n in m' und n' ausdrückt, sich zu ganzen Werthen von m' und n' ebenfalls vollkommen bestimmte und ganze Werthe von m und n ergeben. Die Werthe der neuen Indices können sodann im Allgemeinen bei der Addition oder Multiplication in derselben Folge herangezogen werden, welche zuvor für die früheren Indices festgesetzt oder willkürlich angenommen worden war.

Es giebt zwei Arten solcher Transformationen der Indices, welche eine besondere Beachtung verdienen. Die erste Art besteht darin, dafs man irgend zwei constante ganze Zahlen λ und ν wählt und die Gleichungen

$$m = m' + \lambda, \qquad n = n' + \nu$$

setzt, aus welchen

$$m' = m - \lambda, \qquad n' = n - \nu$$

folgt. Wenn hier m und n alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞ durchlaufen, so durchlaufen m' und n' dieselben Werthe; jeder Combination m, n entspricht eine und nur eine Combination m', n', und umgekehrt; nur dafs der jedesmalige Werth von m' hinter dem von m um λ Einheiten und der von n' hinter dem von n um ν Einheiten zurückbleibt. Bei der zweiten Art von Transformationen der Indices nimmt man zwischen den alten und den neuen Indices ein System von linearen und homogenen Gleichungen

$$m = \lambda m' + \mu n',$$
$$n = \nu m' + \varrho n'$$

an, wo die Coëfficienten $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ ganze Zahlen sind und ein Transformationssystem

$$\begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \nu, & \varrho \end{pmatrix}$$

bilden, dessen Determinante $\lambda\varrho - \mu\nu = \varepsilon = \pm 1$ ist. Diese Gleichungen genügen offenbar den obigen Bedingungen; denn zunächst sind m und n wirklich in m', n' ganzzahlig ausgedrückt, und da die Determinante des Systems der positiven oder negativen Einheit gleich ist, so erhält man durch Auflösung der obigen Gleichungen:

$$m' = \frac{\varrho m - \mu n}{\lambda\varrho - \mu\nu} = \varepsilon\varrho \cdot m - \varepsilon\mu \cdot n,$$

$$n' = \frac{-\nu m + \lambda n}{\lambda\varrho - \mu\nu} = -\varepsilon\nu \cdot m + \varepsilon\lambda \cdot n:$$

ein System, durch welches wiederum m' und n' ganzzahlig in m und n ausgedrückt sind. Als ein specieller Fall dieser zweiten Art von Transformation ist Dasjenige anzusehen, was man gewöhnlich die ***Vertauschung*** der beiden Indices in einem Progressus von zwei Dimensionen zu nennen pflegt; denn diese Vertauschung kommt darauf hinaus, $m = n'$ und $n = m'$ zu setzen, d. h. in obigem Systeme $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $\nu = 1$, $\varrho = 0$ zu nehmen; was eine uneigentliche Transformation giebt, wenn man die Transformationen dieser Art in eigentliche und uneigentliche eintheilen will, je nachdem $\lambda\varrho - \mu\nu = +1$ oder $\lambda\varrho - \mu\nu = -1$ ist.

Die Summen, auf welche die Entwicklung des Logarithmen des in dieser Abhandlung betrachteten Products führt, sind sämmtlich von der Form

$$\Sigma f(\alpha m + \beta n + \gamma) = \Sigma f(u),$$

während das Product selbst von der Form $\Pi f(\alpha m + \beta n + \gamma) = \Pi f(u)$ ist. Durch Einführung der ersten Art von Transformation geht $\alpha m + \beta n + \gamma$ in $\alpha m' + \beta n' + \gamma + \lambda\alpha + \nu\beta$ über, welcher Ausdruck in Bezug auf die neuen Indices genau dieselbe Form hat, wie der vorhergehende, wenn man nur

$$\gamma' = \gamma + \lambda\alpha + \nu\beta$$

an die Stelle von γ gesetzt sich vorstellt. In dem Falle also, wo obige Summen unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren (was wirklich für alle nach dem zweiten folgenden Coëfficienten der Reihe (1.) Statt findet), hat man stets die Gleichung

$$\Sigma f(\alpha m + \beta n + \gamma) = \Sigma f(\alpha m' + \beta n' + \gamma').$$

Diese beiden Summen repräsentiren eine und dieselbe Function, die eine von γ, die andere von γ'; es hat also diese Function die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn man γ' an die Stelle von γ setzt, d. h. wenn man γ um $\lambda\alpha + \nu\beta$, nämlich um ein beliebiges (positives oder negatives) Vielfache von α und um ein beliebiges Vielfache von β vermehrt; alle Reihen also, von der

obigen Form, welche unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren, sind, als Functionen von γ betrachtet, ***doppelt periodische Functionen,*** welche die beiden ***Moduln*** der Periodicität α und β haben; ich nenne nämlich einen ***Modul der Periodicität*** jede Gröfse, wie hier α und β, um welche das Argument einer Function geändert werden kann, ohne dafs die Function sich ändert; Dasselbe, was ***Jacobi*** den ***Index der Periodicität*** nennt; das Wort ***Modul,*** welches schon eine ganz ähnliche Bedeutung in der Arithmetik bei der Theorie der Congruenzen gewonnen hat, scheint mir diesen Begriff weit besser auszudrücken, als das Wort ***Index,*** welches den Summationsbuchstaben oder den Stellenzeiger einer Reihe bezeichnet: in der That, eine Congruenz bleibt ungeändert, wenn man die Variabeln oder unbestimmten Zahlen um Vielfache des Moduls ändert; Dasselbe geschieht bei einer periodischen Function; die Einführung des Wortes Modul in dem eben angegebenen Sinne ist ***Gaufs*** zuzuschreiben, der es, wenn auch nicht ausdrücklich in seinen gedruckten Werken, so doch in einem an mich gerichteten Briefe über die lemniscatischen Functionen in dieser Bedeutung gebraucht.

Auf die beiden Reihen

$$\Sigma\frac{1}{\alpha m+\beta n+\gamma} \quad \text{und} \quad \Sigma\frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^2},$$

deren Summe von der Anordnung der Glieder abhangt, kann man die obigen, aus der Transformation der Indices hervorgehenden Schlüsse nicht anwenden; man kann dagegen die Modificationen oder den Zuwachs erforschen, welchen diese Reihen durch die Transformation der Indices erleiden, und wenn dieser Zuwachs ∇ eine einfache Form annimmt, wie es sich in der That zeigen wird, so hat man Functionen von γ, welche bei der Vermehrung des Arguments um $\lambda\alpha+\nu\beta$ zwar nicht ungeändert bleiben, jedoch nur eine leichte und a priori angebbare Modification erleiden; man kann solche Functionen ***uneigentlich-periodische*** nennen. Bei jeder Transformation der Indices ist, wie wir weiter oben gesehen haben, der Zuwachs der ersten jener beiden Reihen von der Form $a-b\gamma$, wo a und b von γ unabhängig sind, und der Zuwachs der zweiten Reihe ist dann $=b$; man braucht deshalb nur den Zuwachs der ersten zu suchen, weil der der zweiten unmittelbar daraus hervorgeht, wenn man in jenem Zuwachse den Coëfficienten von γ mit entgegengesetztem Zeichen nimmt. Die Summe der Reihe $\Sigma\frac{1}{\alpha m+\beta n+\gamma}$, deren allgemeines Glied $\frac{1}{\alpha m+\beta n+\gamma}$ der Kürze wegen durch $\varphi(m, n)$ bezeichnet sein

mag, wird als die Grenze der endlichen Doppelreihe

$$\sum_{m=-k}^{m=k}\sum_{n=-l}^{n=l}\varphi(m,n)$$

betrachtet, wenn man zuerst k und dann l in infinitum wachsen läfst, und stellt insofern eine ganz bestimmte Function von γ dar. Damit nun die aus der Transformation der Indices hervorgehende neue Reihe dieselbe Function von γ' gebe, mufs dieselbe als die Grenze der folgenden angesehen werden:

$$\sum_{m'=-k}^{m'=k}\sum_{n'=-l}^{n'=l}\varphi(m'+\lambda,n'+\nu)=\sum_{m=-k}^{m=k}\sum_{n=-l}^{n=l}\varphi(m+\lambda,n+\nu),$$

welche auch so geschrieben werden kann:

$$\sum_{m=-k+\lambda}^{m=k+\lambda}\sum_{n=-l+\nu}^{n=l+\nu}\varphi(m,n),$$

und in welcher ebenfalls erst k, dann l gegen die Grenze ∞ convergiren mufs. Die Differenz zwischen dieser Summe und der vorhergehenden ist $=\nabla$; diese Differenz vereinfacht sich dadurch bedeutend, dafs beide Summen einen grofsen Theil von Gliedern gemeinschaftlich haben, nämlich alle die, für welche gleichzeitig

$$-k+\lambda\leqq m\leqq k,\qquad -l+\nu\leqq n\leqq l$$

ist, wenn z. B. λ und ν beide positiv sind, und ähnliche Systeme von gleicher Anzahl der Glieder, wenn λ und ν irgend eine der vier Zeichencombinationen darbieten; man darf demnach nur die Differenz derjenigen Theile bilden, welche resp. bei der ersten und zweiten Summe nach Ausschliefsung des gemeinschaftlichen Theils verbleiben. Bei der geometrischen Darstellung der zusammengehörigen Werthe der beiden Indices durch die Durchschnittspuncte zweier auf einander senkrechten Systeme von Parallelen, welche in gleichen, als Einheit geltenden Entfernungen von einander abstehen, mit Annahme von zweien dieser Parallelen als auf einander senkrechten Null-Axen, wird der Übergang von der einen Summe zur andern, welcher bei der hier angewandten Transformation der Indices Statt findet, durch die Verschiebung eines Rechtecks ausgedrückt, von welchen zwei gegenüberstehende Ecken den beiden Combinationen resp. $(-k,-l)$ und (k,l) entsprechen, und welches nach der Axe der m um λ und nach der Axe der n hin gleichzeitig um ν Einheiten fortrückt. Diese beiden Lagen $ABCD$ und $A'B'C'D'$ des Rechtecks *) haben den Theil $EBFD'$ (Fig. 2.) gemeinschaftlich; man hat also von der Summe

*) S. Fig. 1., wo AD der Axe der m, AB derjenigen der n parallel läuft und die Puncte A, B, C, D resp. den Combinationen $(-k,-l)$, $(-k,l)$, (k,l), $(k,-l)$, die Puncte A', B', C', D' den Combinationen $(-k+\lambda,-l+\nu)$, $(-k+\lambda,l+\nu)$, $(k+\lambda,l+\nu)$, $(k+\lambda,-l+\nu)$ entsprechen.

der den Theilen $A'B'GE$ und $BGCF$ entsprechenden Reihen die Summe der den Theilen $HFCD$ und $AED'H$ entsprechenden Reihen zu subtrahiren, um ∇ zu finden. Wenn man also durch die Flächenräume zugleich die Reihen ausdrückt, deren Indices die in diesen Flächenräumen enthaltenen Combinationen durchlaufen, so kann man sehr bequem schreiben:

$$\nabla = A'B'GE + BGC'F - HFCD - AED'H.$$

Wenn nun k in infinitum wächst, so dehnen sich die beiden Rechtecke nach beiden Seiten immer mehr in die Breite AD, $A'D'$ aus, während ihre Höhe AB, $A'B'$ dieselbe bleibt; die durch die Stücke $A'B'GE$ und $HFCD$ zur Linken und zur Rechten dargestellten Theile von ∇ nähern sich dabei über alle Grenzen der Null, wegen der Convergenz der vorgelegten Reihe nach m; die durch die Stücke $BGC'F$ und $AED'H$ oben und unten repräsentirten Theile verwandeln sich dagegen, indem sich die Stücke immer mehr nach rechts und links ausziehen, in unendliche Reihen, welche sich auf den Index m von $m = -\infty$ bis $m = \infty$ beziehen*); der erste Theil geht nämlich offenbar in die Summe von ν Reihen (ν ist in der Figur positiv) über, deren jede die Form

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\alpha m + \beta l + \xi}$$

hat, wo ξ eine Anzahl ν constanter, um die Differenz β unterschiedener Werthe bekommt; der zweite Theil verwandelt sich in ν ähnliche Reihen von der Form

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\alpha m - \beta l + \xi}.$$

Um die Grenzen dieser Reihen für $l = \infty$ zu finden, kann man dieselben durch Exponentialfunctionen für ein endliches l summiren und dann in diesen Functionen $l = \infty$ setzen; man kann auch diese Grenzen unmittelbar durch bestimmte Integrale ausdrücken, deren Werth sich leicht finden läfst. Es ist nach einer bekannten Formel, welche übrigens im folgenden Paragraphen abgeleitet wird:

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\alpha m \pm \beta l + \xi} = \frac{\pi}{\alpha} \operatorname{cotang} \frac{\pm \beta l + \xi}{\alpha} \cdot \pi = \frac{\pi i}{\alpha} \cdot \frac{e^{\frac{\pm \beta l + \xi}{\alpha} \cdot \pi i} + e^{-\frac{\pm \beta l + \xi}{\alpha} \cdot \pi i}}{e^{\frac{\pm \beta l + \xi}{\alpha} \cdot \pi i} - e^{-\frac{\pm \beta l + \xi}{\alpha} \cdot \pi i}}.$$

Nun convergirt eine Exponentialfunction, wie e^{u+vi}, entweder gegen 0 oder gegen ∞, je nachdem u gegen $-\infty$ oder gegen ∞ convergirt, während v gar keinen Einflufs darauf hat. Von den vier Exponentialfunctionen

$$e^{\frac{\beta l + \xi}{\alpha} \cdot \pi i}, \quad e^{\frac{-\beta l + \xi}{\alpha} \cdot \pi i}, \quad e^{\frac{-\beta l - \xi}{\alpha} \cdot \pi i}, \quad e^{\frac{\beta l - \xi}{\alpha} \cdot \pi i},$$

*) S. die Bemerkung am Schlusse dieser Abhandlung.

in welchen das Zeichen des reellen Theils des Exponenten für wachsende l offenbar durch das Zeichen des Coëfficienten von i in dem Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$ bestimmt wird, convergiren demnach entweder die erste und vierte, oder die zweite und dritte gegen Null, je nachdem der Coëfficient von i in $\frac{\beta}{\alpha}$ positiv oder negativ ist. Da sich hiernach die beiden Exponentialfunctionen, deren Summe im Zähler und deren Differenz im Nenner des obigen Ausdrucks für die Cotangente steht, bald auf die erste, bald auf die zweite von beiden allein reduciren, indem die andere für $l=\infty$ verschwindet, so erhält man als Grenze bald $\frac{\pi i}{\alpha}$, bald $-\frac{\pi i}{\alpha}$, und zwar

$$\operatorname{Lim}_{l=\infty} \Sigma \frac{1}{\alpha m+\beta l+\xi} = \frac{-\pi i}{\alpha} \quad \text{oder} \quad = \frac{\pi i}{\alpha} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{Lim}_{l=\infty} \Sigma \frac{1}{\alpha m-\beta l+\xi} = \frac{\pi i}{\alpha} \quad \text{oder} \quad = \frac{-\pi i}{\alpha},$$

je nachdem der Coëfficient von i in $\frac{\beta}{\alpha}$ positiv oder negativ ist; setzt man je nach diesen beiden Fällen $\delta=-1$ oder $=+1$, so hat man in allen Fällen

$$\operatorname{Lim}_{l=\infty} \Sigma \frac{1}{\alpha m \pm \beta l+\xi} = \pm \frac{\delta \pi i}{\alpha},$$

und dann ist $\delta=+1$ oder $=-1$, je nachdem der Coëfficient von i in $\frac{\alpha}{\beta}$ positiv oder negativ ist, denn der Coëfficient von i in $\frac{\alpha}{\beta}$ hat stets das entgegengesetzte Zeichen von dem in $\frac{\beta}{\alpha}$. Durch bestimmte Integrale erhält man dasselbe Resultat, wenn man das allgemeine Glied der Reihen unter der Form

$$\frac{1}{l} \cdot \frac{1}{\alpha \frac{m}{l} \pm \beta + \frac{\xi}{l}}$$

schreibt; man sieht dann leicht, dafs die Reihe

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{\alpha \frac{m}{l} \pm \beta + \frac{\xi}{l}}$$

mit wachsenden l gegen das bestimmte Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial x}{\alpha x \pm \beta}$$

convergirt, welches, durch die bekannten Methoden behandelt, den Werth $\pm\frac{\pi i}{\alpha}$ oder

$\mp\frac{\pi i}{\alpha}$ liefert, je nachdem der Coëfficient von i in $\frac{\alpha}{\beta}$ positiv oder negativ ist. Da nun alle die ν Reihen, welche addirt werden sollten, dieselbe Grenze $\frac{\delta\pi i}{\alpha}$ haben, und da auch die andern ν Reihen, welche subtrahirt werden sollten, ebenfalls alle dieselbe und der vorigen entgegengesetzte Gröfse $-\frac{\delta\pi i}{\alpha}$ zur Grenze haben, so wird die Summe der ν Reihen weniger der Summe der ν andern Reihen, für $l=\infty$, $=\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha}$. Dies ist also der Werth von ∇, nämlich

$$\nabla\Sigma\frac{1}{\alpha m+\beta n+\gamma}=\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha}=\pm\frac{2\nu\pi i}{\alpha}=a-b\gamma,$$

und obwohl dieses Resultat nur für ein positives ν bewiesen zu sein scheint, so überzeugt man sich doch leicht, dafs jede Lage der beiden Rechtecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ zu einander zu demselben Resultate führen mufs und dafs obige Gleichung für jeden ganzen Werth von ν, so wie auch für jeden ganzen Werth von λ gilt. Da der gefundene Ausdruck $\pm\frac{2\nu\pi i}{\alpha}$ von γ unabhängig ist, so folgt daraus $a=\pm\frac{2\nu\pi i}{\alpha}$ und $b=0$, und aus $b=0$ folgt

$$\nabla\Sigma\frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^2}=0.$$

Letztere Reihe, als Function von γ betrachtet, ist daher ebenfalls eine ***doppelt periodische Function,*** ebenso wie diejenigen oben betrachteten Reihen, welche von der Anordnung der Glieder unabhängig waren. Dieses Resultat lehrt aber nur, dafs diese specielle Art von Transformation, welche dem Übergange von γ zu $\gamma'=\gamma+\lambda\alpha+\nu\beta$ entspricht, die Summe der Reihe nicht modificirt, während immer noch eine andere Art von Transformation die Summe nichts desto weniger ändern kann und ändern mufs. Die Function $\Sigma\frac{1}{\alpha m+\beta n+\gamma}$ ändert sich nicht, wenn γ blofs um $\lambda\alpha$ wächst, also $\nu=0$ ist; sie ist daher immer noch einfach periodisch und hat den Modul α; diese Function wächst dagegen um $\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha}$, wenn γ um $\nu\beta$ wächst; man kann daher β, und allgemein $\lambda\alpha+\nu\beta$, wenn ν von Null verschieden ist, für diese Function als Modul einer ***uneigentlichen Periodicität*** ansehen, oder kürzer als ***uneigentlichen Modul der Periodicität.*** Da endlich die ganze Reihe (1.) in §. 1. bei dieser Transformation den Zuwachs

$$-(a-b\gamma)x-\tfrac{1}{2}bx^2=-\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha}x$$

erlangt, so tritt zu dem Producte $\Pi\left(1-\frac{x}{u}\right)$, wenn es als Grenze des folgenden

$$\prod_{n=-l}^{n=l}\prod_{m=-k}^{m=k}\left(1-\frac{x}{\alpha m+\beta n+\gamma}\right), \quad k=\infty, \quad l=\infty$$

betrachtet wird, die Exponentialgröfse $e^{-\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha}x}$ bei der Transformation als Factor hinzu*), und wenn man das unendliche Doppelproduct als Function $\psi(\gamma)$ von γ betrachtet, so ist

$$\psi(\gamma+\lambda\alpha+\nu\beta)=e^{-\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha}x}\psi(\gamma)=e^{\pm\frac{2\nu\pi i}{\alpha}x}\psi(\gamma),$$

wo im Exponenten das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Coëfficient von i in $\frac{\beta}{\alpha}$ (resp. $\frac{\alpha}{\beta}$) positiv (negativ) oder negativ (positiv) ist. Das unendliche Doppelproduct, in obigem Sinne verstanden, ist demnach in Bezug auf den Modul α eine eigentlich periodische, in Bezug auf den Modul β eine uneigentlich periodische Function von γ.

Ich gehe jetzt zu der Anwendung der zweiten der beiden oben hervorgehobenen Transformationsarten der Indices über.

Auch bei dieser zweiten Art von Transformation, bei welcher vier ganze Zahlen λ, μ, ν, ϱ der Bedingung $\lambda\varrho-\mu\nu=\varepsilon=\pm1$ genügend angenommen und

$$m=\lambda m'+\mu n', \qquad n=\nu m'+\varrho n'$$

gesetzt werden, verwandelt sich $u=\alpha m+\beta n+\gamma$ in einen analogen Ausdruck in Bezug auf die neuen Indices; nur bleibt γ unverändert, wogegen an die Stelle von α und β andere Werthe treten, während bei der vorhergehenden Art von Transformation umgekehrt α und β ungeändert blieben und γ in γ' überging. Man erhält

$$\begin{aligned}\alpha m+\beta n+\gamma &= \alpha(\lambda m'+\mu n')+\beta(\nu m'+\varrho n')+\gamma\\ &= (\lambda\alpha+\nu\beta)m'+(\mu\alpha+\varrho\beta)n'+\gamma.\end{aligned}$$

Wenn man daher

$$\alpha'=\lambda\alpha+\nu\beta, \qquad \beta'=\mu\alpha+\varrho\beta$$

setzt, so geht

$$\alpha m+\beta n+\gamma \quad \text{in} \quad \alpha' m'+\beta' n'+\gamma \quad \text{über.}$$

---

*) Die in §. 1. durch die Bedingung $M(u)>M(x)$ abgetrennten Factoren haben natürlich auf die durch Transformation der Indices entstehende Modification keinen Einflufs; und da sie ohnedies bei beiden Arrangements dieselben sind, so können sie nachher bei beiden wiederum willkürlich hinzugefügt werden; es erleiden daher die in §. 1. durch Π und durch Π' bezeichneten unendlichen Producte beide genau dieselbe Modification.

Man schliefst hieraus zunächst, dafs diejenigen Summen von der Form

$$\Sigma f(\alpha m+\beta n+\gamma),$$

welche von der Anordnung der Glieder unabhängig sind, unverändert bleiben, wenn man α' und β', welche durch obige Formeln gegeben sind, an die Stelle von α resp. β setzt: eine sehr wichtige und interessante Eigenschaft, welche diese Functionen mit der schon erwiesenen der doppelten Periodicität in Bezug auf γ verbinden. Um die Modificationen zu finden, welche die beiden von der Anordnung der Glieder abhängigen Summen bei dieser Transformation erleiden, könnte man ein demjenigen bei der ersten Art von Transformation analoges Verfahren anwenden; aber man würde zu sehr mühsamen und complicirten Betrachtungen geführt werden; es lassen sich auf kürzerem Wege diese Modificationen aus den schon gefundenen Resultaten wie folgt ableiten. Man setze

$$\Sigma\frac{1}{\alpha m+\beta n+\gamma} = \varphi(\gamma) \quad \text{und} \quad \Sigma\frac{1}{\alpha' m+\beta' n+\gamma} = \varphi'(\gamma),$$

wo in den Summen erst m und dann n die Werthe $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ durchläuft. Nach dem oben Gefundenen genügt die Function $\varphi(\gamma)$ der Relation

$$\varphi(\gamma+g\alpha+h\beta) = \varphi(\gamma)+\delta\frac{2h\pi i}{\alpha}$$

wenn g und h irgend zwei ganze Zahlen sind; es mufs daher auch $\varphi'(\gamma)$ der analogen Relation

$$\varphi'(\gamma+g\alpha'+h\beta') = \varphi'(\gamma)+\delta'\frac{2h\pi i}{\alpha'}$$

genügen, wo δ' durch das Zeichen des Coëfficienten von i in $\frac{\alpha'}{\beta'}$ bestimmt wird: denn die beiden Functionen $\varphi'(\gamma)$ und $\varphi(\gamma)$ haben dieselbe Art und unterscheiden sich nur durch die Werthe ihrer Moduln der Periodicität. Aus den Gleichungen $\alpha'=\lambda\alpha+\nu\beta$, $\beta'=\mu\alpha+\varrho\beta$, welche, wegen $\lambda\varrho-\mu\nu=\pm 1$, durch Auflösung zu den folgenden für den Rückweg von α', β' zu α, β führen, sind: $\alpha=\varepsilon\varrho\alpha'-\varepsilon\nu\beta'$, $\beta=-\varepsilon\mu\alpha'+\varepsilon\lambda\beta'$, ersieht man, dafs jeder Ausdruck von der Form $g\alpha'+h\beta'$, wo g und h ganze Zahlen sind, zugleich von der Form $g\alpha+h\beta$ ist, und umgekehrt; man zieht in der That aus jenen Gleichungen:

$$g\alpha'+h\beta' = (\lambda g+\mu h)\alpha+(\nu g+\varrho h)\beta,$$
$$g\alpha+h\beta = (\varepsilon\varrho g-\varepsilon\mu h)\alpha'+(-\varepsilon\nu g+\varepsilon\lambda h)\beta'.$$

Mit Hülfe dieser Übertragung läfst sich irgend eine der beiden obigen Relationen für die Functionen φ und φ' so umformen, dafs der Zuwachs von γ auf der linken Seite in ihr derselbe wird, wie der Zuwachs von γ in der an-

dern Relation. Man erreicht diesen Zweck, indem man entweder in der ersten Relation (für φ) die neuen ganzen Zahlen $\lambda g+\mu h$, und $\nu g+\varrho h$ an die Stelle von g resp. h schreibt, oder, indem man in der zweiten (für φ') die neuen ganzen Zahlen $\varepsilon\varrho g-\varepsilon\mu h$ und $-\varepsilon\nu g+\varepsilon\lambda h$ statt g und h nimmt. Im ersten Falle erhält man die beiden Relationen

$$\varphi(\gamma+g\alpha'+h\beta') = \varphi(\gamma)+\delta\frac{2(\nu g+\varrho h)\pi i}{\alpha},$$

$$\varphi'(\gamma+g\alpha'+h\beta') = \varphi'(\gamma)+\delta'\frac{2h\pi i}{\alpha'},$$

im zweiten Falle die beiden folgenden:

$$\varphi(\gamma+g\alpha+h\beta) = \varphi(\gamma)+\delta\frac{2h\pi i}{\alpha},$$

$$\varphi'(\gamma+g\alpha+h\beta) = \varphi'(\gamma)+\delta'\frac{2(-\varepsilon\nu g+\varepsilon\lambda h)\pi i}{\alpha'}.$$

Bemerkt man nun, dafs die Differenz $\varphi'(\gamma)-\varphi(\gamma)$, welche der Werth von $\nabla\Sigma\frac{1}{\alpha m+\beta n+\gamma}$ ist, nach dem früher Bewiesenen von der Form $a-b\gamma$ sein mufs, so erhält man durch Subtraction der beiden Relationen in jedem der eben geschriebenen beiden Systeme:

$$a-b(\gamma+g\alpha'+h\beta') = a-b\gamma+\delta'\frac{2h\pi i}{\alpha'}-\delta\frac{2(\nu g+\varrho h)\pi i}{\alpha} \text{ und}$$

$$a-b(\gamma+g\alpha+h\beta) = a-b\gamma+\delta'\frac{2(-\varepsilon\nu g+\varepsilon\lambda h)\pi i}{\alpha'}-\delta\frac{2h\pi i}{\alpha};$$

folglich zwei Gleichungen zur Bestimmung von b, nämlich:

$$b(g\alpha'+h\beta') = \delta\frac{2(\nu g+\varrho h)\pi i}{\alpha}-\delta'\frac{2h\pi i}{\alpha'},$$

$$b(g\alpha+h\beta) = \delta\frac{2h\pi i}{\alpha}-\delta'\frac{2(-\varepsilon\nu g+\varepsilon\lambda h)\pi i}{\alpha'};$$

welche wegen der Unbestimmtheit der ganzen Zahlen g und h, deren jede man der Null gleich setzen kann, in die vier folgenden zerfallen:

$$b\alpha' = \delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha}, \qquad b\beta' = \delta\frac{2\varrho\pi i}{\alpha}-\delta'\frac{2\pi i}{\alpha'},$$

$$b\alpha = \varepsilon\delta'\frac{2\nu\pi i}{\alpha'}, \qquad b\beta = \delta\frac{2\pi i}{\alpha}-\varepsilon\delta'\frac{2\lambda\pi i}{\alpha'}.$$

Diese vier Gleichungen geben die Constante b in vier verschiedenen Formen ausgedrückt, welche sich übrigens leicht auf einander reduciren lassen. Die erste und vierte Gleichung lehren noch, dafs immer

$$\delta' = \varepsilon\delta$$

ist, d. h., dafs der Coëfficient von i in $\frac{\alpha'}{\beta'}$ dasselbe, oder das entgegengesetzte Zeichen mit dem Coëfficienten von i in $\frac{\alpha}{\beta}$ hat, je nachdem $\varepsilon = +1$, oder $\varepsilon = -1$ ist; und in der That, wenn man die den complexen Werthen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ conjugirten complexen Werthe durch $\alpha_1, \beta_1, \alpha_1', \beta_1'$ bezeichnet, so hat der Coëfficient von i in $\frac{\alpha}{\beta}$, nämlich $\frac{1}{2i}\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$, dasselbe Zeichen mit der Determinante $\frac{\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1}{2i}$ und der in $\frac{\alpha'}{\beta'}$, nämlich $\frac{1}{2i}\left(\frac{\alpha'}{\beta'} - \frac{\alpha_1'}{\beta_1'}\right)$, hat dasselbe Zeichen mit der Determinante $\frac{\alpha'\beta_1' - \beta'\alpha_1'}{2i}$. Nun finden, da $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ reell sind, zwischen den conjugirten Werthen dieselben Gleichungen Statt, wie zwischen α', β' und α, β: mithin ist das System $\begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \alpha_1', & \beta_1' \end{pmatrix}$ aus den beiden folgenden zusammengesetzt:

$$\begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \alpha_1', & \beta_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \alpha_1, & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \nu, & \varrho \end{pmatrix},$$

und deshalb findet zwischen den Determinanten dieser Systeme die Relation $\alpha'\beta_1' - \beta'\alpha_1' = (\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)(\lambda\varrho - \mu\nu)$ Statt; folglich u. s. w. Der einfachste Ausdruck für b ist offenbar der aus der ersten der vier Gleichungen hervorgehende

$$b = \delta \frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}.$$

Die Constante a entschlüpft den obigen Rechnungen, aber man überzeugt sich leicht, dafs sie den Werth Null hat; denn es ist

$$a = \nabla\Sigma \frac{1}{\alpha m + \beta n} = \Sigma \frac{1}{\alpha' m + \beta' n} - \Sigma \frac{1}{\alpha m + \beta n},$$

und diese Summen, deren Differenz den Werth von a giebt, verschwinden offenbar beide bei der Reihenfolge, in welcher wir in ihnen die Glieder geordnet annehmen. Wir finden hiernach

$$\nabla\Sigma \frac{1}{\alpha m + \beta n + \gamma} = -\delta \frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}\gamma, \qquad \nabla\Sigma \frac{1}{(\alpha m + \beta n + \gamma)^2} = \delta \frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}.$$

Der Zuwachs der Reihe (1.) ist

$$-(a - b\gamma)x - \tfrac{1}{2}bx^2 = \delta \frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}(\gamma x - \tfrac{1}{2}x^2),$$

und das unendliche Doppelproduct erlangt den Exponentialfactor

$$e^{\delta \frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}(\gamma x - \frac{1}{2}x^2)}.$$

Bei der blofsen Vertauschung der Indices, für welche $\lambda = \varrho = 0$, $\mu = \nu = 1$ ist, wird dieser hinzutretende Exponentialfactor:

$$= e^{\delta \frac{2\pi i}{\alpha\beta}(\gamma x - \frac{1}{2}x^2)}.$$

Hiernach kann man das Verhältnifs angeben, in welchem die einfachen unendlichen Producte stehen, welche in der Notiz S. 285 des 27. Bandes dieses Journals aus dem unendlichen Doppelproduct dadurch abgeleitet sind, dafs man abwechselnd die Multiplication zuerst nach dem einen und dann nach dem andern Index ausgeführt hat. In jener Notiz vom Februar 1844, welche nur als eine flüchtige Andeutung zu betrachten ist *), habe ich nur die speciellen Fälle des unendlichen Doppelproducts

$$\Pi\left(1 - \frac{x}{\alpha m + \beta n + \gamma}\right)$$

betrachtet, welche den Werthen $\gamma = 0$, $\gamma = \frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ und $\frac{\alpha+\beta}{2}$ entsprechen (mit Übertragung der dort angenommenen Buchstaben auf die hier gewählten); auch habe ich dort auf die Modificationen keine Rücksicht genommen, welche durch die Vertauschung der Multiplicationen entstehen, und welche Modificationen hier ausführlich und von einem viel allgemeineren Gesichtspuncte aus erörtert worden sind; die gegenwärtige Abhandlung kann daher zum Theil als eine Ergänzung und weitere Ausführung der frühern, eben erwähnten angesehen werden; und in der That sollen im folgenden Paragraphen allgemein die Relationen zwischen einfachen unendlichen Producten betrachtet werden, welche sich aus dem unendlichen Doppelproduct ergeben: nicht allein dadurch, dafs man die Ordnung der beiden Multiplicationen vertauscht, sondern überhaupt dadurch, dafs man auf die Indices irgend eine Transformation von der Form

$$\begin{aligned} m &= \lambda m' + \mu n' \\ n &= \nu m' + \varrho n' \end{aligned}; \qquad \lambda\varrho - \mu\nu = \pm 1$$

anwendet, wovon die Umkehrung der Ordnung der Multiplicationen, wie schon bemerkt, nur ein specieller Fall ist.

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Heft.)

*) In der That wurde jene Notiz während des Drucks anderer Abhandlungen zum Manuscripte hinzugefügt.

11.

Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.

(Von Herrn Dr. phil. *G. Eisenstein*, Privatdocent zu Berlin.)

VI. Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind, und der mit ihnen zusammenhangenden Doppelreihen.

(Fortsetzung der letzten Abhandlung im vorigen Heft.)

Es bietet sich bei Gelegenheit dieser Art von Transformationen der Indices ein Fall dar, welcher ein ganz besonderes Interesse für sich in Anspruch nimmt; es ist derjenige, wenn die ursprünglichen Moduln der Periodicität α und β mit den transformirten α' und β' in der Proportion

$$\alpha : \beta = \alpha' : \beta'$$

stehen; in welchem Falle man sagen kann, dafs der Quotient der beiden Moduln $\frac{\alpha}{\beta}$, welcher bei den hier vorkommenden Functionen eine Hauptrolle spielt, durch die Transformation ungeändert bleibt. In diesem Falle wird

$$\alpha' m' + \beta' n' = \frac{\alpha'}{\alpha}\left(\alpha m' + \frac{\beta' \alpha}{\alpha'} n'\right) = \frac{\alpha'}{\alpha}(\alpha m' + \beta n'),$$

$$\alpha' m' + \beta' n' + \gamma = \frac{\alpha'}{\alpha}\left(\alpha m' + \beta n' + \frac{\alpha}{\alpha'}\gamma\right),$$

$$\Sigma \frac{1}{(\alpha' m' + \beta' n' + \gamma)^g} = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^g \Sigma \frac{1}{\left((\alpha m' + \beta n' + \frac{\alpha}{\alpha'}\gamma\right)^g};$$

die transformirten Summen gehen also wieder in die ursprünglichen über, nur tritt $\frac{\alpha}{\alpha'}\gamma$ an die Stelle von γ. Wenn man daher für den Augenblick

$$\Sigma \frac{1}{(\alpha m + \beta n + \gamma)^g} = \varphi(\gamma)$$

schreibt, so findet entweder geradezu die Gleichung

$$\varphi(\gamma) = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^g \varphi\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\gamma\right), \qquad \varphi\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\gamma\right) = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^g \varphi(\gamma)$$

Statt, wenn der Exponent $g > 2$ ist, oder diese Gleichung wird richtig, wenn man auf der einen Seite eine gewisse ganze Function ersten Grades von γ hinzufügt. Es läfst sich also $\varphi\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\gamma\right)$ stets auf sehr einfache Weise in $\varphi(\gamma)$

ausdrücken; dies heifst aber in der Sprache dieser Theorie: *„Die hier vor-„kommenden Functionen von γ besitzen ein Multiplicationstheorem für „den Multiplicator $\frac{\alpha}{\alpha'}$ oder lassen sich mit $\frac{\alpha}{\alpha'}$ multipliciren.*" Die Bedingungen dieses Falles sind durch die Gleichungen

$$\beta = \omega\alpha, \qquad \beta' = \omega\alpha',$$
$$\alpha' = \varpi\alpha, \qquad \beta' = \varpi\beta$$

ausgesprochen. Führt man vermittels dieser Gleichungen die Buchstaben ω und ϖ, welche die gleichen Verhältnisse der Moduln anzeigen, in die Formeln

$$\alpha' = \lambda\alpha + \nu\beta,$$
$$\beta' = \mu\alpha + \varrho\beta$$

ein, indem man die erste dieser Formeln durch α, die zweite durch β dividirt, so erhält man die Gleichungen

$$\varpi = \lambda + \nu\omega,$$
$$\varpi = \mu\cdot\frac{1}{\omega} + \varrho$$

zur Bestimmung von ω und ϖ; hieraus läfst sich ϖ unmittelbar eliminiren und man erhält $\lambda + \nu\omega = \frac{\mu}{\omega} + \varrho$, also die quadratische Gleichung

$$\nu\omega^2 + (\lambda - \varrho)\omega - \mu = 0$$

für ω. Um ω aus obigen Gleichungen zu eliminiren, schreibe man sie wie folgt: $\varpi - \lambda = \nu\omega$, $\varpi - \varrho = \frac{\mu}{\omega}$ und multiplicire diese beiden mit einander; dies giebt $(\varpi - \lambda)(\varpi - \varrho) = \mu\nu$, folglich für ϖ die quadratische Gleichung:

$$\varpi^2 - (\lambda + \varrho)\varpi + \lambda\varrho - \mu\nu = 0;$$

die ursprünglichen Gleichungen für ω und ϖ haben übrigens eine sehr ähnliche Form mit denen, welche in der Theorie der Planetenstörungen vorkommen. Da nach den ersten Principien $\omega = \frac{\beta}{\alpha}$ imaginär, d. h. wesentlich *nicht reell* sein mufs, so kann die Determinante der quadratischen Gleichung für ω, nämlich der Ausdruck

$$(\lambda - \varrho)^2 + 4\mu\nu = \Delta$$

nur negativ sein. Diesem Ausdrucke gebe man die Form

$$\Delta = (\lambda + \varrho)^2 - 4\lambda\varrho + 4\mu\nu = (\lambda + \varrho)^2 - 4\varepsilon;$$

man sieht dann sogleich, dafs derselbe gleichzeitig die Determinate der andern quadratischen Gleichung

$$\varpi^2 - (\lambda + \varrho)\varpi + \varepsilon = 0$$

ist; ω und ϖ enthalten daher eine und dieselbe Irrationalität $\sqrt{\Delta}$ und man hat

$$\omega = \frac{\varrho - \lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2\nu}, \qquad \varpi = \frac{\varrho + \lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

wo die Zeichen $\pm$ wegen der Gleichung $\varpi = \lambda + \nu\omega$ correspondiren. Da nun Δ negativ sein mufs, so bleibt zunächst der Fall $\varepsilon = -1$ ausgeschlossen, für welchen sich Δ als Summe von zwei Quadraten $(\lambda+\varrho)^2+4$ darstellt, und für $\varepsilon = +1$ mufs

$$(\lambda+\varrho)^2 < 4$$

sein, daher kann nur $\lambda+\varrho = 0$ oder $= \pm 1$ sein, und dann ist $\Delta = -4$ oder $= -3$; es können also einzig und allein nur folgende drei Combinationen den Bedingungen dieses Falles Genüge leisten:

$$\lambda+\varrho = 0, \quad \Delta = -4, \quad \varpi = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \pm i,$$

$$\lambda+\varrho = 1, \quad \Delta = -3, \quad \varpi = \frac{1\pm\sqrt{-3}}{2},$$

$$\lambda+\varrho = -1, \quad \Delta = -3, \quad \varpi = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2};$$

also ϖ kann nur sechs Werthe haben, welche zugleich sämmtlich Wurzeln der Einheit sind; nämlich wenn r eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit bezeichnet, so sind die sechs Werthe von ϖ:

$$\pm i, \quad \pm r \quad \text{und} \quad \pm r^2;$$

d. h. alle ***imaginären vierten und sechsten Wurzeln der Einheit***, d. h. alle imaginären $n$ten Wurzeln der Einheit, wenn n eine ganze Zahl ist, für welche die Anzahl der Zahlen, welche kleiner als n und zu n relative Primzahlen sind, ***zwei*** beträgt. Ferner ist ω in ϖ in allen Fällen durch die Gleichung

$$\omega = \frac{-\lambda+\varpi}{\nu}$$

bestimmt, wo für λ und ν irgend zwei ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler genommen werden können, zu welchen sich zwei andere ganze Zahlen μ und ϱ den Bedingungen $\lambda\varrho-\mu\nu = 1$ und $\lambda+\varrho = 0, \pm 1$ gemäfs aufstellen lassen. Für $\varpi = \pm i$ ist $\varrho = -\lambda$, also $-\lambda^2-\mu\nu = 1$, $-\mu = \frac{\lambda^2+1}{\nu}$, folglich $\lambda^2 \equiv -1 \pmod{\nu}$; es mufs also -1 zu ν quadratischer Rest sein, folglich darf ν oder $\frac{1}{2}\nu$ nur Primfactoren von der Form $4n+1$ enthalten, aber ν darf weder durch 4, noch durch Primzahlen der Form $4n+3$ theilbar sein. Um alle Werthe von λ, μ, ν, ϱ zu erhalten, verfährt man am besten, wenn man λ ganz beliebig annimmt, die Form λ^2+1 auf irgend eine Art in das Product zweier ganzen reellen Zahlen zerlegt, deren eine man $-\mu$, die andere ν nennt, und dann $\varrho = -\lambda$ setzt; es giebt also jedesmal unendlich viele verschiedene Werthe von ω von der Form $\frac{-\lambda\pm i}{\nu}$, welche den beiden Werthen

$\varpi = \pm i$, wo die Zeichen einander entsprechen, zugehören. Wenn übrigens $\frac{-\lambda \pm i}{\nu}$ in der Reihe der Werthe von ω vorkommt, so kommt auch $\frac{\lambda \pm i}{-\nu} = \frac{-\lambda \mp i}{\nu}$ vor; denn wenn das System λ, μ, ν, ϱ den Bedingungen $\lambda^2 + 1 = -\mu\nu$, $\lambda + \varrho = 0$ genügt, so genügt auch das System $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$, $-\varrho$ offenbar denselben Bedingungen: es stimmen daher die beiden Reihen von Werthen von ω, deren eine $\varpi = +i$, die andere $\varpi = -i$ entspricht, vollkommen mit einander überein; nur gehören die in beiden Reihen übereinstimmenden Werthe von ω zu verchiedenen und zwar zu entgegengesetzten Systemen der vier ganzen Zahlen λ, μ, ν, ϱ. Eine bemerkenswerthe Eigenschaft der den beiden Werthen $\varpi = \pm i$ gemeinschaftlichen Reihe von Werthen von ω besteht darin, dafs immer je zwei Glieder der Reihe gefunden werden können, deren Product $= +1$ ist; wenn nämlich $\frac{-\lambda + i}{\nu}$ vorkommt, so kommt auch $\frac{-\lambda - i}{-\mu}$ vor, deren Product $= \frac{\lambda^2 + 1}{-\mu\nu} = 1$ ist; denn die obigen Bedingungen bleiben erfüllt, wenn man $-\mu$ an die Stelle von ν und zugleich $-\nu$ an die Stelle von μ setzt. Die einfachsten Werthe von ω sind übrigens $\omega = \pm i$.

Für $\varpi = \pm r$, $\pm r^2$ wird man durch die Gleichung $\lambda\varrho - \mu\nu = 1$ stets zu der Auflösung einer Gleichung von der Form

$$t^2 + t + 1 = uv$$

in ganzen Zahlen geführt, d. h. zu der Zerfällung eines quadratischen Ausdrucks mit der Determinante -3 oder eines Products zweier conjugirten ganzen complexen Zahlen aus dritten Wurzeln der Einheit, wie $(t - r)(t - r^2)$, in das Product zweier reellen ganzen Factoren; denn für $\varpi = r$ und $\varpi = r^2$ wird $\varrho = -\lambda - 1$, also $\lambda(-\lambda - 1) - \mu\nu = 1 = -\lambda^2 - \lambda - \mu\nu$, d. h.

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = -\mu\nu,$$

und für $\varpi = -r$ und $\varpi = -r^2$ wird $\varrho = -\lambda + 1$, also $\lambda(-\lambda + 1) - \mu\nu = 1 = -\lambda^2 + \lambda - \mu\nu$, d. h.

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = -\mu\nu.$$

Berücksichtigt man die Gleichung $1 + r + r^2 = 0$, so sieht man, dafs für diese vier Fälle die Werthe von ω immer auf die Form

$$\omega = \frac{t - r}{u}$$

gebracht werden können; denn für $\varpi = r$ hat man $\omega = \frac{-\lambda + r}{\nu} = \frac{\lambda - r}{-\nu}$, für $\varpi = r^2$ wird $\omega = \frac{-\lambda + r^2}{\nu} = \frac{-\lambda - 1 - r}{\nu}$, für $\varpi = -r$ wird $\omega = \frac{-\lambda - r}{\nu}$,

endlich für $\varpi = -r^2$ hat man $\omega = \frac{-\lambda - r^2}{\nu} = \frac{\lambda - 1 - r}{-\nu}$. Umgekehrt, wenn man auf irgend eine Art die ganzen Zahlen t und u der Gleichung $t^2 + t + 1 = uv$ genügend bestimmt und den Ausdruck $\omega = \frac{t - r}{u}$ an die Spitze stellt, so kann man, während dieser Werth von ω unverändert bleibt, zu jedem der vier Werthe von ϖ ein zugehöriges System λ, μ, ν, ϱ in t, u und v bestimmen; in der That braucht man für die vier Werthe von ϖ nur folgende Tafel aufzustellen:

$$\begin{array}{llllll}
\varpi = & r, & t = & \lambda, & u = -\nu, & v = \mu, \quad \varrho = -\lambda - 1, \\
\varpi = & r^2, & t = & -\lambda - 1, & u = \nu, & v = -\mu, \quad \varrho = -\lambda - 1, \\
\varpi = & -r, & t = & -\lambda, & u = \nu, & v = -\mu, \quad \varrho = -\lambda + 1, \\
\varpi = & -r^2, & t = & \lambda - 1, & u = -\nu, & v = \mu, \quad \varrho = -\lambda + 1,
\end{array}$$

aus welcher sich das Folgende ergiebt:

$$\begin{array}{llllll}
\varpi = & r, & \lambda = & t, & \mu = v, & \nu = -u, \quad \varrho = -t - 1, \\
\varpi = & r^2, & \lambda = & -t - 1, & \mu = -v, & \nu = u, \quad \varrho = t, \\
\varpi = & -r, & \lambda = & -t, & \mu = -v, & \nu = u, \quad \varrho = t + 1, \\
\varpi = & -r^2, & \lambda = & t + 1, & \mu = v, & \nu = -u, \quad \varrho = -t,
\end{array}$$

und zu bemerken, dafs für alle vier Systeme $\lambda\varrho - \mu\nu = -t(t+1) + uv = 1$ wird, um einzusehen, dafs durch diese vier Systeme, welche den vier verschiedenen Werthen von ϖ, aber einem und demselben Werthe von ω entsprechen, allen Bedingungen genügt ist. Es folgt hieraus, dafs den vier Werthen $\varpi = \pm r$, $\pm r^2$ eine gemeinschaftliche Reihe von Werthen von ω entspricht, und dafs man diese gemeinschaftliche Reihe erhält, wenn man alle Combinationen von ganzen Zahlen t, u, welche der Gleichung $t^2 + t + 1 = uv$ genügen, in

$$\omega = \frac{t - r}{u}$$

setzt. In dieser Reihe kommen ebenfalls immer zwei zusammengehörige Glieder vor, deren Product $= +1$ ist, nämlich

$$\frac{t - r}{u} \quad \text{und} \quad \frac{t - r^2}{v} = \frac{-t - 1 - r}{-v};$$

übrigens sind u und v als Theiler der Form $t^2 + t + 1$ stets ungerade und nur durch 3 oder durch Primzahlen $3n + 1$ theilbar. Die einfachsten Werthe von ω sind $\omega = \pm r$ und $\omega = \pm r^2$. Die Functionen, deren Argumente mit ϖ (welches hier stets eine vierte oder sechste Wurzel der Einheit ist) multiplicirt werden können und welche zu der eben angestellten Untersuchung die Veranlassung gegeben haben, spielen eine wichtige Rolle in der Zahlentheorie.

Es wird in der That einen Theil dieser Arbeit ausmachen, unmittelbar auf die Eigenschaften der diesem Falle entsprechenden unendlichen Doppelproducte ohne Hülfe jeder andern Theorie die Fundamentaltheoreme für die Reste der vierten und sechsten Potenzen zu begründen. Es konnte daher die vorhergehende Auseinandersetzung, welche vielleicht zu lange bei der Behandlung eines speciellen Falles zu verweilen schien, nicht unterlassen werden. Übrigens sind die dem Falle $\omega = \pm i$ entsprechenden Functionen unter dem Namen der lemniscatischen Functionen, namentlich von ***Abel,*** behandelt worden, nachdem schon ***Gaufs*** in den „Disquisitiones Arithmeticae" im Vorbeigehen auf sie aufmerksam gemacht hatte; dagegen scheinen die andern hier vorkommenden Functionen, für welche ω eine sechste Wurzel der Einheit ist, und auf welche ich schon in frühern Abhandlungen wiederholt aufmerksam gemacht habe, bisher auffallend vernachlässigt worden zu sein, und ist dies um so weniger zu rechtfertigen, als diese Functionen in der Theorie der aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten complexen ganzen Zahlen in der That durchgängig die Rolle der lemniscatischen Functionen übernehmen und in der That von den bisher bekannten die einzigen Functionen sind, die in jenen seltenen und fruchtbaren Eigenschaften den lemniscatischen an die Seite gestellt werden können, welche die letztern an die Spitze aller anderen elliptischen Functionen zu erheben scheinen.

Bei Gelegenheit der hier untersuchten Transformationen der Indices bietet sich die Frage nach denjenigen Transformationen dar, für welche auch

$$m = \lambda m' + \mu n', \qquad n = \nu m' + \varrho n'$$

gesetzt wird, während aber nicht wie bisher $\lambda\varrho - \mu\nu = \pm 1$, sondern irgend einer anderen positiven oder negativen ganzen Zahl ε gleich ist. Diese Transformationen, bei welchen nicht durch ein einziges, sondern erst durch mehrere Systeme von Substitutionen alle Werthe der Indices erschöpft werden, gehören in eine andere Categorie, indem sie vier neue Indices statt der beiden ursprünglichen einführen, und sollen daher in einem späteren Paragraphen besonders betrachtet werden. Es wird sich dann zeigen, dafs Alles, was man bisher mit dem Namen Transformation der elliptischen Functionen bezeichnet hat, unter dieser allgemeineren Gattung von Transformationen der Indices begriffen ist.

4.

Die Convergenz des unendlichen Doppelproducts, welches den Gegenstand dieser Abhandlung ausmacht, so wie die Convergenz der mit ihm zusammenhängenden Doppelsummen, wenn man im Producte die Multiplication, in den Summen die Addition zuerst nach dem einen Index (m) und dann nach dem andern Index (n) verrichtet sich vorstellt, wird dadurch nachgewiesen, dafs man die eine Multiplication oder Addition (nach m) mit Hülfe der Kreis- und Exponentialfunctionen wirklich ausführt und die Convergenz der durch dieses Verfahren erhaltenen einfachen Producte oder einfachen Summen mit dem einen Index n der Untersuchung unterwirft. Man bediene sich zu dem Ende des folgenden Systems von Formeln, welche sich auf Kreis- und Exponentialfunctionen beziehen.

Man betrachte zunächst die folgenden einfachen Reihen:

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{x+m}, \quad \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{(x+m)^2}, \quad \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{(x+m)^3}, \quad \text{u. s. w. f.,}$$

welche ich der Ordnung nach durch

$$(1,x), \quad (2,x), \quad (3,x), \quad (4,x), \quad \text{u. s. w.}$$

bezeichnen will, indem ich sie als Functionen von x einführe. Aus den Principien des ersten Paragraphen geht für diese Reihen hervor, dafs $(2,x)$, $(3,x)$ in infinit. von der Anordnung der Glieder unabhängig convergirende Summen bilden und deshalb vollkommen bestimmte Functionen von x darstellen, welche in der That als Totalitäten aller unendlich vielen, sie zusammensetzenden Glieder anzusehen sind. Dagegen $(1,x)$ wird erst dann zu einer bestimmten Function von x, wenn man sich über die Reihenfolge der Glieder in der Summe entscheidet. Man nimmt an, $(1,x)$ werde als Grenze der Summe

$$\sum_{m=-k}^{m=k} \frac{1}{x+m}$$

für $k=\infty$ betrachtet, d. h. man setzt

$$(1,x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} + \text{in inf.}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x}{x^2-4} + \frac{2x}{x^2-9} + \text{in inf.}$$

gleich einer Reihe, deren genugsam bekannte Convergenz aus den Principien in §. 1. folgt. Die hier vorkommenden Functionen sind sämmtlich einfach periodisch und ihr Modul der Periodicität ist $=1$; denn transformirt man in den Summen den Index m, indem man $m+1$ statt m setzt, so geht x in $x+1$ über,

während die von der Anordnung der Glieder unabhängigen Reihen $(2, x)$, $(3, x)$ u. s. w. gänzlich unverändert bleiben und $(1, x)$ den Zuwachs

$$\nabla \Sigma \frac{1}{x+m} = \mathrm{Lim}\left\{ \sum_{m=-k}^{m=k} \frac{1}{x+m+1} - \sum_{m=-k}^{m=k} \frac{1}{x+m} \right\} = \mathrm{Lim}\left\{ \sum_{m=-k+1}^{m=k+1} \frac{1}{x+m} - \sum_{m=-k}^{m=k} \frac{1}{x+m} \right\}$$
$$= \mathrm{Lim}\left\{ \frac{1}{x+k+1} - \frac{1}{x-k} \right\} = 0$$

erhält, also ebenfalls unverändert bleibt.

Die Fundamental-Eigenschaften dieser einfach-periodischen Functionen ergeben sich aus der Betrachtung einer einzigen identischen Gleichung, nämlich der folgenden:

$$(a.) \qquad \frac{1}{p^2 q^2} = \frac{1}{(p+q)^2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right) + \frac{2}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right),$$

in welcher p und q irgend welche Gröfsen sein können, die von Null verschieden sind, und deren Summe ebenfalls von Null verschieden ist. Man setze

$$p = x+m, \quad q = -x-n, \quad p+q = m-n,$$

und nehme an, dafs m und n irgend zwei ***verschiedene*** reelle ganze Zahlen seien und dafs x keine ganze Zahl, übrigens beliebig complex sei. Man erhält

$$(b.) \quad \frac{1}{(x+m)^2} \cdot \frac{1}{(x+n)^2} = \frac{1}{(m-n)^2}\left(\frac{1}{(x+m)^2} + \frac{1}{(x+n)^2}\right) + \frac{2}{(m-n)^3}\left(\frac{1}{x+m} - \frac{1}{x+n}\right).$$

Setzt man hier für m und n, unabhängig von einander, alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞, mit Ausnahme derer, welche $m = n$ machen, und summirt über diese Werthe nach m und n als Indices, so erhält man links eine Doppelsumme, welche von der Anordnung der Glieder unabhängig ist, und welche sich durch die obigen Functionen in der Form

$$(2, x)^2 - (4, x)$$

darstellen läfst; denn nimmt man bei der Summation alle Combinationen m, n, ohne diejenigen, für welche $m = n$ ist, auszuschliefsen, so steht links das Product aus den beiden einfachen Summen

$$\Sigma \frac{1}{(x+m)^2} \quad \text{und} \quad \Sigma \frac{1}{(x+n)^2},$$

deren jede $= (2, x)$ ist, während diejenigen Glieder der Doppelsumme, für welche $m = n$ ist, und welche ausgeschlossen, deren Summe also von $(2, x)^2$ subtrahirt werden mufs, für sich die einfache Reihe

$$\Sigma \frac{1}{(x+m)^4} = (4, x)$$

bilden. Auf der rechten Seite kann man, da die Doppelsumme von der An-

ordnung der Glieder unabhängig ist, $m-n$ als neuen Index m' einführen, indem man n beibehält und $m'+n$ an die Stelle von m setzt; denn $m-n$ durchläuft für jeden stehenden Werth von n alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞, mit Ausschlufs der Null; nach der Transformation der Indices durchläuft also n alle Werthe von $-\infty$ bis ∞ ohne Ausnahme und m' alle diese Werthe mit Ausschlufs von $m'=0$. Man erhält hiernach rechts

$$\Sigma\Sigma\left\{\frac{1}{m'^2}\left(\frac{1}{(x+m'+n)^2}+\frac{1}{(x+n)^2}\right)+\frac{2}{m'^3}\left(\frac{1}{x+m'+n}-\frac{1}{x+n}\right)\right\}.$$

Das allgemeine Glied dieser Doppelsummen ist ein viergliedriger Ausdruck, und wenn man zuerst die Summation nach n ausführt, so kann man diese vier Glieder trennen und jedes derselben für sich als allgemeines Glied einer Summe nach n gelten lassen; denn diese vier Summen convergiren, jede für sich, wenn man nur, was wenigstens für die dritte und vierte nothwendig ist, die Summation nach n so ansieht, dafs erst von $-k$ bis k summirt und dann $k=\infty$ gesetzt wird. Nach vollzogener Summation in Bezug auf n erhält man

$$\frac{1}{m'^2}(2, x+m')+\frac{1}{m'^2}(2, x)+\frac{2}{m'^3}(1, x+m')-\frac{2}{m'^3}(1, x),$$

welches sich wegen der Periodicität der Functionen auf

$$\frac{1}{m'^2}(2, x)+\frac{1}{m'^2}(2, x)+\frac{2}{m'^3}(1, x)-\frac{2}{m'^3}(1, x)=\frac{2}{m'^2}(2, x)$$

reducirt. Hier ist nun nach m' zu summiren. Da m' nur in dem Factor $\frac{1}{m'^2}$ vorkommt, so hat man bei dieser Summation $2(2, x)$ als gemeinschaftlichen Factor aller Glieder herauszusetzen und man erhält

$$2(2^*, 0)(2, x),$$

als Resultat der doppelten Summation, wenn man durch $(2^*, 0)$ die Summe $\overset{*}{\Sigma}\frac{1}{m'^2}$ bezeichnet, welche sich auf alle ganzen Werthe von m' mit Ausschlufs von $m'=0$ erstreckt. Vergleicht man dieses Resultat mit demjenigen, welches die doppelte Summation auf der linken Seite der Gleichung (*b.*) gegeben hat, so findet man die Formel

$$(1.)\qquad (4, x)=(2, x)^2-2(2^*, 0)(2, x).$$

Geht man wiederum auf die identische Gleichung (*a.*) zurück und setzt diesmal $p=x+m$, $q=n$, $p+q=x+m+n$, $m+n=m'$, $m=m'-n$, so erhält man

$$(c.)\quad \frac{1}{(x+m)^2}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1}{(x+m')^2}\left(\frac{1}{(x+m'-n)^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{2}{(x+m')^3}\left(\frac{1}{x+m'-n}+\frac{1}{n}\right)$$

als allgemeines Glied einer Doppelsumme nach m und n, in welcher der Werth $n = 0$, also die Combinationen $m = m'$ auszuschliefsen sind. Links erhält man, indem man nach m und n summirt, das Product der beiden einfachen Summen $(2, x)$ und $(2^*, 0)$. Da diese letztern beiden Summen, also auch ihr Product, als Doppelsumme betrachtet, unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren, so ist es erlaubt, rechts nach m' und n statt nach m und n zu summiren; ferner ist es erlaubt, wenn man erst nach n summirt, die vier Terme des allgemeinen Gliedes rechts in (*c.*) zu trennen, und dann kann man im ersten und dritten wiederum $m = m' - n$ an die Stelle von n als Index einführen, so dafs im zweiten und vierten Term m' und n, im ersten und dritten Term m' und m die Indices sind; für jene ist beim Summiren der Werth $n = 0$, für diese die Combination $m' = m$ auszuschliefsen; die Summen nach n, welche aus dem zweiten und vierten Term entspringen, sind

$$\overset{*}{\Sigma}\frac{1}{n^2} = (2^*, 0) \quad \text{und} \quad \overset{*}{\Sigma}\frac{1}{n} = 0;$$

die Summen nach m, welche aus dem ersten und dritten Term entspringen, sind

$$\sum_{m \gtrless m'} \frac{1}{(x+m)^2} = (2, x) - \frac{1}{(x+m')^2} \quad \text{und} \quad \sum_{m \gtrless m'} \frac{1}{x+m} = (1, x) - \frac{1}{x+m'}.$$

Wenn man diese Werthe einsetzt und dann nach m' summirt, so erhält man endlich rechts:

$$\sum_{m'}\left\{\frac{1}{(x+m')^2}\left((2, x) - \frac{1}{(x+m')^2} + (2^*, 0)\right) + \frac{2}{(x+m')^3}\left((1, x) - \frac{1}{x+m'}\right)\right\}$$
$$= (2, x)(2, x) - (4, x) + (2, x)(2^*, 0) + 2(3, x)(1, x) - 2(4, x),$$

und da wir schon auf der linken Seite $(2^*, 0)(2, x)$ gefunden hatten, so gelangt man nach einer leichten Reduction zu der zweiten Formel:

$$(2.) \quad 3(4, x) = (2, x)^2 + 2(1, x)(3, x).$$

Diese beiden Formeln (1.) und (2.) sind nichts anders, als Differentialgleichungen für die Function $(1, x)$; denn aus der Definition der Functionen $(1, x), (2, x), (3, x)$ etc. selbst geht unmittelbar hervor, dafs dieselben durch fortgesetztes Differentiiren nach x der Reihe nach jede folgende aus der vorhergehenden abgeleitet werden können, indem

$\partial(1, x) = -(2, x)$, $\partial(2, x) = -2(3, x)$, $\partial(3, x) = -3(4, x)$, u. s. w.

ist, wenn man durch ∂ die Differentation nach x bezeichnet. Da man nun *zwei* Differentialgleichungen, und zwar zwei von einander unabhängige Differentialgleichungen, welche beiläufig von der dritten Ordnung sind, zur Be-

stimmung einer und derselben Function $(1, x)$ hat, so kann man durch fortgesetztes Differentiiren und durch Elimination möglichst viele höhere Differentialquotienten der Function wegschaffen und zu einer Differentialgleichung von möglichst niedriger Ordnung gelangen, ohne dafs man hierbei irgend eine Integration auszuführen und irgend eine neue (willkürliche) Constante einzuführen brauchte; nur mufs man diese Elimination nicht zu weit fortsetzen, weil man sonst zu identischen Gleichungen geführt wird; denn hierdurch hilft sich die Analysis, wenn man die Function zwingen will, einer einfacheren Relation Genüge zu leisten, als sie ihrer Natur nach fähig ist. Wollte man z. B. aus (1.) und (2.) die sämmtlichen Differentialquotienten von $(1, x)$ eliminiren und nur $(1, x)$ selbst beibehalten, so müfste man jedenfalls auf eine identische Gleichung kommen, weil $(1, x)$ als transcendente Function einer rein algebraischen Gleichung, als einer Differentialgleichung gewissermafsen von der 0ten Ordnung, nicht genügen kann; dagegen kann man wohl aus (1.) und (2.) die nach dem ersten folgenden höheren Differentialquotienten von $(1, x)$ wegschaffen und eine Differentialgleichung *erster* Ordnung für $(1, x)$ aufstellen; andrerseits kann man auch z. B. $(2, x)$ und $(3, x)$ beibehalten, und alle übrigen $(1, x)$, $(4, x)$ u. s. w. eliminiren; dann hat man eine Differentialgleichung erster Ordnung für $(2, x)$; und so in ähnlicher Weise auf unendlich viele Arten. Diese Elimination kann wohl am einfachsten auf folgende Weise ausgeführt werden. Setzt man $(1, x) = y$, so wird $-(2, x) = y'$, $2(3, x) = y''$, $-6(4, x) = y'''$, und setzt man noch der Kürze wegen $(2^*, 0) = c$, so geben (1.) und (2.)

$$(\alpha.) \quad -y''' = 6y'^2 + 12cy',$$
$$(\beta.) \quad -y''' = 2y'^2 + 2yy''.$$

Eliminirt man hieraus y''', so ergiebt sich

$$(\gamma.) \quad yy'' = 2y'^2 + 6cy';$$

wird dies differentiirt und für y''' sein Werth aus $(\alpha.)$ gesetzt, so erhält man

$$y'y'' + yy''' = 4y'y'' + 6cy'' = y'y'' - 6yy'^2 - 12cyy'$$

oder $3y'y'' + 6cy'' = -6yy'^2 - 12cyy'$, oder, wenn man mit dem gemeinschaftlichen Factor $3y' + 6c$, welcher nicht verschwinden kann, auf beiden Seiten dividirt:

$$(\delta.) \quad y'' = -2yy'.$$

Eliminirt man nun noch y'' aus $(\gamma.)$ und $(\delta.)$, so erhält man, wenn man den Werth $y'' = -2yy'$ aus $(\delta.)$ in $(\gamma.)$ einsetzt: $-2y^2y' = 2y'^2 + 6cy'$, oder, wenn man durch $2y'$ dividirt:

$$(\varepsilon.) \quad -y^2 = y' + 3c,$$

d. h. $(1, x)$ genügt der Differenzialgleichung erster Ordnung

$$(3.) \quad \frac{\partial(1,x)}{\partial x} = -(1,x)^2 - 3c, \text{ oder}$$

$$(3.) \quad (2,x) = (1,x)^2 + 3(2^*,0),$$

wo die Constante

$$3(2^*,0) = 3c = 6(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\ldots.) = \pi^2$$

ist. Wenn man endlich aus $(\gamma.)$ und $(\delta.)$ statt y'' vielmehr y eliminirt, so erhält man für y' die Differenzialgleichung erster Ordnung:

$$(\zeta.) \quad y'' = 2y'\sqrt{(-y'-3c)}.$$

Ferner läfst sich noch $(\delta.)$ so schreiben:

$$(4.) \quad (3,x) = (1,x)(2,x).$$

Übrigens sieht man aus diesen Formeln, dafs sich sämmtliche Reihen in die erste $(1,x)$ rational und ganz ausdrücken lassen, d. h. $(2,x)$, $(3,x)$ etc. in. inf. sind rationalen ganzen Functionen von $(1,x)$ gleich. Setzt man in der Differentialgleichung erster Ordnung für y:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -y^2 - \pi^2; \quad y = \pi\eta \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{\pi}\xi,$$

so giebt sie $\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = -(1+\eta^2)$. y verschwindet für $x = \frac{1}{2}$, denn wegen seiner Eigenschaft als ungerader Function von x genügt $(1,x)$ der Gleichung $(1,-x) = -(1,x)$, also ist $(1,-\frac{1}{2}) = -(1,\frac{1}{2})$, und wegen der Periodicität ist $(1,-\frac{1}{2}) = (1,-\frac{1}{2}+1) = (1,\frac{1}{2})$, also $(1,\frac{1}{2}) = -(1,\frac{1}{2}) = 0$; folglich verschwindet η für $\xi = \frac{\pi}{2}$. Diejenige Function η von ξ, welche der obigen Differentialgleichung $\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = -(1+\eta^2)$ genügt und für $\xi = \frac{\pi}{2}$ verschwindet, nennt man eben die Cotangente von ξ, also hat man $y = \pi\eta = \pi\,\text{cotang}\,\xi = \pi\,\text{cotang}\,\pi x$, d. h.

$$(1,x) = \Sigma\frac{1}{x+m} = \pi\,\text{cotang}\,\pi x = y.$$

Integrirt man nach einem bekannten Verfahren die Reihe $\Sigma\frac{1}{x+m} = y$ nach x, so ergiebt sich

$$\Sigma\int\frac{\partial x}{x+m} = \Sigma\log(x+m) = \int y\,\partial x = \int\eta\,\partial\xi$$

$$= -\int\frac{\eta\,\partial\eta}{1+\eta^2} = -\tfrac{1}{2}\log(1+\eta^2) + \text{Const.}$$

$$= \log\frac{1}{\sqrt{(1+\eta^2)}} + \text{Const.} = \log\sin\pi x + \text{Const.};$$

und wenn man in der Summe das Glied ausläfst, dessen Index 0 ist,

$$\overset{*}{\Sigma}\log(x+m) = \log\frac{\sin\pi x}{x} + \text{Const.}$$

Hier kann man die Integration mit Null anfangen lassen und erhält, da $\frac{\sin\pi x}{x} = \pi$ für $x = 0$, also $\log\frac{\sin\pi x}{x} = \log\pi$ ist,

$$\overset{*}{\Sigma}\{\log(x+m)-\log m\} = \overset{*}{\Sigma}\log\left(1+\frac{x}{m}\right) = \log\frac{\sin\pi x}{x} - \log\pi,$$

folglich, wenn man von den Logarithmen zu den Gröfsen selbst übergeht:

$$x(1+x)(1-x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\text{in inf.} = \frac{1}{\pi}\sin\pi x.$$

Das unendliche Product, dessen Werth $= \frac{1}{\pi}\sin\pi x$ ist, kann man sehr bequem so schreiben:

$$\Pi\left(1-\frac{x}{m}\right),$$

wenn man sich nur vornimmt, statt des sinnlosen Factors $1-\frac{x}{0}$ den andern x zu setzen. In dem Schulprogramme des Friedrich-Wilhelms-Gymnasii vom 29. Sept. 1845 hat mein verehrter Lehrer Herr Prof. ***Schellbach*** über diese Producte eine Abhandlung publicirt, welche, da sie die Ableitung der Fundamental-Eigenschaften der trigonometrischen Functionen, ausgehend von den unendlichen Producten, zum Gegenstande hat, hier ganz passend erwähnt wird. In jener Abhandlung wird die Ausschliefsung eines Werthes des Index durch das Zeichen ! angedeutet, also z. B. $m!0$ bedeutet die Ausschliefsung des Werthes 0 für m, und das obige Product, bei welchem der Factor $1-\frac{x}{0}$ auszuschliefsen und dafür der andere x zu setzen ist, wird durch

$$x\Pi\left(1+\frac{x}{m!0}\right) = \frac{1}{\pi}\sin\pi x$$

bezeichnet. — Nachdem dieses specielle unendliche Product bestimmt ist, kann man leicht den Werth des allgemeineren Products $\Pi\left(1-\frac{x}{\alpha m+\beta}\right)$ finden, welches stets als die Grenze des folgenden

$$\prod_{m=-k}^{m=k}\left(1-\frac{x}{\alpha m+\beta}\right), \quad k = \infty$$

betrachtet wird. Das allgemeine Glied dieses Productes läfst sich so schreiben:

$$\frac{\alpha m+\beta-x}{\alpha m+\beta}.$$

Hier darf man Zähler und Nenner nicht von einander trennen und jeden für sich als allgemeines Glied eines Products hinstellen, weil diese letzteren bei-

den Producte gegen keine endliche Grenze convergiren würden; wohl aber kann man diese Trennung vornehmen, wenn man zuvor Zähler und Nenner durch αm dividirt und das allgemeine Glied des Products in der Form

$$\frac{1+\frac{\beta-x}{\alpha m}}{1+\frac{\beta}{\alpha m}}$$

schreibt; was geschehen kann, so oft m von Null verschieden ist; für $m=0$ mufs man aber die ursprüngliche Form des allgemeinen Gliedes

$$\frac{\beta-x}{\beta} = \frac{\beta-x}{\alpha} : \frac{\beta}{\alpha}$$

beibehalten. Man erhält auf diese Weise

$$\Pi\left(1-\frac{x}{\alpha m+\beta}\right) = \frac{\frac{\beta-x}{\alpha}\Pi\left(1+\frac{\beta-x}{\alpha m!0}\right)}{\frac{\beta}{\alpha}\Pi\left(1+\frac{\beta}{\alpha m!0}\right)},$$

und da nach der obigen Formel der Zähler den Werth $\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi(\beta-x)}{\alpha}$, der Nenner den Werth $\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi\beta}{\alpha}$ hat, so erhält man, wenn der Kürze wegen $\frac{\beta}{\alpha}=\omega$, $\frac{x}{\alpha}=\xi$ gesetzt wird, die Formel

$$(1.)\qquad \Pi\left(1-\frac{x}{\alpha m+\beta}\right) = \frac{\sin\pi(\omega-\xi)}{\sin\pi\omega} = \frac{e^{\pi(\omega-\xi)i}-e^{-\pi(\omega-\xi)i}}{e^{\pi\omega i}-e^{-\pi\omega i}},$$

welche als Fundamentalformel bei der Ausführung der einen Multiplication nach m in dem unendlichen Doppelproducte benutzt wird.

Um die Fundamentalformeln für die Ausführung der einen Summation in den Doppelreihen aufzustellen, welche aus der Entwicklung des Logarithmen des Doppelproducts entspringen, geht man von der gefundenen Summe

$$(1,x) = \Sigma\frac{1}{x+m} = \pi\operatorname{cotang}\pi x = \pi\frac{\cos\pi x}{\sin\pi x}$$

aus, und differentiirt dieselbe fortgesetzt nach x. Dies giebt

$$(2,x) = \Sigma\frac{1}{(x+m)^2} = \frac{-\partial(\pi\operatorname{cotang}\pi x)}{\partial x} = \pi^2(1+\operatorname{cotang}^2\pi x) = \frac{\pi^2}{\sin^2\pi x},$$

$$(3,x) = \Sigma\frac{2}{(x+m)^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2(\pi\operatorname{cotang}\pi x)}{\partial x^2} = \frac{-1}{2}\pi^2\partial_x\left(\frac{1}{\sin^2\pi x}\right) = \pi^3\frac{\cos\pi x}{\sin^3\pi x}$$

$$(4,x) = \Sigma\frac{1}{(x+m)^4} = -\tfrac{1}{3}\partial_x\left(\pi^3\frac{\cos\pi x}{\sin^3\pi x}\right) = \frac{\pi^4}{3}\left(\frac{1}{\sin^2\pi x}+\frac{3\cos^2\pi x}{\sin^4\pi x}\right)$$

$$= \pi^4\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sin^2\pi x}+\frac{1}{\sin^4\pi x}\right)$$

und so weiter fort. Im Allgemeinen mufs man die Reihen mit geraden Exponenten von denen mit ungeraden Exponenten unterscheiden; für die ersteren erhält man eine Formel von folgender Gestalt:

$$\text{(II.)} \quad (2g, x) = \Sigma \frac{1}{(x+m)^{2g}} = \pi^{2g}\left(\frac{a}{\sin^2 \pi x} + \frac{a'}{\sin^4 \pi x} + \frac{a''}{\sin^6 \pi x} + \text{etc.}\right);$$

eine Reihe, die mit dem Gliede $\frac{1}{\sin^{2g} \pi x}$ abbricht. Für ungerade Exponenten erhält man

$$\text{(III.)} \quad (2g+1, x) = \Sigma \frac{1}{(x+m)^{2g+1}} = \pi^{2g+1}\left\{\frac{b \cos \pi x}{\sin^3 \pi x} + \frac{b' \cos \pi x}{\sin^5 \pi x} + \frac{b'' \cos \pi x}{\sin^7 \pi x} + \text{etc.}\right\};$$

diese Reihe bricht mit dem Gliede $\frac{\cos \pi x}{\sin^{2g+1} \pi x}$ ab. Die Coëfficienten a, a', a'', etc. und b, b', b'', etc. hangen auf einfache Art mit den ***Bernoulli***schen Zahlen zusammen, und das recurrente Gesetz, nach welchem ihre successive Bildung geschieht, ist leicht aus den fortgesetzten Differentiationen zu erkennen. Man kann den Ausdrücken zur Rechten in (II.) und (III.) noch mannigfache andere Formen geben; z. B. die schon weiter oben angedeutete, nach ganzen Potenzen von cotang πx; und zwar enthalten die Entwicklungen nur gerade, oder nur ungerade Potenzen von cotang πx, je nachdem der Exponent der Reihen, deren Ausdruck gegeben wird, gerade oder ungerade ist; der Grad dieser ganzen Functionen von cotang πx ist gleich dem Exponenten der Reihen $(2g, x)$ resp. $(2g+1, x)$.

Das hier abgeleitete System von Formeln findet sich wohl zuerst unter einem gemeinschaftlichen Gesichtspuncte vereinigt in ***Euler's*** „Introductio in Analysin Infinitorum": in diesem berühmten Werke, welches die in Folge der Erfindung der Differential- und Integralrechnung auftretenden vereinzelt stehenden Resultate in ihrer Gesammtheit auffafste und zu einer wissenschaftlichen Theorie erhob. Indem ich auf diese längst bekannten, jetzt ganz elementaren Formeln mit Ausführlichkeit zurückgegangen bin, statt dieselben blofs historisch anzuführen, geschah es weniger, um den Kreisfunctionen selbst eine neue Seite abzugewinnen, als vielmehr in der Absicht, Principien aufzustellen und in einem einfachen Falle klar zu machen, welche nicht allein mit gleicher Leichtigkeit die Fundamental-Eigenschaften der Kreisfunctionen und die der elliptischen Functionen ergeben, sondern welche auch Schritt um Schritt die Analogie verfolgen lassen, welche diese beiden Arten von Functionen sowohl unter einander als auch mit den algebraischen Functionen verbindet. Die identische Gleichung (*a.*), welche die Grundlage der ganzen Untersuchung bildet,

drückt selbst eine sehr einfache Relation zwischen algebraischen Functionen aus; ihr entsprechend findet sich eine Fundamentalformel für die Kreisfunctionen. Die Gleichung (*a.*) war hinreichend zur Aufstellung aller hier nöthigen Formeln; diese Gleichung ist aber selbst nur ein specieller Fall einer allgemeinern, welche aus der Theorie der Zerfällung in Partialbrüche gezogen ist. nämlich der folgenden identischen Gleichung:

$$(d.)\quad \frac{1}{p^\mu}\cdot\frac{1}{q^\nu} = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu-1} \frac{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+\sigma-1)}{1\,.\,2\,\ldots\,\sigma}\cdot\frac{1}{(p+q)^{\nu+\sigma}}\cdot\frac{1}{p^{\mu-\sigma}}$$
$$+\sum_{\tau=0}^{\tau=\nu-1}\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+\tau-1)}{1\,.\,2\,\ldots\,\tau}\cdot\frac{1}{(p+q)^{\mu+\tau}}\cdot\frac{1}{q^{\nu-\tau}}.$$

Man setze in derselben $p=x+m$, $q=-x-n$, so dafs $p+q=m-n$ wird, und summire dann über alle Werthe von m und n von $m=-\infty$ bis $m=\infty$ und von $n=-\infty$ bis $n=\infty$, mit Ausschlufs der Combinationen $m=n$. Auf der linken Seite der Formel erhält man dann

$$(-1)^\nu\{(\mu,x)(\nu,x)-(\mu+\nu,x)\}.$$

Auf der rechten Seite werden ebenfalls die vorkommenden unendlichen Summen durch die hier betrachteten reciproken Reihen ausgedrückt werden können, wenn man $m-n$ als neuen Index einführt. Die Berechtigung zu der Einführung dieses neuen Index beruht wesentlich auf der Annahme, dafs μ und $\nu>1$ sein sollen, welche man machen mufs, damit die Totalsummen, deren allgemeine Glieder die linke und die rechte Seite der Formel (*d.*) sind, unabhängig von der Anordung der Glieder convergiren. Man könnte zwar auch andere Fälle betrachten, welche dieser Beschränkung $\mu>1$, $\nu>1$ nicht unterliegen, aber man müfste dann dem Verfahren eine genaue Untersuchung der Modificationen voranschicken, welche die vorkommenden Reihen durch Einführung neuer Indices erleiden können. Nach Einführung des neuen Index $m-n$ kann man die $\mu+\nu$ Terme des allgemeinen Gliedes auf der rechten Seite trennen und jeden Term einzeln summiren. Die Berechtigung zu dieser Trennung beruht darauf, dafs die einzelnen Doppelsummen, welche zu allgemeinen Gliedern diese einzelnen Terme haben, jede für sich convergiren; denn diese Doppelsummen lösen sich in Producte von convergenten einfachen Summen auf. In der That: für diejenigen Reihen, in welchen die Exponenten die Einheit übertreffen, folgt diese Zerfällung aus der Unabhängigkeit dieser Reihen von der Anordnung ihrer Glieder, während sie für diejenigen Reihen, deren Exponent $=1$ ist, aus ihrer Periodicität hervorgeht. Man findet auf diese Weise rechts

$$\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu-1} \frac{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+\sigma-1)}{1\,.\,2\,\ldots\,\sigma}(\nu+{}^*\sigma, 0)(\mu-\sigma, x)$$

$$+\sum_{\tau=0}^{\tau=\nu-1} \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+\tau-1)}{1\,.\,2\,\ldots\,\tau}(-1)^{\nu-\tau}(\mu+{}^*\tau, 0)(\nu-\tau, x),$$

wo der Stern * stets das Ausfallen des Werthes Null für den Index bedeutet. Dieser Ausdruck vereinfacht sich bedeutend, wenn man bedenkt dafs $(g^*, 0)$ stets $= 0$, wenn g ungerade ist, und wenn man jedesmal in den beiden Summen zwei entsprechende Glieder, welche durch die Relation $\mu-\sigma=\nu-\tau$ zusammenhangen, zusammenzieht, indem man die constanten Coëfficienten in beiden addirt. Diese Vereinfachung, welche die Anzahl der Glieder fast auf den vierten Theil reducirt, läfst sich jedoch im Allgemeinen durch Buchstaben nur sehr complicirt wiedergeben, da sie sowohl davon abhangt, ob μ und ν gerade oder ungerade sind, als auch von dem gegenseitigen Verhältnifs der Gröfse der beiden Zahlen μ und ν. Wenn man nun den in Rede stehenden Ausdruck, nachdem man ihn möglichst vereinfacht hat,

$$= (-1)^{\nu}\big((\mu, x)(\nu, x)-(\mu+\nu, x)\big)$$

setzt, so hat man ein sehr allgemeines Resultat für Kreisfunctionen, welches der Formel (*d.*) für algebraische Functionen entspricht. Wollte man in der gefundenen Formel, welche nur unter der Bedingung $\mu>1$, $\nu>1$ bewiesen ist, $\mu=\nu=1$ setzen, so erhielte man das offenbar falsche Resultat

$$(1, x)^2-(2, x) = 0;$$

verfährt man aber mit der oben gedachten Vorsicht, welche dieser Fall erfordert, so erhält man

$$(1, x)^2-(2, x) = c,$$

wo c eine von Null verschiedene Constante ist; denn aus der Doppelsumme

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{x+m}\cdot\frac{1}{x+n},$$

welche $=(1, x)^2$ ist, läfst sich freilich zunächst derjenige Theil herausziehen, welcher die Combinationen $m=n$ enthält und welcher die von der Anordnung der Glieder unabhängige einfache Summe

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{1}{(x+m)^2} = (2, x)$$

bildet; allein der Rest der Doppelsumme, welcher sich mit Hülfe der identischen Gleichung (*d.*) für den Fall $\mu=\nu=1$, d. h. mit Hülfe der identischen Gleichung

$$\frac{1}{pq} = \frac{1}{p+q}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$$

auf die Form

$$\Sigma\Sigma \frac{1}{m-n}\left\{-\frac{1}{x+m}+\frac{1}{x+n}\right\}$$

bringen läfst, wo die Combinationen $m=n$ auszuschliefsen, hat keinesweges den Werth Null, obgleich man Null erhalten würde, wenn man die beiden Terme des allgemeinen Gliedes trennte und $m-n$ ohne Weiteres als neuen Index einführte; was jedoch ohne alle Berechtigung geschehen würde. Betrachtet man dagegen, wie es erlaubt ist, den eben geschriebenen Ausdruck als die Grenze des folgenden:

$$\sum_{m=-k}^{m=k}\sum_{n=-k}^{n=k}\frac{1}{m-n}\left\{-\frac{1}{x+m}+\frac{1}{x+n}\right\},$$

für $k=\infty$, so läfst sich leicht zeigen, dafs derselbe für ein wachsendes k sich einer von x unabhängigen Constante über alle Grenzen nähert. Man fängt zu dem Ende zunächst damit an, jedesmal der Summe derjenigen Glieder, für welche $m-n$ einen bestimmten Werth zwischen $-2k$ und $2k$ hat, eine einfachere Form zu geben. Aber die weitere Ausführung und das nähere Detail würde mich hier zu weit entfernen. Inzwischen sieht man aus diesem Beispiel, dafs bei der Zusammenstellung der algebraischen Formeln mit den transcendenten, in den letzteren gewissermafsen Lücken entstehen; d. h. es giebt eine Anzahl algebraischer Formeln, welchen keine der strengen Analogie sich anschliefsenden transcendenten Formeln entsprechen; diese Lücken werden erst durch *modificirte* Formeln gewissermafsen ausgefüllt, welche sich mehr oder weniger von der Analogie entfernen. Das Vorhandensein und die besondere Natur dieser Lücken, welche aus der Abhängigkeit einiger der vorkommenden Reihen von der Anordnung ihrer Glieder entspringen, begründet einen der characteristischen Unterschiede der transcendenten Functionen, sowohl unter sich, als auch von den algebraischen Functionen.

Eine von der vorigen verschiedene transcendente Formel, welche ebenfalls der algebraischen Formel (*d.*) entspricht, erhält man, wenn man $p=x+m$, $q=n$, also $p+q=x+m+n$ setzt, nach m und n, mit Ausschlufs des Werthes $n=0$, summirt und rechts $m+n$ als neuen Index einführt. Aber weit schärfer springt die Analogie der Formeln in die Augen, wenn man in (*d.*) $p+m$ an die Stelle von p; $q+n$ an die Stelle von q, also $p+q+m+n$ an die Stelle von $p+q$ schreibt und nach m und n von $-\infty$ bis ∞ ohne Ausschliefsung irgend eines Werthes oder irgend einer Combination summirt, indem man rechts $m+n$ als neuen Index einführt. Man erhält dann eine, ein ganzes

Gebiet von speciellen Formeln umfassende, allgemeine Formel, welcher geradezu und ohne alle Veränderung sowohl algebraische, als Kreisfunctionen genügen, d. h. welche gilt, man möge die darin vorkommenden Functionen in der einen oder in der andern dieser beiden Bedeutungen nehmen.

In der That erhält man aus der algebraischen Formel (*d.*) auf die angegebene Weise und indem man das allgemeine Glied rechts in seine einzelnen Terme zerlegt und die Doppelsummen in Producte von einfachen Summen auflöset, die folgende transcendente Formel:

$$(e.)\quad (\mu,p)(\nu,q) = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu-1} \frac{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+\sigma-1)}{1\ .\ 2\ \ldots\ \sigma}(\nu+\sigma,p+q)(\mu-\sigma,p) + \sum_{\tau=0}^{\tau=\nu-1} \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+\tau-1)}{1\ .\ 2\ \ldots\ \tau}(\mu+\tau,p+q)(\nu-\tau,q).$$

Berücksichtigt man nun, dafs allgemein $(g,x) = \frac{(-1)^{g-1}}{1.2.3\ldots(g-1)}\cdot\frac{\partial^{g-1}(1,x)}{\partial x^{g-1}}$, und dafs ebenfalls algemein $\frac{1}{x^g} = \frac{(-1)^{g-1}}{1.2.3\ldots(g-1)}\cdot\frac{\partial^{g-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{\partial x^{g-1}}$ ist, und setzt in diesen Formeln erst $g=\mu$ und $x=p$, dann $g=\nu$ und $x=q$, ferner $g=\nu+\sigma$, $x=p+q$; $g=\mu-\sigma$, $x=p$; $g=\mu+\tau$, $x=p+q$, endlich $g=\nu-\tau$, $x=q$, so erhellet, dafs die algebraische Gleichung (*d.*) und die transcendente (*e.*) sich beide in die folgende vereinigen lassen:

$$(f.)\quad f^{(\mu-1)}(p)f^{(\nu-1)}(q) = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu-1} \frac{(\mu-\sigma)(\mu-\sigma+1)\ldots(\mu-1)}{1\ .\ 2\ \ldots\ \sigma} f^{(\nu+\sigma-1)}(p+q)f^{(\mu-\sigma-1)}(p) + \sum_{\tau=0}^{\tau=\nu-1} \frac{(\nu-\tau)(\nu-\tau+1)\ldots(\nu-1)}{1\ .\ 2\ \ldots\ \tau} f^{(\mu+\tau-1)}(p+q)f^{(\nu-\tau-1)}(q),$$

welche gilt, man mag $f(x)=\frac{1}{x}$, oder $f(x)=(1,x)=\pi\operatorname{cotang}\pi x$ setzen. Aus der Formel (*e.*), welche von der gröfsten Fruchtbarkeit ist, fliefsen unter andern mit leichter Mühe die Additionstheoreme für alle Arten von Kreisfunctionen. Ich verweile jedoch nicht bei diesen Anwendungen, so wie auch nicht bei denjenigen transcendenten Gleichungen, welche den algebraischen Formeln entsprechen, die sich auf die Zerfällung des allgemeineren Bruchs

$$\frac{1}{p^\mu}\cdot\frac{1}{q^\nu}\cdot\frac{1}{r^\varrho}\cdot\ldots$$

beziehen; denn diese Untersuchungen sind nur als eine Vorbereitung zu denjenigen anzusehen, welche ich im folgenden Paragraphen in demselben Sinne

für elliptische Functionen anstellen werde. Wenn man übrigens das Additionstheorem für die Cotangente mit leichter Mühe und ohne weitere Elimination erhalten will, so kann man wie folgt verfahren. Obwohl die Summe $\Sigma\frac{1}{x+m}$ nicht unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder convergirt, so gilt dies doch von der Summe

$$\Sigma\left\{\frac{1}{x+m}-\frac{1}{y+m}\right\}=(1,x)-(1,y).$$

Es läfst sich diese Eigenschaft schon daraus schliefsen, dafs die erstere Summe $\Sigma\frac{1}{x+m}$ bei allen ihren Modificationen doch nur einen constanten, von x unabhängigen Zuwachs *) erhalten kann; welcher sich also wieder aufheben mufs, wenn man zwei dergleichen Reihen Glied um Glied von einander subtrahirt. Man kann diese Eigenschaft auch aus der Form des allgemeinen Gliedes

$$\frac{1}{x+m}-\frac{1}{y+m}=\frac{y-x}{(x+m)(y+m)}$$

beweisen. Bildet man daher das Product

$$\left\{\frac{1}{x+m}-\frac{1}{y+m}\right\}\left\{\frac{1}{x+n}-\frac{1}{y+n}\right\}$$

und summirt nach m und n, so wird die hieraus hervorgehende Doppelsumme, welche

$$=((1,x)-(1,y))^2$$

ist, auch unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren und man wird statt m und n neue Indices einführen dürfen. Entwickelt man jenes Product und zerfället es in Partialbrüche, so kommt, wenn m und n verschieden sind:

$$\frac{1}{m-n}\left\{-\frac{1}{x+m}+\frac{1}{x+n}-\frac{1}{y+m}+\frac{1}{y+n}\right\}+\frac{1}{x-y+m-n}\left\{\frac{1}{x+m}-\frac{1}{y+n}\right\}$$
$$+\frac{1}{y-x+m-n}\left\{\frac{1}{y+m}-\frac{1}{x+n}\right\}.$$

Wenn $m=n$ ist, so bleiben die beiden letzten Theile dieser Formel richtig; an die Stelle des ersten Theils tritt aber

$$\frac{1}{(x+m)^2}+\frac{1}{(y+m)^2};$$

---

*) Denn $\nabla\Sigma\frac{1}{x+m}=\nabla\Sigma'\frac{1}{x+m}$, wo Σ' nur diejenigen Werthe von m umfafst, deren analytischen Modul $>M(x)$ ist, und $\Sigma'\frac{1}{x+m}=\Sigma'\frac{1}{m}-x\Sigma'\frac{1}{m^2}+x^2\Sigma'\frac{1}{m^3}-$ etc., während $\nabla\Sigma'\frac{1}{m^2}=0$, $\nabla\Sigma'\frac{1}{m^3}=0$, u. s. w., folglich $\nabla\Sigma\frac{1}{x+m}=\nabla\Sigma'\frac{1}{m}=\nabla\Sigma^*\frac{1}{m}$.

was eine einfache Summe nach m hervorbringt. Führt man nun $m-n$ als neuen Index ein, summirt zuerst nach m, indem man n unter der Form $m-(m-n)$ schreibt, berücksichtigt die Periodicität der Functionen, vermöge welcher alle vorkommenden Doppelsummen in Producte von einfachen Summen zerfallen, und summirt schliefslich nach $m-n$, als zweitem Index, so erhält man

$(1,x-y)\{(1,x)-(1,y)\}+(1,y-x)\{(1,y)-(1,x)\}+(2,x)+(2,y)$, d. h.

$$(2,x)+(2,y)+2(1,x-y)\{1,x)-(1,y)\}.$$

Setzt man noch $-y$ an die Stelle von y, so hat man die Formel

$$2(1,x+y)\{(1,x)+(1,y)\} = \{(1,x)+(1,y)\}^2-(2,x)-(2,y).$$

Da nun oben $(2,x)=(1,x)^2+3(2^*,0)=(1,x)^2+\pi^2$, $(2,y)=(1,y)^2+\pi^2$ gefunden wurde, so erhält man endlich nach allen Reductionen:

$$(1,x+y) = \frac{(1,x)(1,y)-3(2^*,0)}{(1,x)+(1,y)} = \frac{(1,x)(1,y)-\pi^2}{(1,x)+(1,y)},$$

und, da $(1,x)=\pi\operatorname{cotang}\pi x$ war,

$$\operatorname{cotang}(u+v) = \frac{\operatorname{cotang}u\operatorname{cotang}v-1}{\operatorname{cotang}u+\operatorname{cotang}v}.$$

Aus dieser Additionsformel lassen sich leicht der Ausdruck der Reihe $(1,x)$ und sodann auch der Ausdruck der übrigen Reihen $(2,x)$, $(3,x)$ u. s. w. durch Exponentialgröfsen herleiten, so wie auch die Formeln

$$\operatorname{tang}u = \frac{1}{\operatorname{cotang}u} = -\operatorname{cotang}\left(u+\frac{\pi}{2}\right) \text{ und } \frac{1}{\sin u} = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{cotang}\frac{u}{2}-\operatorname{cotang}\frac{u+\pi}{2}\right);$$

welche letztern bei dem hier genommenen Ausgangspuncte dadurch eine besondere Wichtigkeit erhalten, dafs sie zunächst einen rationalen Ausdruck des Sinus durch *einförmige* Functionen darstellen.

Ich kehre zu dem Hauptgegenstande dieses Paragraphen zurück, der Ausführung der Multiplication und der Summation nach dem einen Index m in den unendlichen Doppelproducten, resp. Doppelsummen, welche in dem Frühern betrachtet worden sind. Ich beginne mit den Doppelsummen von der Form

$$\sum_{m,n}\frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^{2g}}, \quad \sum_{m,n}\frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^{2g+1}}.$$

Schreibt man in den Formeln (II.) und (III.) $\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}$ an die Stelle von x und multiplicirt die allgemeinen Glieder der Summe nach m auf der linken Seite mit $\frac{1}{\alpha^{2g}}$ in (II.) und mit $\frac{1}{\alpha^{2g+1}}$ in (III.), so erhält man, abgesehn von den constanten Multiplicatoren, in welchen der Index n nicht vorkommt,

$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^{2g}}$ durch ein Aggregat von Functionen von der Form

$$\frac{1}{\sin^2 \pi \frac{\beta n+\gamma}{\alpha}}, \quad \frac{1}{\sin^4 \pi \frac{\beta n+\gamma}{\alpha}}, \quad \frac{1}{\sin^6 \pi \frac{\beta n+\gamma}{\alpha}}, \quad \text{u. s. w.,}$$

und $\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^{2g+1}}$, wenn $g > 0$ ist, durch ein Aggregat von Functionen von der Form

$$\frac{\cos \pi \frac{\beta n+\gamma}{\alpha}}{\sin^3 \pi \frac{\beta n+\gamma}{\alpha}}, \quad \frac{\cos \pi \frac{\beta n+\gamma}{\alpha}}{\sin^5 \pi \frac{\beta n+\gamma}{\alpha}}, \quad \frac{\cos \pi \frac{\beta n+\gamma}{\alpha}}{\sin^7 \pi \frac{\beta n+\gamma}{\alpha}}, \quad \text{u. s. w.}$$

ausgedrückt, während für $g = 0$

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\alpha m+\beta n+\gamma} = \frac{\pi}{\alpha} \operatorname{cotang} \pi \frac{\beta n+\gamma}{\alpha}$$

ist. Setzt man, um abzukürzen $\frac{\pi\beta}{\alpha} = \eta$ und $\frac{\pi\gamma}{\alpha} = \xi$, so zeigt sich, dafs alle nach n auszuführenden Summationen in solche zerfallen, welche sich auf allgemeine Glieder von den Formen

$$\frac{1}{\sin^{2g}(n\eta+\xi)}, \quad \text{oder} \quad \frac{\cos(n\eta+\xi)}{\sin^{2g+1}(n\eta+\xi)} \quad \text{oder} \quad \operatorname{cotang}(n\eta+\xi)$$

beziehen. Ich werde nun allgemein beweisen, dafs jede Summe von der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{\cos^h(n\eta+\xi)}{\sin^g(n\eta+\xi)} \quad \text{oder} \quad \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{\sin^h(n\eta+\xi)}{\cos^g(n\eta+\xi)},$$

wo g und h nicht negative ganze Zahlen sind, stets unäbhängig von der Anordnung der Glieder convergirt, sobald nur $g > h$ ist. Die Summe $\Sigma \operatorname{cotang}(n\eta+\xi)$, und allgemein der Fall $g = h$, erfordert eine besondere Untersuchung. Wenn auch die Doppelreihen unmittelbar nur auf solche einfache Reihen von der obigen Form führen, in welchen der Sinus im Nenner steht und entweder $h = 0$ und g gerade, oder $h = 1$ und g ungerade ist, so hangen doch mittelbar alle jene einfachen Reihen für beliebige, nicht negative ganze Werthe von g und h, welche der Bedingung $g \geqq h$ genügen, mit Doppelreihen von der hier betrachteten Form zusammen. Denn zunächst gehen diejenigen einfachen Reihen, welche den Sinus im Zähler und den Cosinus im Nenner haben, sogleich aus den andern, welche umgekehrt den Cosinus im Zähler und den Sinus im Nenner haben, hervor, wenn man $\xi + \frac{\pi}{2}$ an die Stelle von ξ setzt;

also, wenn man in den Doppelsummen $\gamma+\frac{\alpha}{2}$ an die Stelle von γ setzt, weil $\gamma=\frac{\alpha\xi}{\pi}$, also eine Vermehrung von ξ um $\frac{\pi}{2}$ eine Vermehrung von γ um $\frac{\alpha}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\alpha}{2}$ nach sich zieht. Steht nun die $h$te Potenz des Cosinus von $n\eta+\xi$ im Zähler des allgemeinen Gliedes der einfachen Summe, so kann man, wenn h gerade ist, dieselbe in ein Aggregat von geraden Potenzen des Sinus, und wenn h ungerade ist, in das Product von $\cos(n\eta+\xi)$ und einem solchen Aggregate zerlegen. Dividirt man nun jedesmal Zähler und Nenner mit derjenigen Potenz des Sinus, welche im Zähler steht, so zerfällt das allgemeine Glied in eine Summe von Gliedern, welche entweder sämmtlich die Einheit, oder sämmtlich die erste Potenz des Cosinus im Zähler und verschiedene Potenzen des Sinus im Nenner haben. Diejenigen Glieder, welche die Einheit im Zähler und eine gerade Potenz des Sinus im Nenner, oder den Cosinus im Zähler und eine ungerade Potenz des Sinus im Nenner haben, geben, nach n summirt, Reihen, welche, wie wir gesehen haben, unmittelbar aus den hier betrachteten Doppelreihen vermöge der nach m ausgeführten Summation entspringen. Es bleiben noch diejenigen Reihen übrig, deren allgemeine Glieder die Einheit im Zähler und eine ungerade Potenz des Sinus im Nenner, oder den Cosinus im Zähler und eine gerade Potenz des Sinus im Nenner enthalten. Die allgemeinen Glieder von einer dieser letzteren beiden Formen werden nach der Formel

$$\frac{1}{\sin x}=\tfrac{1}{2}\left(\operatorname{cotang}\frac{x}{2}-\operatorname{cotang}\frac{x+\pi}{2}\right)$$

und denjenigen Formeln, welche aus dieser durch wiederholte Differentiationen nach x hervorgehen, in solche allgemeine Glieder zerlegt, welche $\cos\frac{n\eta+\xi}{2}$ oder $\cos\frac{n\eta+\xi+\pi}{2}$ und respective die Einheit im Zähler und eine ungerade und resp. eine gerade Potenz von $\sin\frac{n\eta+\xi}{2}$ oder $\sin\frac{n\eta+\xi+\pi}{2}$ im Nenner enthalten, und die betreffenden einfachen Summen nach n gehen demnach aus solchen Doppelsummen hervor, in welchen 2α an die Stelle von α (oder, was dasselbe besagt, $\frac{\beta}{2}$ an die Stelle von β) getreten ist, und welche ihr drittes Element γ theils unverändert, theils $\gamma+\alpha$ an dessen Stelle enthalten; wie man sogleich ersieht, wenn man den Zusammenhang zwischen η und ξ einerseits und α, β, γ andrerseits berücksichtigt und hiernach die Modificationen sucht, welche die

letzteren erleiden, wenn η und ξ entweder in $\frac{\eta}{2}$ resp. $\frac{\xi}{2}$, oder in $\frac{\eta}{2}$ resp. $\frac{\xi+\pi}{2}$ übergehen.

Die Convergenz der Reihen nach n, in welchen $g > h$ ist, wird dadurch nachgewiesen, dafs man eine geometrische Reihe angiebt, deren sogenannter Exponent, d. h. der Quotient aus irgend einem Gliede in das vorhergehende, unter der Einheit liegt, und welche nicht stärker convergirt, als die Summe der Moduln der Glieder der vorgelegten Reihe. Schreibt man für das allgemeine Glied seinen Ausdruck durch Exponentialfunctionen und läfst hierbei die ganz unwesentliche Potenz von i weg, so kommt

$$\frac{(e^{(n\eta+\xi)i} + e^{-(n\eta+\xi)i})^h}{(e^{(n\eta+\xi)i} - e^{-(n\eta+\xi)i})^g}.$$

Zunächst beachte man, dafs dieser Ausdruck in einen ganz ähnlichen übergeht, wenn man $-n$ an die Stelle von n setzt; nur tritt dann $-\xi$ an die Stelle von ξ, während die beiden Summanden im Zähler und der Minuendus und Subtrahendus im Nenner ihre Rollen vertauschen. Man erleichtert daher die Untersuchung, wenn man n nur positive Werthe durchlaufen läfst; nachher hat man dann nur noch eine ganz ähnliche zweite Reihe zu betrachten, welche sich von der ersten lediglich durch den Werth von ξ unterscheidet. Wenn n positiv ist, so convergirt die Exponentialfunction

$$e^{(n\eta+\xi)i} \pm e^{-(n\eta+\xi)i}$$

für $n = \infty$, entweder gegen $e^{(n\eta+\xi)i}$ oder gegen $\pm e^{-(n\eta+\xi)i}$, je nachdem der reelle Theil von ηi positiv oder negativ ist; in beiden Fällen convergirt also diese Exponentialfunction gegen

$$\pm e^{\pm(n\eta+\xi)i},$$

wenn man das doppelte Zeichen im Exponenten stets so bestimmt, dafs der reelle Theil von $\pm\eta i$ positiv, oder was dasselbe ist, der Coëfficient von i in $\pm\eta$, welcher wegen $\eta = \frac{\pi\beta}{\alpha}$ wesentlich von Null verschieden ist, negativ wird. Das allgemeine Glied der vorgelegten Summe convergirt daher für $n = \infty$ gegen

$$\pm\frac{e^{\pm h(n\eta+\xi)i}}{e^{\pm g(n\eta+\xi)i}} = \pm e^{\pm(h-g)(n\eta+\xi)i},$$

und der Modul des allgemeinen Gliedes convergirt gegen

$$M(e^{\pm(h-g)(n\eta+\xi)i});$$

d. h. der Quotient aus dem Modul des allgemeinen Gliedes und dem eben ge-

schriebenen Ausdrucke kann der Einheit so nahe gebracht werden, als man will, wenn man n hinlänglich grofs annimmt. Der Quotient aus den beiden Werthen, welche der Modul des allgemeinen Gliedes der vorgelegten Reihe annimmt, wenn man $n+1$ und n für den Index setzt, convergirt daher gegen den Quotienten der beiden Moduln

$$M(e^{\pm(h-g)[(n+1)\eta+\xi]i}) : M(e^{\pm(h-g)(n\eta+\xi)i}),$$

also gegen $M(e^{\pm(h-g)\eta i})$, und die Convergenz derjenigen Reihe, welche aus der vorgelegten hervorgeht, wenn man statt aller Glieder ihre analytischen Moduln setzt, wird mithin von einer gewissen Stelle ab mit der Convergenz der geometrischen Reihe vergleichbar, in welcher der Quotient aus irgend einem Gliede durch das vorhergehende um so wenig als man will über $M(e^{\pm(h-g)\eta i})$ fällt. Der reelle Theil von $\pm\eta i$ ist positiv, $h-g$ ist nach der Voraussetzung negativ, also der reelle Theil des Exponenten $\pm(h-g)\eta i$ negativ, und da allgemein $M(e^{u+vi}) = M(e^u) = e^u < 1$, so oft u negativ ist, so hat man $M(e^{\pm(h-g)\eta i}) < 1$, und somit ist die Convergenz der vorgelegten Reihe und zugleich ihre Unabhängigkeit von der Anordnung der Glieder aufser Zweifel gestellt. Man sieht zugleich aus dieser Betrachtung, dafs die vorgelegte Reihe wesentlich divergent sein müfste, wenn $g < h$ ist; für $g = h$ stimmt die Reihe der Moduln in Bezug auf Convergenz zuletzt, d. h. im Unendlichen, mit einer geometrischen Reihe mit dem Exponenten $= 1$ überein, und die Convergenz der vorgelegten Reihe, wenn sie Statt findet, hangt von der Anordnung ihrer Glieder ab.

Zerlegt man, wenn $g = h$ ist, die $h$te Potenz des Cosinus im Zähler nach der oben vorgeschriebenen Regel entweder in Potenzen des Sinus oder in das Product aus $\cos(n\eta+\xi)$ und Potenzen des Sinus, je nachdem h gerade oder ungerade ist, und zerfället das allgemeine Glied in seine einzelnen Termen, indem man jeden Term des Zählers einzeln durch den Nenner $\sin^h(n\eta+\xi)$ dividirt, so sieht man, dafs zu den Gliedern, deren Summation durch das Vorhergehende schon erledigt ist, nur noch, entsprechend den beiden eben unterschiedenen Fällen eines geraden oder eines ungeraden Werthes von h, entweder eine ***Constante***, oder ein Glied wie $\frac{\cos(n\eta+\xi)}{\sin(n\eta+\xi)} = \text{cotang}(n\eta+\xi)$ hinzutritt. Da nun eine Constante nicht als allgemeines Glied einer convergenten (unendlichen) Summe auftreten kann, so mufs der Fall eines geraden Werthes von h, welcher stets eine divergente Reihe involvirt, ausgeschlossen werden und es bleibt nur noch die Betrachtung der einen Summe übrig, deren allge-

meines Glied $\operatorname{cotang}(n\eta+\xi)$ ist. Die Reihe $\Sigma\operatorname{cotang}(n\eta+\xi)$ gehört zu denjenigen convergenten Reihen, welche mit der gröfsten Vorsicht behandelt werden müssen; denn da ihre Glieder im Unendlichen nicht gegen Null, sondern für $n=\infty$ resp. $n=-\infty$ gegen zwei einander entgegengesetzte von Null verschiedene Grenzen convergiren, so ändert die Reihe bei der geringsten Verschiebung der Glieder ihren Werth. Die Convergenz dieser Reihe, wenn man in ihr je zwei Glieder, welche entgegengesetzten Werthen von n entsprechen, zusammenfafst, läfst sich indessen mit leichter Mühe darthun, indem sich bei dieser Anordnung der Glieder die Reihe auf das Frühere zurückführen und wiederum mit einer geometrischen vergleichen läfst. Man hat

$$\operatorname{cotang}(\xi+n\eta)+\operatorname{cotang}(\xi-n\eta)=\frac{\sin 2\xi}{\sin(\xi+n\eta)\sin(\xi-n\eta)},$$

also ist nur die Convergenz der folgenden Reihe zu untersuchen:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\sin(\xi+n\eta)\sin(\xi-n\eta)}.$$

Diese Reihe convergirt in der That unabhängig von der Anordnung der Glieder, und auch dann noch, wenn man statt aller Glieder deren analytische Moduln setzt; denn da schon durch das Frühere die Convergenz der beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{M\sin(\xi+n\eta)} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{M\sin(\xi-n\eta)}$$

festgestellt ist, so ist die a fortiori Statt findende Convergenz der in Rede stehenden Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{M\sin(\xi+n\eta)\,M\sin(\xi-n\eta)}$$

einleuchtend; und zwar wird letztere mit einer geometrischen Reihe vergleichbar sein, deren Exponent gleich dem Producte der Exponenten derjenigen geometrischen Reihen ist, mit welchen die beiden obigen Reihen im Unendlichen übereinstimmen.

Um noch ein Wort über diejenigen Werthe von ξ hinzuzufügen, für welche die Functionen, die durch die hier betrachteten Reihen dargestellt sind, discontinuirlich werden: so kann man nicht eigentlich sagen, dafs die Reihen für solche Werthe divergent wären, sondern es kommt nur ein einziges Glied in ihnen vor, welches unendlich wird und welches allein die Discontinuität der Function verursacht; nach dessen Wegnahme bildet der Rest immer noch eine convergente Summe.

Nach diesen Convergenzbetrachtungen gehe ich zu den Folgerungen über, welche für die durch Summation der Doppelreihen nach dem einen Index gewonnenen einfachen Reihen hervorgehen, wenn man die Resultate dieses Paragraphen mit den Untersuchungen des vorhergehenden in Verbindung setzt. Da wir im vorhergehenden Paragraphen die Modificationen, welche α, β, γ und die Doppelsummen selbst, durch Transformation der Indices erleiden, ausführlich auseinandergesetzt haben, und da die hier gefundenen einfachen Summen nur von den beiden Elementen η und ξ abhängen, deren Verknüpfung mit α, β, γ durch die sehr einfachen Relationen

$$(\eta.) \qquad \eta = \frac{\pi\beta}{\alpha} = \pi\omega, \qquad \xi = \frac{\pi\gamma}{\alpha}$$

festgesetzt ist, so lassen sich die Theoreme, zu welchen die erwähnte Vergleichung führt, sehr leicht und unmittelbar aussprechen, sobald man nur die den Modificationen von α, β, γ entsprechenden Veränderungen von η und ξ aus den Relationen $(\eta.)$ berechnet.

Um mich hierbei kürzer fassen zu können, will ich den Begriff der ***Substitution*** durch ein besonderes Zeichen, z. B. durch das Zeichen $\backsim$ darstellen, dessen Einführung bei vielen Untersuchungen dringend nöthig ist, sobald es sich um die Betrachtung der Werthe handelt, in welche Ausdrücke übergehen, wenn andere Ausdrücke, von welchen die ersteren Functionen sind, ihre Form oder ihren Werth ändern. Dieses Zeichen $\backsim$, welches eine Menge von Worten erspart, heifst im Vorsatze (Hypothesis): „Wenn anstatt des zur Linken des Zeichens stehenden der zur Rechten befindliche Ausdruck gesetzt wird," und im Nachsatze, in der Folgerung (Thesis): „So geht die linke Seite in die rechte über." Z. B. der Satz, wenn $\boldsymbol{A \backsim B}$, so ist $\boldsymbol{C \backsim D}$ heifst: wenn man $\boldsymbol{B}$ an die Stelle von $\boldsymbol{A}$ setzt, also, wenn man $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{B}$ übergehen läfst, so geht $\boldsymbol{C}$ in $\boldsymbol{D}$ über, oder so tritt $\boldsymbol{D}$ an die Stelle von $\boldsymbol{C}$. Des Gleichheitszeichens kann man sich zu diesem Zwecke nicht füglich bedienen, da das Setzen zweier Ausdrücke statt einander in eine Formel, in der Absicht die Modification der Formel zu untersuchen, durchaus keine Gleichheit der für einander gesetzten Gröfsen bedingt, und da namentlich häufig Gröfsen statt einander gesetzt werden, welche ihrer Form nach nie einander gleich sein können; wie es z. B., wenn man $m+1$ an die Stelle von m zu setzen hätte, jedenfalls unpassend wäre, deshalb $m = m+1$ zu schreiben; während die Formel $m \backsim m+1$ diesen Begriff oder hier diese Forderung sehr gut ausdrückt. Übrigens lassen sich diese Substitutionsformeln, wie unmittelbar aus ihrer Bedeutung hervor-

geht, ganz wie Gleichungen behandeln, indem man auf beiden Seiten des Zeichens gleiche Operationen vornehmen, mehrere Formeln durch beliebige Operationen verknüpfen darf, u. s. w.; nur darf man nie, was bei Gleichungen erlaubt ist, die beiden Seiten einer Formel mit einander vertauschen, sondern man mufs stets die linke und die rechte Seite genau von einander unterscheiden *).

Bei der im vorigen Paragraphen zuerst angewandten Transformation der Indices $m \circ m+\lambda$, $n \circ n+\nu$ blieben α und β unverändert, während $\gamma \circ \gamma+\lambda\alpha+\nu\beta$ war, die Doppelsummen blieben selbst unverändert, bis auf diejenige, deren Exponent $=1$, und welche den Zuwachs $\nabla = \delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha}$ erhält. Da α und β sich nicht ändern, so bleiben auch $\omega = \frac{\beta}{\alpha}$ und $\eta = \frac{\pi\beta}{\alpha}$ unverändert, während $\xi = \frac{\pi\gamma}{\alpha} \circ \frac{\pi(\gamma+\lambda\alpha+\nu\beta)}{\alpha} = \xi+\lambda\pi+\nu\eta$. Alle in diesem Paragraphen durch Summation gewonnenen Formeln lassen sich in die folgende zusammenziehen:

$$\text{(IV.)} \qquad \Sigma\Sigma\frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^g} = \frac{(-1)^{g-1}\pi^g}{1.2....(g-1)\alpha^g}\Sigma\frac{\partial^{g-1}\operatorname{cotang}(n\eta+\xi)}{\partial\xi^{g-1}}.$$

Man erhält folglich, wenn $g>1$ ist,

$$\Sigma_n\frac{\partial^{g-1}\operatorname{cotang}(n\eta+\xi')}{\partial\xi^{g-1}} = \Sigma_n\frac{\partial^{g-1}\operatorname{cotang}(n\eta+\xi)}{\partial\xi^{g-1}},$$

und für $g=1$,

$$\frac{\pi}{\alpha}\Sigma\operatorname{cotang}(n\eta+\xi') = \frac{\pi}{\alpha}\Sigma\operatorname{cotang}(n\eta+\xi)+\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha},$$

folglich

$$\Sigma\operatorname{cotang}(n\eta+\xi') = \Sigma\operatorname{cotang}(n\eta+\xi)+2\delta\nu i,$$

wenn $\xi' = \xi+\lambda\pi+\nu\eta$ und $\delta=-1$ oder $=+1$, je nachdem der Coëfficient von i in $\omega = \frac{\beta}{\alpha}$ positiv oder negativ ist. Diese Resultate können in folgendem Theorem vereinigt werden:

---

*) Man könnte dieses Verhalten gar nicht unpassend durch das Zeichen selbst anschaulich machen, wenn man z. B. einen liegenden Pfeil wählte, der, je nachdem sich seine Spitze nach der rechten oder nach der linken Seite wendet, anzeigte, ob die rechte Seite für die linke oder die linke für die rechte substituirt werden soll; da jedoch dergleichen Charactere im Druck schwer darzustellen sind, wenn sie häufig wiederkehren, so mag es bei dem obigen Zeichen sein Bewenden haben. Übrigens findet man selten Gehör, wenn man die Wichtigkeit der Bezeichnung eines solchen Begriffs a priori demonstriren will und man mufs dem practischen Gebrauche den Nachweis der Nützlichkeit des Zeichens überlassen.

A. „Die Summen von der Form $\Sigma \frac{\partial^{g-1} \operatorname{cotang}(u\eta+\xi)}{\partial \xi^{g-1}}$ sind, als Func-„tionen von ξ betrachtet, doppelt periodisch, wenn $g > 1$ ist, und haben die „beiden Moduln der Periodicität π und η; d. h. sie bleiben ungeändert, wenn „ξ um $\lambda\pi+\nu\eta$ wächst; für $g=1$ sind sie noch einfach periodisch in Bezug „auf den Modul π, erhalten aber im Allgemeinen den Zuwachs $2\delta\nu i = \pm 2\nu i$, „wenn ξ um $\lambda\pi+\nu\eta$ wächst."

Diese Eigenschaften liegen ziemlich an der Oberfläche; denn die Periodicität nach π ergiebt sich unmittelbar daraus, dafs jedes Glied der Reihen schon eine periodische Function mit dem Modul π ist, und die Periodicität nach η geht daraus hervor, dafs für $g > 1$ die Reihen von der Anordnung der Glieder unabhängig sind, so dafs man $n \backsim n+1$ setzen kann, wodurch $\xi \backsim \xi+\eta$ wird; wegen des Zuwachses $\pm 2i$ für den Fall $g=1$ verweise ich auf die Bemerkung am Schlusse. Die Eigenschaften, zu welchen ich sogleich übergehen werde, und welche der zweiten der beiden im vorigen Paragraphen angewandten Transformations-Arten der Indices entsprechen, sind verborgener, und wenn man nicht den hier eingeschlagenen Weg verfolgen will, so erfordert ihre Ermittelung sehr tiefliegende Untersuchungen, welche dennoch nicht die wahre Metaphysik derselben einsehen lassen. Man bemerke übrigens die bei dieser Gelegenheit hervortretende zweifache Darstellungs-Art der doppelt periodischen Functionen. Bei der ersten Darstellung, durch die Doppelsummen, werden in einer algebraischen Function, welche nichts von Periodicität besitzt, statt des Variabeln γ alle doppelt unendlich vielen Ausdrücke von der Form $\gamma+m\alpha+n\beta$ gesetzt, und wenn die Doppelreihe, welche alle hieraus hervorgehenden Werthe umfafst, unabhängig von der Anordnung der Glieder convergirt, oder wenigstens ihre Summe nicht ändert, wenn man die beiden Indices um constante ganze Zahlen vermehrt, so geht die Doppelsumme für jede Vermehrung von γ um irgend ein Vielfaches von α und irgend ein Vielfaches von β in sich selbst zurück. Bei der zweiten Darstellung-Art, durch einfache Reihen, ist die erzeugende Function, wie hier die Cotangente, nebst ihrem Differentialquotienten, selbst schon eine einfach periodische Function, und in dieser werden für den Variabeln alle Glieder $\xi+n\eta$ einer einfachen arithmetischen Reihe gesetzt; convergirt die hieraus entspringende Summe unabhängig von der Anordnung der Glieder, oder ändert sie sich wenigstens nicht, wenn alle Glieder um eine Stelle fortrücken, so kommt die zweite Periode dadurch hinein, dafs dem Übergange von $m \backsim m+1$

der von $\xi \sigma \xi + \eta$ entspricht. Zu diesen beiden Darstellungs-Arten der doppelt periodischen Functionen, welche characterisch sind, gesellt sich diejenige ebenfalls characteristische, welche ***Jacobi*** besonders hervorgehoben hat; nämlich durch den Quotienten zweier Functionen, welche zugleich einen eigentlichen und einen uneigentlichen Modul der Periodicität haben: Zähler und Nenner sind Reihen, deren allgemeines Glied einfach periodisch ist und bei welchen, wenn man das Argument um einen zweiten Variabeln ändert, ein und derselbe Factor im Zähler und Nenner heraustritt, welcher sich dann durch die Division forthebt. Durch dieses Fortheben des im Zähler und Nenner gleichzeitig heraustretenden Factors kommt die zweite Periode hinein, während die erste Periode schon durch die Periodicität der allgemeinen Glieder der Reihen im Zähler und Nenner bedingt ist. Es scheint schwer zu entscheiden, welcher der erwähnten drei Darstellungs-Arten der doppelten Periodicität der Vorzug zu geben sei; sie nehmen jede ein eigenthümliches Interesse für sich in Anspruch; jedenfalls scheint der ersten, durch die Doppelsummen, wegen ihres *symmetrischen Verhaltens in Bezug auf die beiden Perioden,* welches man bei den andern beiden vermifst, eine besondere Wichtigkeit zuzuschreiben.

Bei der zweiten Transformations-Art der Indices $m \sigma \lambda m + \mu n$, $n \sigma \nu m + \varrho n$ wird $\alpha \sigma \lambda\alpha + \nu\beta = \alpha'$, $\beta \sigma \mu\alpha + \varrho\beta = \beta'$; γ bleibt unverändert: hieraus folgt $\omega \sigma \frac{\mu\alpha + \varrho\beta}{\lambda\alpha + \nu\beta} = \frac{\mu + \varrho\omega}{\lambda + \nu\omega} = \omega'$ und $\xi \sigma \frac{\pi\gamma}{\lambda\alpha + \nu\beta} = \frac{\xi}{\lambda + \nu\omega} = \xi'$; man erhält daher aus (IV.)

$$\frac{1}{\alpha'^g} \Sigma \frac{\partial^{g-1} \operatorname{cotang}(n\pi\omega' + \xi')}{\partial \xi'^{g-1}} = \frac{1}{\alpha^g} \Sigma \frac{\partial^{g-1} \operatorname{cotang}(n\pi\omega + \xi)}{\partial \xi^{g-1}} + \frac{(-1)^{g-1} 1.2 \ldots . g-1}{\pi^g} \cdot \nabla,$$

wo $\nabla = -\delta \frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}\gamma$, wenn $g = 1$, $\nabla = \delta \frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}$, wenn $g = 2$, und $\nabla = 0$, wenn $g > 2$ ist. Schreibt man demnach

$$\Sigma \frac{\partial^{g-1} \operatorname{cotang}(n\pi\omega' + \xi')}{\partial \xi'^{g-1}} = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^g \Sigma \frac{\partial^{g-1} \operatorname{cotang}(n\pi\omega + \xi)}{\partial \xi^{g-1}} + \Delta,$$

so wird

$$\Delta = -\delta \frac{2\nu\gamma i}{\alpha} = \frac{-\delta}{\pi} 2\nu\xi i, \text{ wenn } g = 1,$$

$$\Delta = \frac{-\delta}{\pi} \cdot \frac{2\nu\alpha' i}{\alpha} = \frac{-2\delta\nu i}{\pi} (\lambda + \nu\omega), \text{ wenn } g = 2,$$

und $\Delta = 0$, wenn $g > 2$. Setzt man noch $\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^g = (\lambda + \nu\omega)^g$ in die Formel, so kommen nirgends mehr α, β, γ vor, sondern nur noch ω und ξ, und man hat folgendes Theorem:

B. „Die in der Form $\Sigma\frac{\partial^{g-1}\operatorname{cotang}(n\pi\omega+\xi)}{\partial\xi^{g-1}}$ enthaltenen Reihen, in „welchen ω einen beliebigen, nicht reellen, ξ einen ganz beliebigen complexen „Werth hat, ändern sich nicht wesentlich, wenn man irgend vier ganze, der Bedin- „gung $\lambda\varrho-\mu\nu=\pm1$ genügende ganze Zahlen $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ wählt und $\omega'=\frac{\mu+\varrho\omega}{\lambda+\nu\omega}$ „an die Stelle von ω und gleichzeitig $\xi'=\frac{\xi}{\lambda+\nu\omega}$ an die Stelle von ξ setzt: „sie erlangen dadurch nur den Factor $(\lambda+\nu\omega)^g$ und den Zuwachs Δ, welcher „letztere $=\frac{-2\delta\nu i}{\pi}\xi$, $=\frac{-2\delta\nu i}{\pi}(\lambda+\nu\omega)$, oder $=0$ ist, je nachdem $g=1$, „$g=2$ oder $g>2$ ist, während $-\delta$ das Vorzeichen des Coëfficienten von „i in ω bedeutet."

Um zu der Ausführung der Multiplication nach m in den unendlichen Doppelproducten überzugehen, setze man in (I.) γ ꝺ $\beta n+\gamma$. Fügt man zu den bei den Summen eingeführten Bezeichnungen

$$\eta=\frac{\pi\beta}{\alpha}=\pi\omega \quad \text{und} \quad \xi=\frac{\pi\gamma}{\alpha} \quad \text{noch} \quad y=\frac{\pi x}{\alpha} \quad \text{hinzu,}$$

so kommt

$$\prod_{m=-\infty}^{m=\infty}\left\{1-\frac{x}{\alpha m+\beta n+\gamma}\right\}=\frac{\sin(n\eta+\xi-\gamma)}{\sin(n\eta+\xi)}=\frac{e^{(n\eta+\xi-y)i}-e^{-(n\eta+\xi-y)i}}{e^{(n\eta+\xi)i}-e^{-(n\eta+\xi)i}},$$

folglich

$$\prod_{n=-\infty}^{n=\infty}\prod_{m=-\infty}^{m=\infty}\left\{1-\frac{x}{\alpha m+\beta n+\gamma}\right\}=\prod_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{\sin(n\eta+\xi-\gamma)}{\sin(n\eta+\xi)}$$

$$=\prod_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{e^{(n\eta+\xi-y)i}-e^{-(n\eta+\xi-y)i}}{e^{(n\eta+\xi)i}-e^{-(n\eta+\xi)i}}.$$

Setzt man $e^{\eta i}=p$, $e^{\xi i}=\zeta$, $e^{yi}=z$, so wird das allgemeine Glied des einfachen Products nach n:

$$\frac{p^n\zeta z^{-1}-p^{-n}\zeta^{-1}z}{p^n\zeta-p^{-n}\zeta^{-1}},$$

welchem man entweder die Form $z^{-1}\frac{1-p^{-2n}\zeta^{-2}z^2}{1-p^{-2n}\zeta^{-2}}$, oder die Form

$$z\cdot\frac{1-p^{2n}\zeta^2z^{-2}}{1-p^{2n}\zeta^2}$$

geben mufs, je nachdem der analytische Modul von p gröfser oder kleiner als Eins ist. $M(p)=M(e^{\eta i})$ kann nie gleich Eins sein, weil η imaginär, also der reelle Theil von ηi von Null verschieden ist; übrigens ist $M(p)>1$ oder $M(p)<1$, je nachdem der reelle Theil von ηi positiv oder negativ.

also je nachdem der Coëfficient von i in ω negativ oder positiv, und je nachdem $\delta = +1$ oder $\delta = -1$ ist; es ist daher $M(p)^{-\delta}$ stets < 1, und setzt man $p^{-\delta} = e^{-\delta\eta i} = q = e^{-\delta\frac{\pi\beta i}{\omega}}$, was mit der von *Jacobi* eingeführten Bezeichnung übereinstimmt, so ist $M(q)$ stets < 1, und man kann das allgemeine Glied in den beiden Formen

$$z^{\mp\delta}\frac{1-q^{\pm 2n}\zeta^{\mp 2\delta}z^{\pm 2\delta}}{1-q^{\pm 2n}\zeta^{\mp 2\delta}}$$

schreiben, wo entweder alle oberen oder alle unteren Zeichen zugleich gelten; man nimmt die oberen oder die unteren Zeichen, je nachdem der Index n positiv oder negativ ist. Thut man Dies und nimmt dann jedesmal zwei Factoren zusammen, deren Indices entgegengesetzte Werthe haben, so erhält man

$$\frac{(1-q^{2n}\zeta^{-2\delta}z^{2\delta})(1-q^{2n}\zeta^{2\delta}z^{-2\delta})}{(1-q^{2n}\zeta^{-2\delta})(1-q^{2n}\zeta^{2\delta})}$$
$$= (1-q^{2n}\zeta^{2}z^{-2})(1-q^{2n}\zeta^{-2}z^{2}) : (1-q^{2n}\zeta^{2})(1-q^{2n}\zeta^{-2}),$$

wo n nur positive Werthe erhält; für $n = 0$ kommt

$$\frac{\zeta z^{-1}-\zeta^{-1}z}{\zeta-\zeta^{-1}}.$$

Man sieht daher, dafs das Resultat der Multiplication nach m der Quotient zweier einfachen Producte wird, deren jedes die Form

$$(\zeta-\zeta^{-1})\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n}\zeta^{2})\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n}\zeta^{-2})$$
$$= (\zeta-\zeta^{-1})(1-q^{2}\zeta^{2})\left(1-\frac{q^{2}}{\zeta^{2}}\right)(1-q^{4}\zeta^{2})\left(1-\frac{q^{4}}{\zeta^{2}}\right)\ldots = \chi(\zeta)$$

hat, und deren Convergenz für jeden Werth von ζ leicht daraus folgt, dafs $M(q) < 1$ ist. Man erhält nämlich, wenn man die Function $\chi(\zeta)$ einführt:

$$\text{(V.)}\quad \prod_{m,n}\left(1-\frac{x}{\alpha m+\beta n+\gamma}\right) = \frac{\chi\left(\frac{\zeta}{z}\right)}{\chi(\zeta)} = \frac{\chi\left(\frac{z}{\zeta}\right)}{\chi\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = -\frac{\chi\left(\frac{z}{\zeta}\right)}{\chi(\zeta)}$$
$$= \frac{\chi(e^{(\gamma-\xi)i})}{\chi(e^{-\xi i})} = \frac{\chi\left(e^{\frac{x-\gamma}{\alpha}\pi i}\right)}{\chi\left(e^{-\frac{\gamma}{\alpha}\pi i}\right)}.$$

Die Entwicklung der einfachen Producte von der Form $\chi(\zeta)$ in Reihen, welche sowohl nach positiven, als negativen Potenzen von ζ fortschreiten und die von *Jacobi* sogenannten Θ Functionen bilden, findet sich ausführlich in *Jacobi's* „Fundamenta nova etc.", und ich kann mich hier wegen Mangel an

Raum nicht bei derselben aufhalten, und beschränke ich mich auf die Bemerkung, dafs man die im Folgenden für die Functionen $\chi(\zeta)$ abgeleiteten Eigenschaften sogleich auf die Θ Functionen übertragen kann, welche die Entwicklungen jener sind.

Bezeichnet man das unendliche Doppelproduct, als Function von x und γ betrachtet, durch $f(x,\gamma)$, so hat man, da aus $m \sigma m+g$, $n \sigma n+h$, wo g und h irgend zwei ganze Zahlen sind, $\gamma \sigma \gamma+g\alpha+h\beta$ folgt, nach den im vorigen Paragraphen angestellten Untersuchungen die Fundamentalformel

$$\text{(VI.)} \qquad f(x,\gamma+'g\alpha+h\beta) = e^{-\delta\frac{2h\pi i}{\alpha}x} f(x,\gamma).$$

Bei der betreffenden Substitution bleiben $\eta=\frac{\pi\beta}{\alpha}$ und $y=\frac{\pi x}{\alpha}$, also auch q und z unverändert, während

$$\xi=\frac{\pi\gamma}{\alpha} \sigma \frac{\pi\gamma}{\alpha}+g\pi+h\frac{\beta\pi}{\alpha}, \qquad \zeta \sigma (-1)^g e^{h\eta i}\zeta = (-1)^g q^{-\delta h}\zeta,$$

also kommt durch Verbindung von (V.) und (VI.), wenn man noch $h \sigma \delta' h$ setzt:

$$\frac{\chi\left(q^h\cdot\frac{z}{\zeta}\right)}{\chi\left(\frac{q^h}{\zeta}\right)} = z^{-2h}\cdot\frac{\chi\left(\frac{z}{\zeta}\right)}{\chi\left(\frac{1}{\zeta}\right)}.$$

Setzt man demnach $z \sigma \zeta z$ und

$$\chi(q^h z) = C\cdot z^{-2h}\chi(z),$$

so hangt C nicht von z ab und kann aus einem speciellen Werthe von z bestimmt werden. Es sei zunächst $h=1$ und man setze $z=q^{-\frac{1}{2}}$, so erhält man $\chi(q^{\frac{1}{2}}) = Cq\chi(q^{-\frac{1}{2}})$. Nun ist allgemein $\chi(\zeta^{-1}) = -\chi(\zeta)$, weil alle Factoren von $\chi(\zeta)$ bis auf den ersten paarweise aus einander dadurch hervorgehen, dafs man ζ^{-1} statt ζ schreibt, und nur der erste $\zeta-\zeta^{-1}$ durch diese Substitution sein Zeichen wechselt; also erhält man $Cq=\chi(q^{\frac{1}{2}}):\chi(q^{-\frac{1}{2}})=-1$, $C=-q^{-1}$, $\chi(qz)=-q^{-1}z^{-2}\chi(z)$. Allgemein kann man, wenn h ungerade ist, C in der Formel $\chi(q^h z)=Cz^{-2h}\chi(z)$ dadurch bestimmen, dafs man $z=q^{-\frac{1}{2}h}$ setzt, wodurch sich $\chi(q^{\frac{1}{2}h})=Cq^{h^2}\chi(q^{-\frac{1}{2}h})$, $C=-q^{-h^2}$ ergiebt. Dies Verfahren führt aber nicht zum Ziele, wenn h gerade ist, weil dann $\chi(q^{-\frac{1}{2}h})=\chi(q^{\frac{1}{2}h})=0$ ist, indem immer $\chi(q^g)=0$, wenn g eine ganze Zahl ist. Für einen ungeraden Werth von h hat man also $\chi(q^h z) = -q^{-h^2}z^{-2h}\chi(z)$, und setzt man hier $z \sigma qz$, so kommt $\chi(q^{h+1}z) = -q^{-h^2}q^{-2h}z^{-2h}\chi(qz) = q^{-h^2-2h-1}z^{-2h-2}\chi(z)$, also allgemein für jeden ganzen Werth von h:

$$\text{(VII.)} \qquad \chi(q^h z) = (-1)^h q^{-h^2}z^{-2h}\chi(z),$$

eine Formel, welche auch, wie schon in „Fundamenta nova etc." geschehen ist, unmittelbar aus der Definition des Products $\chi(z)$ abgeleitet werden kann. Die Constante C kann man auch durch folgende Methode zu bestimmen suchen. Man setze $z \backsim q^{-h}z^{-1}$ und multiplicire die hieraus hervorgehende Formel $\chi(z^{-1}) = Cq^{2h^2}z^{2h}\chi(q^{-h}z^{-1})$ mit der ursprünglichen, so ergiebt sich

$$\chi(q^h z)\chi(z^{-1}) = C^2 q^{2h^2}\chi(z)\chi(q^{-h}z^{-1});$$

und erwägt man, dafs $\chi(z^{-1}) = -\chi(z)$, $\chi(q^{-h}z^{-1}) = -\chi(q^h z)$ ist, so kommt $C^2 q^{2h^2} = 1$, $C = \pm q^{-h^2}$; aber das Vorzeichen $\pm$ bleibt bei dieser Methode unbestimmt und daher ist die erste vorzuziehen.

Für die Substitution $m \backsim \lambda m + \mu n$, $n \backsim \nu m + \varrho n$, war $\alpha \backsim \lambda\alpha + \nu\beta = \alpha'$, $\beta \backsim \mu\alpha + \varrho\beta = \beta'$. Bezeichnet man daher dasjenige unendliche Doppelproduct, welches aus $f(x, \gamma)$ hervorgeht, wenn man $\alpha \backsim \alpha'$, $\beta \backsim \beta'$ setzt, durch $f'(x, \gamma)$, so hat man nach §. 3. die zweite Fundamentalformel

$$\text{(VIII.)} \quad f'(x, \gamma) = e^{\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}(\gamma x - \frac{1}{2}x^2)} f(x, \gamma).$$

Schreibt man den Exponenten der Exponentialfunction unter der Form

$$-\delta\frac{\nu\pi i}{\alpha\alpha'}\{x-\gamma)^2 - \gamma^2\} = -\delta\frac{\nu\alpha i}{\pi\alpha'}\{(y-\xi)^2 - \xi^2\} = -\frac{\delta\nu i}{\lambda\pi+\nu\eta}\{(y-\xi)^2 - \xi^2\}$$

und bemerkt, dafs bei dieser Substitution $\xi \backsim \frac{\pi\gamma}{\alpha'} = \frac{\alpha}{\alpha'}\xi = \frac{\xi}{\lambda+\nu\omega} = \xi'$, $y \backsim \frac{y}{\lambda+\nu\omega} = y'$, $y - \xi \backsim y' - \xi'$, $\omega \backsim \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\mu+\varrho\omega}{\lambda+\nu\omega} = \omega'$, $\delta \backsim \varepsilon\delta = (\lambda\varrho - \mu\nu)\delta = \delta'$ wird, so erhält man für die Function χ aus (VIII.), in Verbindung mit (V.), die Formel

$$\frac{\chi(e^{(y'-\xi')i}, q')}{\chi(e^{-\xi' i}, q')} = \frac{e^{-\frac{\delta\nu i}{\lambda\pi+\nu\eta}(y-\xi)^2}}{e^{-\frac{\delta\nu i}{\lambda\pi+\nu\eta}\xi^2}} \cdot \frac{\chi(e^{(y-\xi)i}, q)}{\chi(e^{-\xi i}, q)};$$

wo $q = e^{-\delta\pi i.\omega}$, $q' = e^{-\varepsilon\delta\pi i\frac{\mu+\varrho\omega}{\lambda+\nu\omega}}$, während $(y'-\xi') = \frac{y-\xi}{\lambda+\nu\omega}$, $\xi' = \frac{\xi}{\lambda+\nu\omega}$.

Setzt man $y - \xi \backsim y$, wodurch $y' - \xi' \backsim y'$, und bedenkt, dafs y und ξ und ebenso y' und ξ' gänzlich von einander unabhängig sind, so kann man der obigen Formel die Form

$$\text{(IX.)} \quad \chi(e^{y'i}, q') = C.e^{-\frac{\delta\nu i}{\lambda\pi+\nu\eta}y^2}\chi(e^{yi}, q)$$

geben, wo die Constante C von y ganz unabhängig ist und also nur von ω abhangt. Dies ist die allgemeine Formel, auf welche ich schon im vorigen Paragraphen hingewiesen habe und aus welcher diejenige, welche der blofsen

Vertauschung der Indices in dem unendlichen Doppelproduct entspricht, als ganz specieller Fall hervorgeht, wenn man $\lambda = \varrho = 0$, $\mu = \nu = 1$, $\varepsilon = -1$, also $q' = e^{\frac{\delta\pi i}{\omega}}$, $\gamma' = \frac{\gamma}{\omega}$ setzt. Die Constante C kann aus einem speciellen Werthe von γ bestimmt werden; aber um die einfachste Darstellung ihres Werthes zu haben, mufs man sich anderer Methoden bedienen, bei denen ich mich hier nicht aufhalten kann, da ich durch den grofsen Umfang, welchen diese Abhandlung schon erreicht hat, sehr zur Kürze gezwungen werde.

Die Function $f(x, \gamma)$, welche von zwei oder, wenn man α und β dazu rechnet, von vier Elementen abhangt, kann sogleich auf eine solche zurückgeführt werden, welche ein Element weniger enthält. Man hat

$$1 - \frac{x}{\alpha m + \beta n + \gamma} = \frac{\alpha m + \beta n + \gamma - x}{\alpha m + \beta n + \gamma} = \frac{1 - \frac{x-\gamma}{\alpha m + \beta n}}{1 - \frac{-\gamma}{\alpha m + \beta n}},$$

wenn nicht gleichzeitig $m = 0$, $n = 0$; und für $m = n = 0$ wird das allgemeine Glied $1 - \frac{x}{\gamma} = \frac{x-\gamma}{-\gamma}$. Setzt man daher allgemein

$$x \Pi\left(1 - \frac{x}{\alpha m + \beta n}\right) = \varphi(x),$$

wo in dem Producte die Combination $m = n = 0$ auszuschliefsen ist, so erhält man

$$\text{(X.)} \quad f(x, \gamma) = \frac{\varphi(x-\gamma)}{\varphi(-\gamma)} = \frac{\varphi(\gamma - x)}{\varphi(\gamma)}.$$

Die Function $\varphi(x)$ ist der Werth von $\frac{x}{1 - \frac{x}{\gamma}} f(x, \gamma)$ oder von $-\gamma f(x, \gamma)$ für $\gamma = 0$, und man kann geradezu $\varphi(x) = f(x, 0)$ setzen, wenn man sich vornimmt x statt des in $f(x, 0)$ vorkommenden sinnlosen Factors $1 - \frac{x}{0}$ zu setzen. Aus den Fundamental-Eigenschaften der Function $\varphi(x)$, welche jetzt entwickelt werden sollen, gehen zugleich die Modificationen hervor, welche $f(x, \gamma)$ erleidet, wenn x sich ändert, während durch die Formel (VI.) die Modificationen von $f(x, \gamma)$ bei einer Änderung von γ gegeben sind. Setzt man in (VI.) den Werth von $f(x, \gamma)$ aus (X.) und schreibt zugleich $\gamma - x \backsim x$, also $x \backsim \gamma - x$, so erhält man

$$\frac{\varphi(x + g\alpha + h\beta)}{\varphi(\gamma + g\alpha + h\beta)} = e^{\delta \frac{2h\pi i}{\alpha}(x-\gamma)} \frac{\varphi(x)}{\varphi(\gamma)},$$

und folglich, da x und γ ganz von einander unabhängig sind,

$$\varphi(x+g\alpha+h\beta) = C.e^{\delta\frac{2h\pi i}{\alpha}x}\varphi(x);$$

wo C nicht von x, sondern nur von α und β abhangt. Um C zu bestimmen, kann man, wenn g und h nicht gleichzeitig beide gerade sind, $x = -\frac{g\alpha+h\beta}{2}$ setzen, wodurch $x+g\alpha+h\beta = -x$. Berücksichtigt man hierbei, dafs allgemein $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ ist *), so erhält man

$$C = -e^{\frac{\delta h\pi i}{\alpha}(g\alpha+h\beta)} = -e^{\delta gh\pi i}.e^{\delta h^2\frac{\beta\pi i}{\alpha}} = (-1)^{gh+1}e^{\delta h^2\frac{\beta\pi i}{\alpha}}.$$

Z. B. für $g=1$, $h=0$ ist $\varphi(x+\alpha) = -\varphi(x)$, und hiernach, wenn g ungerade ist,

$$\varphi(x+(g+1)\alpha+h\beta) = (-1)^{gh+1}e^{\delta h^2\frac{\beta\pi i}{\alpha}}e^{\delta\frac{2h\pi i}{\alpha}(x+\alpha)}\varphi(x+\alpha)$$
$$= (-1)^{h+g+1}e^{\delta h^2\frac{\beta\pi i}{\alpha}}e^{\delta\frac{2h\pi i}{\alpha}x}\varphi(x),$$

weil $g\equiv 1$, $gh\equiv h \pmod 2$; also hat man in allen Fällen

$$\text{(XI.)}\qquad \varphi(x+g\alpha+h\beta) = (-1)^{h+g}e^{\delta\frac{h^2\beta+2hx}{\alpha}\pi i}\varphi(x),$$

indem $(-1)^{gh+1} = (-1)^{h+g}$, wenn g ungerade ist.

Es sei $\varphi(x) \sim \varphi'(x)$, wenn $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$; da nun

$$\varphi(x) = \{-\gamma f(x,\gamma)\}_{\gamma=0} \quad\text{und}\quad \varphi'(x) = \{-\gamma f'(x,\gamma)\}_{\gamma=0},$$

so erhält man unmittelbar aus (VIII.), wenn man $\gamma = 0$ setzt, nachdem man beide Seiten der Formel mit $-\gamma$ multiplicirt hat,

$$\text{(XII.)}\qquad \varphi'(x) = e^{-\delta\frac{\nu\pi i}{\alpha\alpha'}x^2}\varphi(x).$$

Betrachtet man den Quotienten $\frac{\varphi(\gamma-x)}{\varphi(\gamma)} = f(x,\gamma)$ als Function von γ, so kann man nach denjenigen speciellen Werthen von x fragen, für welche jener Quotient eine doppelt periodische Function wird. Es genügt zu dem Ende, x so zu bestimmen, dafs der Exponentialfactor auf der rechten Seite von (VI.) $= +1$ wird; setzt man z. B. $x = \frac{1}{2}\alpha$, so ist $\frac{\varphi(\gamma-\frac{1}{2}\alpha)}{\varphi(\gamma)}$ eine doppelt periodische Function von γ mit den beiden Moduln α und 2β, und allgemein ist

*) Dies zeigt sich sogleich, wenn man in dem unendlichen Doppelproduct $m \sim -m$, $n \sim -n$ setzt, und bedenkt, dafs für diese Transformation der Indices $\nu = 0$ ist, also in der Formel (VIII.) der hinzutretende Exponentialfactor sich auf die Einheit reducirt.

$\frac{\varphi\left(\gamma-\frac{\alpha}{h}\right)}{\varphi(\gamma)}$ eine doppelt periodische Function von γ mit den beiden Moduln α und $h\beta$; nur darf man nicht $h=1$ annehmen, weil die Function sich dann auf eine Constante reducirt. Durch Transformation von α, β in α' resp. β' und Anwendung der Formel (XII.) kann man eine Reihe von unendlich vielen doppelt periodischen Quotienten finden; doch ist die Ausführung dieses Gegenstandes nach den hier angewandten Principien zu leicht, als dafs es nöthig wäre, mich länger bei demselben aufzuhalten.

5.

Die Kreisfunctionen entstehen aus Functionen von der Form $\frac{1}{x^g}$ als erzeugenden Functionen, indem man statt x alle Werthe von der Form $x+m$ setzt, in welchen m alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis ∞ durchläuft, und alle daraus hervorgehenden Werthe der erzeugenden Function addirt. Allgemeiner entstehen die Kreisfunctionen durch einfache Summation, wenn man in der erzeugenden Function $\frac{1}{x^g}$, x für $x+\alpha m$ setzt; was ich die Entstehung durch *einfache Erzeugung* nach dem Modul α nennen will. Aus denselben erzeugenden Functionen $\frac{1}{x^g}$ entstehen die elliptischen Functionen durch *doppelte Erzeugung* nach den beiden Moduln α und β, d. h. durch doppelte Summation von $-\infty$ bis ∞ nach den beiden Indices m und n, wenn man x für $x+\alpha m+\beta n$ setzt. Aus jeder rationalen Function von x, in welcher der Grad des Zählers kleiner ist als der des Nenners, entstehen im Allgemeinen durch einfache Erzeugung Kreisfunctionen, durch doppelte Erzeugung elliptische Functionen; denn jede solche rationale Function läfst sich in Partialbrüche von der Form $\frac{C}{(x-c)^g}$ zerlegen, wo C und c von x unabhängig sind und g positive ganze Werthe hat, und die erzeugte Function zerfällt dadurch in ein Aggregat von Functionen, welche erzeugende Functionen von der einfachen Form $\frac{1}{(x-\alpha)^g}$ haben. Bei der einfachen Erzeugung sind die Functionen stets einfach periodisch, und die Summen sind unabhängig von der Anordnung der Glieder, wenn alle Werthe von g, welche in den Partialbrüchen erscheinen, >1 sind; letzteres geschieht, wenn die erzeugende rationale Function der vollständige Differentialquotient einer andern rationalen Function ist; in jedem anderen Falle können jedoch, bei

jeder Änderung des Arrangements der Glieder in den einfachen Summen, die Functionen, welche durch diese Summen repräsentirt werden, nur einen constanten von x unabhängigen Zuwachs erhalten, und dieser Zuwachs rührt einzig und allein von denjenigen Termen der erzeugenden rationalen Function her, in welchen $g = 1$ ist. Die durch doppelte Erzeugung entstehenden Functionen sind doppelt periodisch nach den beiden Moduln α und β, wenn alle $g > 1$, unabhängig von der Anordnung der Glieder in den Doppelsummen, wenn alle $g > 2$ sind, in welchem Falle die erzeugende Function der zweite Differentialquotient einer rationalen Function ist, und im Allgemeinen kann der Zuwachs, welcher bei verändertem Arrangement aus den $g = 1$ und $g = 2$ entsprechenden Gliedern entspringt, nur eine ganze Function ersten Grades von x sein, welche sich auf eine Constante reducirt, wenn alle $g > 1$ sind. Die Richtigkeit dieser letztern Behauptungen ergiebt sich unmittelbar aus den im Vorhergehenden auseinandergesetzten Principien.

Der Hauptgegenstand dieses Paragraphen besteht darin, nachzuweisen, dafs die durch doppelte Erzeugung aus den rationalen Functionen entstehenden Functionen, welche gleichzeitig auch aus den Kreisfunctionen durch einfache Erzeugung entstehen, wirklich elliptische Functionen sind, d. h. den Differentialgleichungen genügen, durch welche die elliptischen Functionen definirt werden; und ferner zu zeigen, wie aus denselben Betrachtungen, welche zu diesem Resultate führen, zugleich die Fundamental-Eigenschaften der elliptischen Functionen hervorgehen. Der Weg ist ganz derselbe, wie derjenige, welchen ich im vorigen Paragraphen für die Kreisfunctionen, als der durch einfache Erzeugung aus den rationalen entstehenden Functionen eingeschlagen habe; von den Eigenschaften der erzeugenden Functionen ausgehend, gelangt man zu denjenigen der erzeugten Functionen. Es lag ursprünglich in dem Plane dieser Arbeit, den betreffenden Gegenstand mit aller Ausführlichkeit zu behandeln, indessen werde ich durch Mangel an Raum gezwungen, mich auf die Hauptpuncte und die allgemeinsten Principien zu beschränken. Übrigens glaube ich, dafs es nicht leicht einen andern Gang in dieser Theorie geben möchte, bei welchem mit derselben Klarheit und Anschaulichkeit die Analogie der rationalen, Kreis- und elliptischen Functionen in die Augen fällt, und bei welchem die Eigenschaften dieser drei Arten von Functionen gewissermafsen aus derselben Quelle fliefsen und auf demselben Wege angetroffen werden.

Man setze der Kürze wegen $\alpha m + \beta n = w$, in welchem Ausdrucke m und n unabhängig von einander alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞ durch-

laufen; kommen mehrere Ausdrücke von dieser Form vor, so werden sie durch w_1, w_2, u. s. w. bezeichnet. Die Haupt-Eigenschaft dieser Ausdrücke, welche sie mit den ganzen Zahlen theilen, und auf welcher alles Folgende wesentlich beruht, besteht darin, dafs die Summe irgend zweier wieder einen Ausdruck von derselben Form hervorbringt, und dafs, wenn w_1 alle seine Werthe, w_2 dagegen einen stehenden Werth erhält, die Summe w_1+w_2 wieder genau dieselben Werthe wie w_1 durchläuft; diejenige Eigenschaft der ganzen Zahlen aber, vermöge welcher sie sich durch Multiplication reproduciren, besitzen die Ausdrücke w nur für specielle Werthe von α und β, z. B., wenn $\alpha = 1$, $\beta = i$ ist, oder wenn $\alpha = 1$, und β einer dritten Wurzel der Einheit gleich ist.

Um die Analogie mit den Kreisfunctionen auch durch die Bezeichnung hervortreten zu lassen, setze man die Doppelsumme

$$\Sigma \frac{1}{(x+w)^g} = (g, x).$$

Zunächst können die Functionen $(1, x)$, $(2, x)$, $(3, x)$, etc. aus einander durch Differentiation nach x abgeleitet werden, und zwar nach den Formeln

$$\partial(1, x) = -(2, x), \quad \partial(2, x) = -2(3, x), \quad \ldots \quad \partial(g, x) = -g(g+1, x).$$

in welchen zur Erleichterung des Druckes die Nenner ∂x weggelassen sind. — Setzt man in der Formel

$$\frac{1}{p^3}\cdot\frac{1}{q^3} = \frac{1}{(p+q)^3}\left\{\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}\right\} + \frac{3}{(p+q)^4}\left\{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right\} + \frac{6}{(p+q)^5}\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right\},$$

$p = x + w_1$, $q = -x - w_2$, $p + q = w_1 - w_2$, und summirt über alle Werthe von w_1 und w_2, mit Ausnahme der Combinationen $w_1 = w_2$, so erhält man links eine von der Anordnung der Glieder unabhängige vierfache Summe, welche

$$= -\{(3, x)^2 - (6, x)\} \text{ ist;}$$

rechts betrachte man $w_1 - w_2$ als einen Ausdruck, welcher für jeden stehenden Werth von w_2 wiederum alle Werthe von w, mit Ausschlufs von $w = 0$, d. h. mit Ausschlufs der Combination $m = 0$, $n = 0$ durchläuft. Setzt man $w_1 - w_2 = w$, $w_1 = w_2 + w$ und summirt zuerst über alle Werthe von w_2, so ergiebt sich

$$-\frac{1}{w^3}\{(3, x+w) - (3, x)\} + \frac{3}{w^4}\{(2, x+w) + (2, x)\} - \frac{6}{w^5}\{(1, x+w) - (1, x)\}.$$

Wegen der eigentlichen Periodicität von $(3, x)$ und $(2, x)$ ist nun $(3, x+w) = (3, x)$, $(2, x+w) = (2, x)$ und wegen der uneigentlichen Periodicität von $(1, x)$ ist $(1, x+w) = (1, x) + \delta\frac{2n\pi i}{\alpha}$, wenn $w = \alpha m + \beta n$ gesetzt wird.

Hierdurch reducirt sich das so eben gefundene Resultat auf

$$\frac{6(2,x)}{w^4} - \frac{12\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{n}{w^5}.$$

Die Summation über die Werthe von w, welche noch auszuführen ist, bezieht sich nur auf die allgemeinen Glieder $\frac{1}{w^4}$ und $\frac{n}{w^5}$. Setzt man $\overset{*}{\Sigma}\frac{1}{(\alpha m+\beta n)^4} = (4^*, 0)$ und $\delta\frac{2\pi i}{\alpha}\overset{*}{\Sigma}\frac{n}{(\alpha m+\beta n)^5} = c$, wo der Stern über dem Summenzeichen die Ausschliefsung der Combination $m = 0$, $n = 0$ andeutet, so erhält man schliefslich rechts

$$6(4^*, 0)(2, x) - 6c;$$

also hat man die Gleichung

$$(1.) \qquad (6, x) = (3, x)^2 + 6(4^*, 0)(2, x) - 6c$$

gefunden. Das Erscheinen der eigenthümlichen Constante c weiset auf diejenigen Functionen hin, welche die Differentialquotienten von (g, x) nach β sind. Setzt man $p = w_1$, $q = x + w_2$, $p + q = x + w_1 + w_2$ und summirt über w_1 und w_2, indem man $w_1 = 0$ ausschliefst, so kommt links $(3^*, 0)(3, x)$; rechts setzt man $w_1 + w_2 = w$, $w_1 = w - w_2$ und erhält durch Summation über w_2, wobei $w_2 = w$ auszuschliefsen:

$$\frac{1}{(x+w)^3}\left\{-(3^*, -w) + (3, x) - \frac{1}{(x+w)^3}\right\} + \frac{3}{(x+w)^4}\left\{(2^*, -w) + (2, x) - \frac{1}{(x+w)^2}\right\}$$
$$+ \frac{6}{(x+w)^5}\left\{-(1^*, -w) + (1, x) - \frac{1}{x+w}\right\}.$$

Berücksichtigt man hierbei die Periodicität der Functionen, und dafs $(3^*, 0) = 0$, $(1^*, 0) = 0$ ist, so kommt

$$\frac{(3,x)}{(x+w)^3} + \frac{3(2^*,0)+3(2,x)}{(x+w)^4} + \frac{12\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{n}{(x+w)^5} + \frac{6(1,x)}{(x+w)^5} - \frac{10}{(x+w)^6};$$

summirt man nun nach w, bedenkt, dafs

$$\frac{\partial(4,x)}{\partial\beta} = -4\Sigma\frac{\partial w}{\partial\beta}\cdot\frac{1}{(x+w)^5} = -4\Sigma\frac{n}{(x+w)^5},$$

und vergleicht mit dem Resultate auf der linken Seite $(3^*, 0)(3, x)$, welches sich auf 0 reducirt, so erhält man die zweite Gleichung

$$(2.) \qquad 10(6, x) + \frac{3\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(4,x)}{\partial\beta}$$
$$= (3, x)^2 + 3(2^*, 0)(4, x) + 3(2, x)(4, x) + 6(1, x)(5, x).$$

Eine ähnliche Behandlung der Formel

$$\frac{1}{p^4q^3} - \frac{1}{p^3q^4} = \frac{1}{r^3}\left(\frac{1}{p^4} - \frac{1}{q^4}\right) + \frac{2}{r^4}\left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{q^3}\right) + \frac{2}{r^5}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}\right),$$

in welcher $r = p + q$ ist, liefert die beiden Gleichungen:

$$(3.) \quad (7, x) = (3, x)\{(4, x) + 2(4^*, 0)\},$$

$$(4.) \quad 5(7, x) = 2(5, x)\{(2, x) - (2^*, 0)\} + 3(3, x)(4, x);$$

auch geht (3.) aus (1.) durch Differentiation nach x hervor. Die Gleichungen (1., 3. und 4.) kann man als totale Differentialgleichungen zur Bestimmung von $(2, x)$ betrachten; (2.) dagegen ist eine partielle Differentialgleichung. Im Allgemeinen führen die identischen Gleichungen von der Form der beiden hier benutzten stets zu totalen Differentialgleichungen, wenn in ihnen die Terme $\frac{1}{p}$ und $\frac{1}{q}$ fehlen; kommen aber diese Terme vor, so können die identischen Formeln zum Theil auf partielle Differenzialgleichungen führen. Man kann sich auf diese Weise bald so viele oder mehr Gleichungen verschaffen, als unbekannte Functionen vorhanden sind; einige der Gleichungen gehen aus andern durch Differentiiren hervor. Übrigens gelten hier genau dieselben Bemerkungen, welche über den analogen Gegenstand im vorigen Paragraphen gemacht worden sind.

Differentiirt man jede der beiden Gleichungen (3. und 4.) noch zweimal nach x, so hat man, (1.) mitgerechnet, 7 Gleichungen, aus welchen man die 6 Functionen $(4, x)$ bis $(9, x)$ eliminiren kann. Diese Elimination ist gar nicht mühsam, wenn man sie geschickt anstellt. Man verschafft sich zunächst aus (3.) und (4.) die Gleichung

$$\{(2, x) - (2^*, 0)\}^2 = (4, x) + 5(4^*, 0) \text{ *)},$$

und verbindet dann dieselbe mit (1.). Das Resultat der Elimination ist

$$(5.) \quad (3, x)^2 = \{(2, x) - (2^*, 0)\}^3 - 15(4^*, 0)\{(2, x) - (2^*, 0)\} + 10\{c - (2^*, 0)(4^*, 0)\}.$$

Man sieht also, dafs das Quadrat von $(3, x)$ einer ganzen Function von $(2, x)$ dritten Grades gleich ist, deren höchster Term den Coëfficienten 1 hat. Um dieser Function dritten Grades eine elegantere Form zu geben, suche man ihre Wurzelwerthe auf; zu dem Ende darf man nur drei von einander unabhängige Werthe von x aufsuchen, welche $(3, x) = 0$ machen; solche sind $x = \frac{\alpha}{2}$, $x = \frac{\beta}{2}$ und $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, wie man sogleich sieht, wenn man die Eigenschaft der Periodicität mit der Relation $(3, -x) = -(3, x)$ verbindet. Diese Werthe von x in $(2, x)$ gesetzt, geben die Wurzelwerthe der Function dritten Grades von $(2, x)$ und man erhält folglich

$$(6.) \quad (3, x)^2 = \left\{(2, x) - \left(2, \frac{\alpha}{2}\right)\right\}\left\{(2, x) - \left(2, \frac{\beta}{2}\right)\right\}\left\{(2, x) - \left(2, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right\}.$$

*) S. a. Schlufs.

Setzt man daher $(2, x) = y$, $\left(2, \frac{\alpha}{2}\right) = a$, $\left(2, \frac{\beta}{2}\right) = a'$, $\left(2, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = a''$, so wird $(3, x)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ und

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2\sqrt{((y-a)(y-a')(y-a''))},$$

$$2x = \int \frac{\partial y}{\sqrt{((y-a)(y-a')(y-a''))}} + \text{Const.}$$

Die Function $(2, x)$ ist demnach in der That eine ***elliptische Function erster Gattung*** von x, und da

$$(1, x) = -\int (2, x)\partial x = -\int y\,\partial x = -\int \frac{y\,\partial y}{2\sqrt{((y-a)(y-a')(y-a''))}},$$

so ist $(1, x)$ eine ***elliptische Function zweiter Gattung.*** Durch nochmalige Integration und den Übergang von den Logarithmen zu den Zahlen, was man die exponentielle Integration nennen kann, gelangt man einerseits zu den unendlichen Doppelproducten, andrerseits zu den von ***Jacobi*** statt der dritten Gattung eingeführten und von ihm durch Ω bezeichneten Funtionen. Der Zusammenhang zwischen den doppelt periodischen Quotienten aus unendlichen Doppelproducten und den hier betrachteten Doppelsummen ergiebt sich durch Zerfällung jener Quotienten in Partialbrüche.

Man kann zu der Fundamentalgleichung (5.), welche den Zusammenhang unserer Doppelsummen mit den elliptischen Functionen nachweiset, auf kürzerem Wege gelangen, wenn man mit der ***Elimination*** die ***Integration*** der Differentialgleichungen verbindet; aber da die Bestimmung der willkürlichen Constanten wegen der Discontinuität der Functionen einige Schwierigkeiten macht, so suche ich, so oft es angeht, jede Integration zu vermeiden.

Die Zusammenstellung von (5.) und (6.) führt zu Relationen zwischen den Constanten, wie z. B.

$$a + a' + a'' = 3(2^*, 0), \text{ u. s. w.;}$$

man kann unendlich viele Relationen zwischen solchen Constanten finden, wenn man sowohl in den bereits entwickelten Gleichungen, als auch in allen andern, welche dieselbe Methode ergiebt, für x specielle Werthe setzt.

Die Gleichung (2.), und eine Reihe anderer von ähnlicher Art, dienen zur Bestimmung der Ableitungen der elliptischen Functionen nach β, und wenn man α mit β vertauscht (§. 3.), auch derer nach α.

Unter der grofsen Masse von Formeln, welche aus algebraischen Relationen durch den Procefs der doppelten Erzeugung für elliptische Functionen

hervorgehen, kann ich hier nur einige von sehr allgemeiner Form herausheben und mufs es einer spätern Gelegenheit überlassen, einige Ordnung in diese Masse zu bringen; denn die Fruchtbarkeit dieses Gegenstandes ist so grofs, dafs die eigentliche Schwierigkeit hier in einer zweckmäfsigen Beschränkung besteht.

Da die aus $\frac{1}{x}$ durch doppelte Erzeugung hervorgehende Doppelreihe bei jeder Veränderung des Arrangements der Glieder nur um eine ganze Function ersten Grades von x wachsen kann, so wird die aus dem Aggregate

$$\frac{a}{x}+\frac{a'}{x'}+\frac{a''}{x''}+\text{etc.}$$

entspringende Doppelreihe*) gänzlich unabhängig von der Anordnung der Glieder sein, wenn man die Constanten und die Variabeln den Bedingungen

$$a+a'+a''+\ldots. = 0 \quad \text{und} \quad ax+a'x'+a''x''+\ldots. = 0$$

unterwirft**). Multiplicirt man daher die beiden Ausdrücke

$$\left\{\frac{a}{x}+\frac{a'}{x'}+\frac{a''}{x''}\ldots.\right\}\left\{\frac{b}{y}+\frac{b'}{y'}+\frac{b''}{y''}+\ldots.\right\}$$

und zerfällt jeden Term des Products nach der Formel

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{x+y}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),$$

so ist es erlaubt, auf die hieraus hervorgehende algebraische Relation das Princip der doppelten Erzeugung anzuwenden, sobald aufser den obigen beiden Bedingungen auch die beiden folgenden analogen

$$b+b'+b''+\ldots. = 0, \quad by+b'y'+b''y''+\ldots. = 0$$

erfüllt sind. Der Algorithmus, zu welchem dieses Princip führt, ist, wie ich glaube, durch das Obige hinlänglich klar geworden, und ich brauche daher wohl nur das Resultat hinzuschreiben; dasselbe ist

$$\{a(1,x)+a'(1,x')+a''(1,x'')+\ldots.\}\{b(1,y)+b'(1,y')+b''(1,y'')+\ldots.\}$$
$$= \mathop{S}_{\mu,\nu}\{a^{(\mu)}b^{(\nu)}(1,x^{(\mu)}+y^{(\nu)})[(1,x^{(\mu)})+(1,y^{(\nu)})]\}$$
$$+\Sigma\mathop{S}_{\mu,\nu}\left\{\frac{2\delta\pi i}{\alpha}a^{(\mu)}b^{(\nu)}.\frac{n}{x^{(\mu)}+y^{(\nu)}+\alpha m+\beta n}\right\},$$

---

*) Wenn man nämlich $x \circ x+w$, $x' \circ x'+w$, $x'' \circ x''+w$, etc. setzt und die doppelte Summation über alle Werthe von w ausführt.

**) Wie auch aus der Form des allgemeinen Gliedes nach den Principien von §. 1. und §. 3. mit Strenge hervorgeht; denn entwickelt man das allgemeine Glied nach fallenden Potenzen von w, so fehlen die Terme $\frac{1}{w}$ und $\frac{1}{w^2}$.

wo das Summenzeichen S sich auf alle Combinationen von μ und ν bezieht. Übrigens läfst sich der zweite Theil rechts, wenn durch φ dieselbe Function wie im vorhergehenden Paragraphen bezeichnet wird, auch wie folgt schreiben:

$$\underset{\mu,\nu}{S}\left\{\frac{2\delta\pi i}{\alpha}a^{(\mu)}b^{(\nu)}.\frac{\partial\log\varphi(x^{(\mu)}+y^{(\nu)})}{\partial\beta}\right\}.$$

Ebenso kann man auch von Aggregaten von der Form

$$\frac{a}{x^2}+\frac{a'}{x'^2}+\frac{a''}{x''^2}+\text{etc.}$$

ausgehen, für welche die einzige Bedingung $a+a'+a''+\ldots=0$ erfüllt sein mufs, damit die aus ihnen entspringenden Doppelsummen von der Anordnung der Glieder unabhängig seien, und man gelangt durch die identische Relation

$$\frac{1}{x^2y^2}=\frac{1}{(x+y)^2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{2}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

und durch den Procefs der doppelten Erzeugung zu der neuen Formel:

$$\begin{aligned}S\{a^{(\mu)}b^{(\nu)}(2,x^{(\mu)})(2,y^{(\nu)})\}=\;&S\{a^{(\mu)}b^{(\nu)}(2,x^{(\mu)}+y^{(\nu)})[(2,x^{(\mu)})+(2,y^{(\nu)})]\}\\&+2S\{a^{(\mu)}b^{(\nu)}(3,x^{(\mu)}+y^{(\nu)})[(1,x^{(\mu)})+(1,y^{(\nu)})]\}\\&-\frac{2\delta\pi i}{\alpha}S\left\{a^{(\mu)}b^{(\nu)}\frac{\partial(2,x^{(\mu)}+y^{(\nu)})}{\partial\beta}\right\}.\end{aligned}$$

Viel allgemeinere transcendente Formeln, und welche die eben abgeleiteten als specielle Fälle umfassen, erhält man, wenn man von irgend einer rationalen Function $F(w)$ von w ausgeht (welche aufser w beliebig viele andere Gröfsen enthalten kann), in der der Grad des Nenners den des Zählers um mindestens 3 Einheiten übertrifft, und welche daher, nach fallenden Potenzen von w entwickelt, erst mit dem Term $\frac{1}{w^3}$ anfängt. Unter der letzteren Voraussetzung wird $\Sigma F(w)$, welches sich über alle Werthe von w erstreckt, von der Anordnung der Glieder unabhängig sein, und diese Summe wird sich, wenn man $F(w)$ in Partialbrüche zerfället, durch lauter Functionen von der Form (g,x) ausdrücken lassen, in denen g sowohl als x verschiedene Werthe erhalten. Sind nun F_1 und F_2 zwei solche rationale Functionen, welche der eben festgestellten Bedingung Genüge leisten, setzt man in der einen $w\,\mathfrak{o}\,w_1$, in der andern $w\,\mathfrak{o}\,w_2$ und bildet das Product $F_1(w_1)F_2(w_2)$, so ist die vierfache Summe $\Sigma F_1(w_1)F_2(w_2)$, welche in das Product der beiden Doppelsummen $\Sigma F_1(w_1)$ und $\Sigma F_2(w_2)$ zerfällt und daher vollständig durch elliptische Functionen ausgedrückt werden kann, unabhängig von der Anordnung der Glieder, und man darf daher in derselben neue Indices statt der ursprünglichen

einführen. Wenn man F_1 und F_2 in Partialbrüche zerfället und die beiden Zerfällungen in einander multiplicirt, so werden alle Terme des Products von der Form

$$\frac{1}{(x_1+w_1)^{g_1}}\cdot\frac{1}{(x_2+w_2)^{g_2}}$$

sein, und dieses letztere Product in Partialbrüche zerfället, liefert wiederum lauter Terme von den Formen

(*a.*) $\dfrac{1}{(y+w_1+w_2)^h}\cdot\dfrac{1}{(z+w_1)^k}$ oder (*b.*) $\dfrac{1}{(y+w_1+w_2)^h}\cdot\dfrac{1}{(z-w_2)^k}$.

Setzt man nun $w_1+w_2=w$, indem man w_2 in der Form $w-w_1$ schreibt, so giebt die Form (*a.*), nach w_1 summirt, unmittelbar $\dfrac{(k,z)}{(y+w)^h}$, und die Form (*b.*) nach w_1 summirt $\dfrac{(k,z-w)}{(y+w)^h}$. Nun ist, wegen der Periodicität $(k,z-w)=(k,z)$, wenn $k>1$, und wenn $k=1$, so tritt das Glied $-\delta\dfrac{2n\pi i}{\alpha}=-\dfrac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial\beta}$ hinzu; die noch auszuführende Summation nach w giebt daher für die Form (*a.*) $(k,z)(h,y)$ und für die Form (*b.*) entweder $(k,z)(h,y)$ oder $(k,z)(h,y)+\dfrac{2\delta\pi i}{(h-1)\alpha}\cdot\dfrac{\partial(h-1,y)}{\partial\beta}$, je nachdem $k>1$ oder $k=1$ ist; wenn aufser $k=1$ auch $h=1$ ist, so erhält man als allgemeines Glied der für die Form (*b.*) zu $(k,z)(h,y)$ noch hinzutretenden Reihe $-\dfrac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\dfrac{\partial\log(y+w)}{\partial\beta}$ und man mufs alle Glieder dieser Form vereinigen, um eine convergente Reihe zu erhalten. Auf diese Weise findet man also für dieselbe vierfache Summe von sehr allgemeiner Form einen doppelten Ausdruck durch elliptische Functionen. Will man übrigens die Differentialquotienten der elliptischen Functionen nach β vermeiden, so mufs man von solchen algebraischen Relationen ausgehen, in welchen alle $k>1$ sind. Noch allgemeinere Formeln erhält man, wenn man mehr als zwei rationale Functionen von der Form F, welche sich der Reihe nach und resp. auf w_1, w_2, w_3, u. s. w. beziehen, mit einander multiplicirt und auf ähnliche Art, wie bei dem Producte zweier verfährt. Es ist nicht schwer, nach Dem was hier und schon im vorigen Paragraphen gesagt wurde, auch solche Formeln aufzustellen, welche ihre Geltung behalten, man mag die darin vorkommenden Functionen elliptische, Kreis- oder algebraische Functionen bedeuten lassen.

Man kann versichern, dafs durch Anwendung der hier auseinandergesetzten Principien und durch rein algebraische Verbindung der Formeln, so wie durch Einsetzung specieller Werthe für die vorkommenden Gröfsen, die

Additionstheoreme der drei Gattungen, so wie eine Menge der wichtigsten Fundamentalgleichungen für elliptische Functionen abgeleitet werden können; aber da ich zu andern Untersuchungen übergehen mufs, so sehe ich mich genöthigt, die Ausführung dieses reichhaltigen Gegenstandes auf eine spätere Gelegenheit zu verschieben. Ich bemerke nur noch, dafs ein wichtiges Hülfsmittel zur Ableitung neuer Formeln aus den schon gefundenen darin besteht, dafs man einen der vorkommenden Variabeln unendlich klein setzt und auf beiden Seiten nach dessen steigenden Potenzen entwickelt, um die Coëfficienten derselben Potenzen einander gleich zu setzen. Auch mache ich noch auf den wichtigen Umstand aufmerksam, dafs die Reihe für $(1, x)$ nur einen constanten Zuwachs erhält und die für $(2, x)$ sich gar nicht ändert, wenn man in $w = \alpha m + \beta n$ blofs die Werthe von m unter einander und blofs die Werthe von n unter einander permutirt, ohne jedoch die Werthe von m mit denen von n irgend wie zu verwechseln; hierdurch wird es möglich, bei den obigen Betrachtungen auch solche rationale Functionen einzuführen, bei welchen der Grad des Nenners den des Zählers nur um 2 Einheiten übertrifft.

6.

Es scheint hier der passende Ort zur Behandlung desjenigen Problems zu sein, welches am Schlusse von §. 3. in Anregung gebracht worden ist. Wenn man auch nicht durch die beiden Formen $\lambda m' + \mu n'$ und $\nu m' + \varrho n'$ alle Combinationen von zwei ganzen Zahlen m, n darstellen kann, sobald die Determinante $\lambda\varrho - \mu\nu = \varepsilon$ von ± 1 verschieden ist, so kann man dies doch durch den Complex von ε ($\pm\varepsilon$ je nachdem ε positiv oder negativ) Systemen von der Form $\lambda m' + \mu n' + \sigma$, $\nu m' + \varrho n' + \tau$ erreichen, welche sich unter einander durch verschiedene Combinationen σ, τ unterscheiden und in deren jedem m' und n' alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞ durchlaufen. Für σ müssen nach und nach alle Glieder eines vollständigen Restensystems mod. ϑ gesetzt werden, wenn ϑ der gröfste positive gemeinschaftliche Theiler der beiden ganzen Coëfficienten λ und μ ist, und für τ alle Glieder eines vollständigen Restensystems mod. $\frac{\pm\varepsilon}{\vartheta} = \vartheta'$, wo ϑ' so wie ϑ positiv ist. In der That stellt $\lambda m' + \mu n'$ alle ganzen Zahlen dar, welche durch ϑ theilbar sind, aber nur diese, und da jede ganze Zahl einem und nur einem Gliede eines vollständigen Restensystems mod. ϑ congruent ist, so wird die Gesammtheit der Ausdrücke $\lambda m' + \mu n' + \sigma$, wenn σ nach und nach alle Glieder eines solchen Re-

stensystems durchläuft, wirklich alle ganzen Zahlen ohne Ausnahme darstellen; auch ist jede nur durch einen dieser ϑ Ausdrücke darstellbar. Es sei m eine ***gegebene*** Zahl und man setze $m = \lambda m' + \mu m' + \sigma$; es sei ferner m'_0 und n'_0 irgend ein System von ganzen Werthen von m' und n', welches dieser Gleichung genügt; dann sind alle derselben genügenden Systeme durch die Formeln

$$m' = m'_0 - k\frac{\mu}{\vartheta}, \qquad n' = n'_0 + k\frac{\lambda}{\vartheta}$$

gegeben, wo k alle ganzen Werthe haben kann. Der ***Ausdruck*** $\nu m' + \varrho n' + \tau$ wird durch Substitution dieser Werthe

$$\nu m'_0 + \varrho n'_0 + k\frac{\lambda\varrho - \mu\nu}{\vartheta} + \tau = \nu m'_0 + \varrho n'_0 + k\vartheta' + \tau,$$

und es ist klar, dafs immer ein und nur ein Werth von τ aus einem vollständigen Restensysteme mod. ϑ' und dann immer ein und nur ein zugehöriger ganzer Werth von k existirt, für welchen dieser Ausdruck irgend einer ganzen Zahl n gleich wird, während m unverändert bleibt. Zugleich sieht man, dafs, um zu jedem m alle ganzen Werthe von n zu erschöpfen, τ wirklich ***alle*** Glieder des vollständigen Restensystems mod. $\vartheta' = \frac{\pm\varepsilon}{\vartheta}$ durchlaufen mufs. Es ist somit bewiesen, dafs die beiden Ausdrücke

$$m = \lambda m' + \mu n' + \sigma \quad \text{und} \quad n = \nu m' + \varrho n' + \tau$$

wirklich alle Combinationen von zwei ganzen Zahlen m, n und jede Combination nur einmal darstellen, wenn man in ihnen σ und τ unabhängig von einander, ersteres ein vollständiges Restensystem mod. ϑ, letzteres ein vollständiges Restensystem mod. ϑ', und m' und n', ebenfalls unabhängig von einander und unabhängig von σ und τ, alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞ durchlaufen läfst; und man kann diese Substitution für m und n als eine Eintheilung aller Combinationen m, n in eine Anzahl $\vartheta\vartheta' = \pm\varepsilon$ Partialgruppen betrachten, welche sich unter einander durch die Werthe von σ und τ unterscheiden, in deren jeder aber σ und τ einen stehenden Werth haben, während m' und n' alle ganzen Werthe durchlaufen.

Führt man wirklich die hiernach satthafte Transformation der Indices

$$m \; \mathfrak{S} \; \lambda m + \mu n + \sigma, \qquad n \; \mathfrak{S} \; \nu m + \varrho n + \tau$$

in die Reihen (g, γ) und in das unendliche Doppelproduct $f(x, \gamma)$ ein, so erhält man

$$\alpha m + \beta n + \gamma \; \mathfrak{S} \; \alpha' m + \beta' n + \gamma', \quad \text{wo}$$
$$\alpha' = \lambda\alpha + \nu\beta, \quad \beta' = \mu\alpha + \varrho\beta \quad \text{und} \quad \gamma' = \gamma + \sigma\alpha + \tau\beta,$$

und wenn man daher jedesmal alle Glieder, für welche σ und τ denselben Werth behalten, zu einer Partialreihe oder einem Partialproducte zusammenfafst, so erhält man nach den Principien in §. 3. die folgenden Transformationsformeln:

$$(A.) \qquad \boldsymbol{S}(g, \gamma+\sigma\alpha+\tau\beta)' = (g,\gamma)+\nabla(g,\gamma),$$

$$(B.) \qquad \boldsymbol{P}f'(x, \gamma+\sigma\alpha+\tau\beta) = e^{-\nabla(1,\gamma)x-\frac{1}{2}\nabla(2,\gamma)x^2} f(x,\gamma),$$

wo die durch lateinische Lettern ausgedrückten Summen- und Productenzeichen $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{P}$ eine endliche Summe, resp. ein endliches Product von ε *) Termen bezeichnen, und sich über alle ε Combinationen σ, τ erstrecken; durch $(g,\gamma)'$ und f' wird ferner angezeigt, was aus (g,γ) resp. f wird, wenn man $\alpha \backsim \alpha'$, $\beta \backsim \beta'$ setzt, und alles Übrige ungeändert läfst. Ich werde sagen, dafs diese Transformationsformeln dem linearen Systeme $\binom{\lambda,\mu}{\nu,\varrho}$ und der Determinante ε zugordnet seien.

Da σ irgend ein beliebiges Restensystem mod. ϑ, und τ irgend ein beliebiges Restensystem mod. ϑ' durchlaufen kann, so will ich, ehe ich zu der Bestimmung von ∇ übergehe, zuvor die Modificationen untersuchen, welche die endliche Summe auf der linken Seite von (*A.*) erleidet, wenn man von einem Restensysteme sowohl mod. ϑ als mod. ϑ' zu andern übergeht. Wenn $g=1$ ist, so erlangt jene Summe durch diesen Übergang einen constanten, von γ unabhängigen Zuwachs und bleibt folglich für gröfsere Werthe von g ungeändert. In der That seien σ_1 und σ_2 die allgemeinen Glieder zweier verschiedenen Restensysteme (mod. ϑ) und τ_1, τ_2 die allgemeinen Glieder zweier verschiedenen Restensysteme (mod. ϑ'); es werden sich demnach die Zahlen σ_1 mit denen σ_2 und die Zahlen τ_1 mit denen τ_2 zu zweien zusammenstellen lassen, deren Differenz durch ϑ resp. ϑ' theilbar ist. Betrachtet man einerseits die Reihe der ε Gröfsen $\sigma_1\alpha+\tau_1\beta$, andrerseits die Reihe der ε Gröfsen $\sigma_2\alpha+\tau_2\beta$, so behaupte ich, dafs jedes Glied in der einen Reihe eines und nur eines in der andern findet, welches sich von ihm um einen Ausdruck von der Form $k\alpha'+l\beta'$ unterscheidet, wo k und l ganze Zahlen sind; denn sobald wirklich

$$(C.) \qquad \sigma_2\alpha+\tau_2\beta-(\sigma_1\alpha+\tau_1\beta) = k\alpha'+l\beta' = (\lambda k+\mu l)\alpha+(\nu k+\varrho l)\beta$$

werden soll, so hat man nur $\sigma_2-\sigma_1=\lambda k+\mu l$, $\tau_2-\tau_1=\nu k+\varrho l$ zu setzen; die Möglichkeit dieser beiden Gleichungen ist schon oben untersucht; es mufs

---

*) Es sei hier ein für allemal bemerkt, dafs, wenn der Kürze wegen eine negative Zahl als Anzahl eingeführt wird, stets ihr absoluter Werth zu verstehen ist.

zunächst $\sigma_2 \equiv \sigma_1 \pmod{\vartheta}$ sein, und unter den unendlich vielen Paaren k, l, welche unter dieser Voraussetzung der ersten Gleichung genügen, findet sich eins, welches auch die zweite erfüllt, wenn man nur $\tau_2 - \tau_1$ durch eine passende Congruenz mod. ϑ' bestimmt. Nach §. 3. ist nun jedesmal, so oft die Gleichung (*c.*) erfüllt ist, auch

$$(d.) \qquad (1, \gamma + \sigma_2\alpha + \tau_2\beta)' - (1, \gamma + \sigma_1\alpha + \tau_1\beta)' = \delta' \frac{2l\pi i}{\alpha'};$$

d. h. diese Differenz wird gefunden, wenn man die Differenz zwischen $\sigma_2\alpha + \tau_2\beta$ und $\sigma_1\alpha + \tau_1\beta$ auf die Form $k\alpha' + l\beta'$ bringt und $\frac{2\delta'\pi i}{\alpha'}$ mit dem Coëfficienten von β' in jener Form multiplicirt. Die Differenz zwischen den beiden Summen

$$(e.) \qquad \boldsymbol{S}(1, \gamma + \sigma_2\alpha + \tau_2\beta)' - \boldsymbol{S}(1, \gamma + \sigma_1\alpha + \tau_1\beta)' = \boldsymbol{D},$$

wird folglich gefunden, wenn man von der Summe aller ε Ausdrücke von der Form $\sigma_2\alpha + \tau_2\beta$ die Summe aller ε Ausdrücke von der Form $\sigma_1\alpha + \tau_1\beta$ abzieht, die Differenz auf die Form $\boldsymbol{K}\alpha' + \boldsymbol{L}\beta'$ bringt, wo $\boldsymbol{K}$ die Summe aller k und $\boldsymbol{L}$ die Summe aller l in (*c.*) ist, und dann $\boldsymbol{D} = \delta' \frac{2\boldsymbol{L}\pi i}{\alpha'}$ setzt. Nun ist $\boldsymbol{S}\{(\sigma_2 - \sigma_1)\alpha + (\tau_2 - \tau_1)\beta\} = \vartheta' \Sigma(\sigma_2 - \sigma_1)\cdot\alpha + \vartheta \Sigma(\tau_2 - \tau_1)\cdot\beta$; denn wenn man in einem Ausdrucke wie $\sigma\alpha + \tau\beta$ jeden Werth von σ mit jedem Werthe von τ combinirt, so erhält man zunächst für jeden stehenden Werth von τ, durch Addition über alle Werthe von σ, deren Anzahl $= \vartheta$ ist, $\Sigma\sigma\cdot\alpha + \vartheta\tau\cdot\beta$ und hieraus, wiederum durch Addition über alle τ, deren Anzahl ϑ' ist, $\vartheta'\Sigma\sigma\cdot\alpha + \vartheta\Sigma\tau\cdot\beta$. Da nun ferner $\varepsilon\alpha = \varrho\alpha' - \nu\beta'$, $\varepsilon\beta = -\mu\alpha' + \lambda\beta'$ ist, und der eben gefundene Ausdruck deshalb und wegen $\vartheta\vartheta' = \pm\varepsilon$ auf die Form

$$\pm\left\{\frac{\Sigma\sigma}{\vartheta}\cdot\varepsilon\alpha + \frac{\Sigma\tau}{\vartheta'}\cdot\varepsilon\beta\right\} = \pm\left\{\left(\varrho\frac{\Sigma\sigma}{\vartheta} - \mu\frac{\Sigma\tau}{\vartheta'}\right)\alpha' + \left(-\nu\frac{\Sigma\sigma}{\vartheta} + \lambda\frac{\Sigma\tau}{\vartheta'}\right)\beta'\right\}$$

gebracht werden kann, so erhält man endlich

$$\boldsymbol{K} = \pm\left(\varrho\frac{\Sigma(\sigma_2 - \sigma_1)}{\vartheta} - \mu\frac{\Sigma(\tau_2 - \tau_1)}{\vartheta'}\right),$$

$$\boldsymbol{L} = \pm\left(-\nu\frac{\Sigma(\sigma_2 - \sigma_1)}{\vartheta} + \lambda\frac{\Sigma(\tau_2 - \tau_1)}{\vartheta'}\right);$$

wo $\pm$ das Vorzeichen von ε ist; und da $\delta' = +\delta$ oder $= -\delta$, je nachdem ε positiv oder negativ ist, so ergiebt sich

$$(f.) \qquad \boldsymbol{D} = \delta\left(-\nu\frac{\Sigma(\sigma_2 - \sigma_1)}{\vartheta} + \lambda\frac{\Sigma(\tau_2 - \tau_1)}{\vartheta'}\right).\frac{2\pi i}{\alpha'}.$$

Hiernach ist die Bestimmung von ∇ in (*A.*) sehr leicht, da man schon weifs, dafs $\nabla(1, \gamma)$ von der linearen Form $a - b\gamma$ ist und dafs dann $\nabla(2, \gamma) = b$

und alle folgenden $\nabla(3,\gamma)$ u. s. w. $=0$ sind. Setzt man in (*A.*) $g=1$ und überall $\gamma \infty \gamma+\alpha'$, so bleibt links Alles ungeändert, weil α' ***eigentlicher*** Modul der Periodicität für die Function $(1,\gamma)'$ ist; rechts erhält $(1,\gamma)$ den Zuwachs $\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha}$, wie zu sehen, wenn man α' in der Form $\lambda\alpha+\nu\beta$ schreibt. Man erhält folglich durch Subtraction der ursprünglichen Formel von der neuen:

$$0 = \delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha}+\{a-b(\gamma+\alpha')\}-\{a-b\gamma\},$$

mithin

$$(g.) \qquad b = \delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}.$$

Setzt man ferner $\gamma \infty -\gamma$ in (*A.*) für $g=1$, und addirt die hieraus entstehende Formel zu (*A.*), indem man erwägt, dafs

$$(1,-\gamma+\sigma\alpha+\tau\beta)' = -(1,\gamma-\sigma\alpha-\tau\beta) \quad \text{und} \quad (1,-\gamma) = -(1,\gamma)$$

ist, so erhält man

$$S(1,\gamma+\sigma\alpha+\tau\beta)'-S(1,\gamma-\sigma\alpha-\tau\beta)' = a-b\gamma+a+b\gamma = 2a.$$

Da nun $-\sigma$ eben so wohl ein vollständiges Restensystem (mod. ϑ) wie σ, und $-\tau$ eben so ein vollständiges Restensystem (mod. ϑ') wie τ repräsentirt, so ist die so eben hingeschriebene Differenz $S-S$ von der Form D, und man erhält folglich nach (*f.*)

$$(h.) \qquad a = \delta\Big(-\nu\frac{\Sigma\sigma}{\vartheta}+\lambda\frac{\Sigma\tau}{\vartheta'}\Big)\cdot\frac{2\pi i}{\alpha'}.$$

Wenn ε ungerade ist, kann man immer die σ und die τ auf unendlich viele Arten so annehmen, dafs $\Sigma\sigma=0$, $\Sigma\tau=0$, also auch $a=0$ ist. Übrigens ist klar, dafs $2\frac{\Sigma\sigma}{\vartheta}$ und $2\frac{\Sigma\tau}{\vartheta'}$ stets ganze Zahlen sein werden.

Ich kann nur noch in aller Kürze folgende Bemerkungen zu dieser Theorie der Transformation hinzufügen. Der Zusammensetzung der linearen Systeme entspricht die Zusammensetzung der Transformationen, welche ihnen zugeordnet sind; alle zur Determinante ε gehörigen unendlich vielen linearen Systeme lassen sich aus einer endlichen Anzahl reducirter Systeme von der Form

$$\begin{pmatrix}\vartheta, & 0\\ \xi, & \pm\vartheta'\end{pmatrix},$$

wo ξ jede ganze Zahl $\geqq 0$ und $<\vartheta'$ sein kann, durch Zusammensetzung der letztern mit Systemen, deren Determinante $=1$ ist, ableiten; die Anzahl der reducirten Systeme ist gleich der Factorensumme der Zahl ε; eben so grofs ist die Anzahl der wesentlich verschiedenen Transformationen für die Deter-

minante ε, d. h. derjenigen, welche nicht aus einander durch Transformationen abgeleitet werden können, welche zur Determinante 1 gehören. Ist die Determinante ε ein Quadrat, so tritt das System

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon}, & 0 \\ 0, & \sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

als das einfachste vor den andern heraus und liefert die Multiplication. Kehrt man irgend ein lineares System $\begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \nu, & \varrho \end{pmatrix}$ um, und multiplicirt alle Coëfficienten des umgekehrten Systems mit ε, so erhält man $\begin{pmatrix} \varrho, & -\nu \\ -\mu, & \lambda \end{pmatrix}$, und setzt man dieses und das ursprüngliche zusammen, so erhält man das System $\begin{pmatrix} \varepsilon, & 0 \\ 0, & \varepsilon \end{pmatrix}$. Auf diese Weise erklärt sich die Zusamensetzung der Multiplication aus zwei reciproken Transformationen, welche ***Jacobi*** besonders hervorgehoben hat. Man kann solche Systeme, welche durch Zusammensetzung mit Systemen mit der Determinante 1 (Einheiten unter den Systemen) aus einander hervorgehen, äquivalente Systeme nennen. Setzt man ***dieselben*** Systeme in ***verschiedener*** Ordnung zusammen und gestattet sich dabei, für jedes System beliebig ein ihm äquivalentes zu setzen, so entspringen Systeme, welche zwar verschieden sind, aber stets einander äquivalent gemacht werden können; und die ihnen zugeordneten Transformationen sind nicht wesentlich von einander verschieden.

Auch hier, bei der allgemeinen Transformation, ist der Fall von besonderem Interesse, welchen ich schon in §. 3. für $\varepsilon = \pm 1$ betrachtet habe, wenn nämlich die Proportion $\alpha : \beta = \alpha' : \beta'$ Statt findet. Dieser Fall liefert diejenigen Transformationen, welche man die Scale der ***complexen*** Multiplicationen nennen kann; man findet hier für ω und ϖ dieselben quadratischen Gleichungen, wie in §. 3., nur kann hier ϖ desto mehr Werthe haben, je gröfser ε ist. Da, wenn man die dortige Bezeichnung beibehält,

$$\Delta = (\lambda + \varrho)^2 - 4\varepsilon$$

negativ sein mufs, so mufs ε nothwendig positiv sein und $\lambda + \varrho$ kann dann alle positiven und negativen Werthe erhalten, welche, abgesehen vom Zeichen, $< 2\sqrt{\varepsilon}$ sind; zu jedem postiven Werthe von ε gehören also eine endliche Anzahl von Werthen von Δ und eine endliche Anzahl zugehöriger Werthe von $\varpi = \frac{\lambda + \varrho \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, wo übrigens $\lambda + \varrho \equiv \Delta \pmod 2$ ist. Man kann aber auch die Transformationen nach den Werthen von Δ ordnen, und zu jedem Δ von der Form $4n$ oder $4n+1$ gehören dann unendlich viele in der so eben hin-

geschriebenen Form enthaltene Werthe von ϖ und unendlich viele Werthe von

$$\varepsilon = \frac{\lambda+\varrho+\sqrt{\Delta}}{2}\cdot\frac{\lambda+\varrho-\sqrt{\Delta}}{2} = \varpi\varpi'.$$

Als Beispiel, jedoch aus einem etwas andern Gesichtspuncte betrachtet, werde ich die Werthe $\Delta = -3$ und $\Delta = -4$ nehmen.

Wenn man $\alpha = 1$ und β einer imaginären dritten oder vierten Wurzel der Einheit gleich setzt, also $\beta = i$ oder $\beta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \boldsymbol{r} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, so durchläuft $w = \alpha m + \beta n$ alle ***complexen ganzen*** Zahlen, welche aus dritten und resp. vierten Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind, und man hat diejenigen Functionen, welche am Schlusse von §. 3. besonders hervorgehoben wurden. Es bedeute in der That w die Totalität aller ganzen complexen Zahlen (aus dritten oder vierten Wurzeln der Einheit) und k eine bestimmte ganze complexe Zahl, ferner z ein vollständiges ***complexes*** Restensystem (mod. k), d. h. eine Reihe von $N(k) = M(k)^2$ ganzen complexen Zahlen, welche unter einander incongruent sind und deren einer und nur einer jede complexe Zahl (mod. k) congruent ist: dann repräsentirt der Ausdruck

$$kw+z,$$

eben so wohl als w selbst, die Totalität aller ganzen complexen Zahlen, und man kann folglich in den Doppelsummen, so wie in dem unendlichen Doppelproduct, für diesen Fall $w \sigma kw+z$ setzen; wodurch nach den verschiedenen Werthen von z, die Summen in $N(k)$ Partialsummen und das Product in $N(k)$ Partialproducte zerfallen. Durch die Substitution $w \sigma kw+z$ wird

$$w+k\gamma \sigma kw+k\gamma+z = k\left(w+\gamma+\frac{z}{k}\right), \quad (w+k\gamma)^g \sigma k^g\left(w+\gamma+\frac{z}{k}\right)^g,$$

$$1-\frac{kx}{w+k\gamma} \sigma 1-\frac{x}{w+\gamma+\frac{z}{k}}, \quad \text{folglich}$$

$$(g, k\gamma) \sigma \frac{1}{k^g}\mathop{\mathrm{S}}_{z}\left(g, \gamma+\frac{z}{k}\right), \qquad f(kx, k\gamma) \sigma \boldsymbol{P}_z f\left(x, \gamma+\frac{z}{k}\right).$$

Es sei hiernach

$$\frac{1}{k}\mathop{\mathrm{S}}_{z}\left(1, \gamma+\frac{z}{k}\right) = (1, k\gamma)+a-bk\gamma,$$

und man setze in dieser Gleichung $\gamma \sigma \gamma+1$; die linke Seite bleibt hierbei unverändert, die rechte erhält, da $\delta = -1$ ist*), den Zuwachs $-2h\pi i - bk$,

*) δ hat das entgegengesetzte Zeichen des Coëfficienten von i in $\frac{\beta}{\alpha}$, und dieser Coëfficient ist hier $= 1$, wenn es sich um die lemniscatischen, und $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$, wenn es sich

wenn h der Coëfficient von i und resp. von r in k ist; man erhält demnach $kb = -2h\pi i$. Setzt man ferner in der obigen Gleichung $\gamma \mathfrak{s} -\gamma$, bedenkt dafs allgemein $\left(1, -\gamma + \frac{z}{k}\right) = -\left(1, \gamma - \frac{z}{k}\right)$, $(1, -k\gamma) = -(1, k\gamma)$ ist und dafs jede Zahl aus der Reihe $-z$ eine und nur eine ihr congruente (mod. k) in der Reihe z findet, so erhält man durch Addition der aus der Substitution $\gamma \mathfrak{s} -\gamma$ entspringenden zu der ursprünglichen Gleichung: $ka = -2H\pi i$, wo H der Coëfficient von i und resp. r in $\frac{Sz}{k}$ ist. Wenn k nicht durch $1+i$ und resp. durch $1-r$ oder 2 theilbar ist, so kann man das Restensystem so annehmen, dafs immer gleichzeitig die vier Glieder $\pm z$, $\pm iz$, resp. die sechs Glieder $\pm z$, $\pm rz$, $\pm r^2 z$ vorkommen; dann ist nicht blofs $H = 0$ und $a = 0$, sondern man hat auch diejenige Darstellung des Restensystems, welche in der Theorie der Reste der vierten und sechsten Potenzen von besonderer Wichtigkeit ist. Wenn $k = 1+i$ resp. $= 1-r$ ist, so kann man das Restensystem durch die beiden Werthe $z = 0, 1$ und resp. durch die drei Werthe $z = 0, \pm 1$ darstellen.

Nachdem auf diese Weise ∇ für die hier angewandte Substitution bestimmt ist, erhält man nach den Principien von §. 3.:

$$(C.) \quad (1, k\gamma) = \frac{1}{k} S\left(1, \gamma + \frac{z}{k}\right) + \frac{2\pi i}{k} \mathfrak{C}\left(\frac{Sz}{k}\right) - 2\pi i \mathfrak{C}(k) \cdot \gamma,$$

$$(2, k\gamma) = \frac{1}{k^2} S\left(2, \gamma + \frac{z}{k}\right) + \frac{2\pi i}{k} \mathfrak{C}(k),$$

$$(g, k\gamma) = \frac{1}{k^g} S\left(g, \gamma + \frac{z}{k}\right), \text{ wenn } g > 2 \text{ ist,}$$

$$(D.) \quad \log f(kx, k\gamma)$$

$$= S \log f\left(x, \gamma + \frac{z}{k}\right) - \left\{2\pi i \mathfrak{C}\left(\frac{Sz}{k}\right) - 2\pi i \mathfrak{C}(k) k\gamma\right\} x - \pi i \mathfrak{C}(k) k x^2;$$

wo das Zeichen S sich auf alle Werthe von z, die ein vollständiges Restensystem mod. k erschöpfen, erstreckt, und wo der Kürze wegen durch $\mathfrak{C}$ der Coëfficient von i und resp. von r in einer ganzen complexen Zahl aus vierten und resp. aus dritten Wurzeln der Einheit angedeutet wird, so dafs z. B.

$$\mathfrak{C}(2+3i) = 3, \quad \mathfrak{C}(4+5r) = 5, \quad \mathfrak{C}(i) = 1, \quad \mathfrak{C}(-i) = -1, \quad \mathfrak{C}(r) = 1,$$

$$\mathfrak{C}(r^2) = \mathfrak{C}(-1-r) = -1 \text{ ist.}$$

---

um die mit den dritten Wurzeln der Einheit zusammenhangenden Functionen handelt, ist also in beiden Fällen positiv; hätte man $w = m - ni$ oder $w = m - nr$, $w = m + nr^2$ gesetzt, so würde $\delta = +1$ sein.

Noch will ich die Multiplicationsformeln, welche sich auf den complexen Multiplicator k beziehen, für die am Schlusse von §. 4. eingeführte Function $\varphi(x) = \{-\gamma f(x,\gamma)\}_{\gamma=0}$ aufstellen. In dieser Function ist ebenfalls entweder $\alpha = 1$, $\beta = i$, oder $\alpha = 1$, $\beta = r = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ zu setzen. Ich werde diese Untersuchung mit einiger Ausführlichkeit anstellen, da auf ihr die im folgenden Paragraphen zu machenden arithmetischen Anwendungen beruhen. Nach (*D.*) hat man

$$(\alpha.) \qquad f(kx, k\gamma) = e^{T} \boldsymbol{P} f\Big(x, \gamma + \frac{z}{k}\Big),$$

$$\text{wo } T = -2\pi i \Big\{\mathfrak{S}\Big(\frac{Sz}{k}\Big) - \mathfrak{S}(k)\cdot k\gamma\Big\} x - \pi i \mathfrak{S}(k)\cdot k x^2.$$

Giebt man in dieser Formel ($\alpha.$) z aufser seinen übrigen $N(k)-1$ Werthen, deren Inbegriff durch z' bezeichnet wird, auch den Werth Null, zieht aus dem Producte rechts den Factor $f(x,\gamma)$ heraus, multiplicirt die Formel auf beiden Seiten mit $-k\gamma$ und setzt dann $\gamma = 0$ (wobei zu bemerken, dafs $-k\gamma f(kx, k\gamma)$ in $\varphi(kx)$ und $-\gamma f(x,\gamma)$ in $\varphi(x)$ übergeht), so erhält man

$$(\beta.) \qquad \varphi(kx) = e^{T_0}\cdot k\varphi(x) \boldsymbol{P} f\Big(x, \frac{z'}{k}\Big).$$

Nun ist $f\Big(x, \frac{z'}{k}\Big) = \dfrac{\varphi\Big(x - \frac{z'}{k}\Big)}{\varphi\Big(\frac{-z'}{k}\Big)}$, und wenn man noch, was erlaubt ist, $z' \sigma -z'$ setzt, so ergiebt sich

$$(\gamma.) \qquad \varphi(kx) = e^{U}\cdot k \boldsymbol{P}\varphi\Big(x + \frac{z}{k}\Big) : \boldsymbol{P}\varphi\Big(\frac{z'}{k}\Big);$$

wo $U = 2\pi i \mathfrak{S}\Big(\frac{Sz'}{k}\Big)x - \pi i \mathfrak{S}(k)\cdot k x^2$ ist.

Man nehme irgend eine reelle ganze Zahl t, von der wir zunächst nur voraussetzen, dafs sie nicht durch k oder vielmehr durch $N(k)$ theilbar sein soll; später wird diese reelle ganze Zahl t noch anderen Beschränkungen unterworfen werden. Setzt man in ($\gamma.$) $x \sigma tx$ und $z \sigma tz$, $z' \sigma tz'$, so wird $U \sigma t^2 U$; denn da t reell ist, so ist $\mathfrak{S}\Big(\frac{tSz'}{k}\Big) = t\mathfrak{S}\Big(\frac{Sz'}{k}\Big)$, und führt man die neue Function $F(x) = \varphi(tx)$ ein, so wird $\varphi(kx) \sigma \varphi(ktx) = F(kx)$, $\varphi\Big(x + \frac{z}{k}\Big) \sigma \varphi\Big(tx + \frac{tz}{k}\Big) = F\Big(x + \frac{z}{k}\Big)$, $\varphi\Big(\frac{z'}{k}\Big) \sigma \varphi\Big(\frac{tz'}{k}\Big) = F\Big(\frac{z'}{k}\Big)$, folglich erhält man

$$(\delta.) \qquad F(kx) = e^{t^2 U} k \cdot \boldsymbol{P} F\Big(x + \frac{z}{k}\Big) : \boldsymbol{P} F\Big(\frac{z'}{k}\Big).$$

Es wird sich bald der Nutzen der Einführung der beliebigen reellen ganzen Zahl l zeigen.

Es sei l eine andere complexe ganze Zahl, welche zu k relative Primzahl ist; es sei λ das allgemeine Glied eines vollständigen Restensystems (mod. l), welches die Null enthält, und λ' das allgemeine Glied eines reducirten Restensystems (mod. l), d. h. es repräsentire λ' diejenige Reihe von $N(l)-1$ Zahlen, welche verbleiben, wenn man von den $N(l)$ Zahlen λ die Null ausschliefst. Setzt man in (γ.) $x \sigma x + \frac{\lambda}{l}$ und multiplicirt über die $N(l)$ Werthe von λ, so erhält man

$$P_\lambda \varphi\left(kx + \frac{k\lambda}{l}\right) = e^{SU} k^{N(l)} P_\lambda P_z \varphi\left(x + \frac{\lambda}{l} + \frac{z}{k}\right) : \left\{P_{z'} \varphi\left(\frac{z'}{k}\right)\right\}^{N(l)},$$

wo $SU = 2\pi i \mathfrak{C}\left(\frac{Sz'}{k}\right) S\left(x + \frac{\lambda}{l}\right) - \pi i \mathfrak{C}(k) \cdot k S\left(x + \frac{\lambda}{l}\right)^2$ ist. Nun ist, wenn man die Formel (γ.) auf die complexe Zahl l anwendet, indem man zugleich $x \sigma kx$ setzt und das Restensystem (mod. l) durch $k\lambda$ repräsentirt:

$$\varphi(klx) = e^{V'} l P_\lambda \varphi\left(kx + \frac{k\lambda}{l}\right) : P_{\lambda'} \varphi\left(\frac{k\lambda'}{l}\right),$$

$$\text{wo } V' = 2\pi i \mathfrak{C}\left(\frac{kS\lambda'}{l}\right) kx - \pi i \mathfrak{C}(l) \cdot lk^2 x^2;$$

folglich erhält man durch Substitution

$$\varphi(klx) = e^{V'+SU} \cdot l k^{N(l)} \frac{P_\lambda P_z \varphi\left(x + \frac{\lambda}{l} + \frac{z}{k}\right)}{P_{z'} \varphi\left(\frac{z'}{k}\right)^{N(l)} \cdot P_{\lambda'} \varphi\left(\frac{k\lambda'}{l}\right)}.$$

Vertauscht man hier k und l mit einander, also auch z und λ mit einander, dividirt die hieraus hervorgehende Formel durch die ursprüngliche und setzt nach geschehener Division x, welches sodann nur noch in der Exponentialgröfse vorkommt, $= 0$, so erhält man

$$(\varepsilon.) \quad e^{SU_0} k^{N(l)-1} P_{\lambda'} \varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right)^{N(k)} P_{z'} \varphi\left(\frac{lz'}{k}\right) = e^{SV_0} l^{N(k)-1} P_{z'} \varphi\left(\frac{z'}{k}\right)^{N(l)} P_{\lambda'} \varphi\left(\frac{k\lambda'}{l}\right),$$

wo

$$SU_0 = 2\pi i \mathfrak{C}\left(\frac{Sz}{k}\right) S\left(\frac{\lambda}{l}\right) - \pi i \mathfrak{C}(k) k S\left(\frac{\lambda^2}{l^2}\right),$$

$$SV_0 = 2\pi i \mathfrak{C}\left(\frac{S\lambda}{l}\right) S\left(\frac{z}{k}\right) - \pi i \mathfrak{C}(l) l S\left(\frac{z^2}{k^2}\right) \text{ ist.}$$

Für die Anwendungen, welche ich im Auge habe, reicht es hin, in der Theorie der complexen Zahlen aus vierten Wurzeln der Einheit für k eine nicht durch $1+i$, und in der Theorie der complexen Zahlen aus dritten Wurzeln der Ein-

heit, für k eine weder durch $1-r$, noch durch 2 theilbare Zahl anzunehmen; in diesem Falle kann man das Restensystem x', wie schon bemerkt, so annehmen, dafs es in vier, resp. sechs Theile zerfällt, welche aus einander durch Multiplication mit complexen Einheiten entstehen, d. h. dafs die Reihen, deren allgemeine Glieder $\pm x$, $\pm ix$, resp. $\pm x$, $\pm rx$, $\pm r^2x$ sind, mit der Reihe zusammenfallen, deren allgemeines Glied x ist. Unter dieser Voraussetzung wird $\mathrm{S}x = 0$ und $\mathrm{S}x^2 = 0$, und dadurch vereinfachen sich die Ausdrücke $\mathrm{S}U_0$ und $\mathrm{S}V_0$, indem $\mathrm{S}U_0 = -\pi i \mathfrak{G}(k) k \mathrm{S}\left(\frac{\lambda^2}{l^2}\right)$ und $\mathrm{S}V_0 = 0$ wird. Setzt man jetzt, um die Function F in (ε.) einzuführen, $x \sigma tx$, so wird $\varphi\left(\frac{x'}{k}\right) \sigma F\left(\frac{x'}{k}\right)$, $\varphi\left(\frac{lx'}{k}\right) \sigma F\left(\frac{lx'}{k}\right)$, also erhält man

$$(\varepsilon'.) \qquad e^{\mathrm{S}U_0} k^{N(l)-1} P_{\lambda'} \varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right)^{N(k)} P_{x'} F\left(\frac{lx'}{k}\right) = l^{N(k)-1} P_{x'} F\left(\frac{x'}{k}\right)^{N(l)} P_{\lambda'} \varphi\left(\frac{k\lambda'}{l}\right).$$

Dem Producte $P_{x'} F\left(\frac{lx'}{k}\right)$ mufs man eine einfachere Form geben. Es sei t *gerade*. Diese Annahme hindert nicht, nach dem was wir über die complexe Zahl k festgesetzt haben, dafs t zu k relative Primzahl sei. lx' durchläuft ebenso wie x' ein reducirtes Restensystem (mod. k) und jede Zahl in der Reihe, deren allgemeines Glied lx' ist, findet ihre congruente in der Reihe, deren allgemeines Glied x' ist; jenes Product läfst sich daher sehr einfach auf das Product $P_{x'} F\left(\frac{x'}{k}\right)$ zurückführen. Nach (XI.) in §. 4. hat man allgemein

$$\varphi(x + g\alpha + h\beta) = (-1)^{g+h} e^{\delta \frac{h^2\beta + 2hx}{a} \pi i}.$$

Wenn daher $\alpha = 1$, $\beta = i$ oder $= r$ und t ***gerade*** ist, so hat man

$$\varphi(tx + tg + th\beta) = e^{-t^2(h^2\beta + 2hx)\pi i} \varphi(tx),$$

also

$$(\zeta.) \qquad F(x + g + h\beta) = e^{\mathfrak{w}t^2} F(x),$$

wo $\mathfrak{w}$ ***von t unabhängig*** ist. Hiernach findet sich

$$P_{x'} F\left(\frac{lx'}{k}\right) = e^{\mathfrak{w}t^2} P_{x'} F\left(\frac{x'}{k}\right);$$

wo ebenfalls $\mathfrak{w}$ von t unabhängig ist; was wir für die folgenden Anwendungen nur zu wissen brauchen. Der Werth selbst von $\mathfrak{w}$ ist leicht anzugeben; zieht man nämlich von jedem Gliede der Reihe $\frac{lx'}{k}$ das ihm entsprechende der Reihe $\frac{x'}{k}$ ab, welches eine Differenz von der Form $g + h\beta$ giebt, wo g und h reelle ganze Zahlen sind, und bezeichnet durch h das allgemeine Glied der Coëfficien-

ten von β ($=i$ resp. $=r$) in diesen Differenzen, so hat man

$$\mathfrak{w} = -(\mathrm{S}h^2\cdot\beta + 2\mathrm{S}h\cdot x)\pi i.$$

Durch $\mathfrak{w}$ werde ich hier immer einen Ausdruck bezeichnen, um dessen Werth wir uns nicht weiter bekümmern, als dafs wir uns überzeugen, er sei von l unabhängig. Hiernach wird aus $(\varepsilon'.)$:

$$(\varepsilon''.)\quad e^{\mathrm{S}U_0} e^{\mathfrak{w}t^2} k^{N(l)-1} P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right)^{N(k)} = l^{N(k)-1} P_{\varkappa'} F\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)^{N(l)-1} P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{k\lambda'}{l}\right).$$

Endlich kann man diese Formel noch dadurch vereinfachen, dafs man $P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{k\lambda'}{l}\right)$ auf $P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right)$ zurückführt. Man bezeichne das allgemeine Glied der Differenzen, welche man erhält, wenn man von jedem Gliede der Reihe $k\lambda'$ das ihm congruente aus der Reihe λ' abzieht, durch $l(g+h\beta)$, so giebt (XI.) §. 4.:

$$P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{k\lambda'}{l}\right) = (-1)^{\mathrm{S}g+\mathrm{S}h} e^{-\left\{\mathrm{S}h^2\beta+2\mathrm{S}\left(\frac{h\lambda'}{l}\right)\right\}\pi i} P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right) = G\cdot P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right),$$

folglich

$$(\eta.)\quad e^{\mathrm{S}U_0} e^{\mathfrak{w}t^2} k^{N(l)-1} P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right)^{N(k)-1} = G\cdot l^{N(k)-1} P_{\varkappa'} F\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)^{N(l)-1}.$$

Um hieraus den Werth des Products $P_{\varkappa'} F\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)$ zu finden, auf welchen Alles ankommt, setze man statt l die speciellen Werthe $1+i$, $1-r$ und 2, letztere Zahl 2 als complexe Primzahl aus dritten Wurzeln der Einheit betrachtet. Wenn $l=1+i$, so hat λ' nur den einen Werth $\lambda'=1$, und da $k\equiv 1 \pmod{1+i}$ ist, so erhält man, wenn $k=a+bi$ gesetzt wird, $g+hi=\frac{a+bi-1}{1+i}$, $g=\frac{a+b-1}{2}$, $h=\frac{b-a+1}{2}$, also $(-1)^{g+h}=(-1)^b$. Der Exponent der Exponentialgröfse in G wird $-\left\{h^2 i+2\frac{h}{1+i}\right\}\pi i = -\{h^2 i+(1-i)h\}\pi i$; der imaginäre Bestandtheil dieses Exponenten ist $-h\pi i$, und wenn man seinen reellen Theil wegläfst, so läfst man von G einen ***reellen und positiven*** Factor weg, den ich mit $\mathfrak{p}$ bezeichne. Man erhält folglich

$$G = \mathfrak{p}(-1)^{g+h} e^{-h\pi i} = \mathfrak{p}(-1)^{g+2h} = \mathfrak{p}(-1)^{\frac{a+b-1}{2}}.$$

Ferner ist

$$\mathrm{S}U_0 = -\pi i\mathfrak{C}(k)k\cdot\frac{1}{2i} = -\frac{\pi}{2}\cdot b(a+bi),$$

und der imaginäre Bestandtheil hiervon ist $-\frac{b^2\pi i}{2}$, also

$$e^{\mathrm{S}U_0} = \mathfrak{p}e^{-\frac{b^2\pi i}{2}} = \mathfrak{p}\cdot(-i)^{b^2}.$$

Nimmt man b gerade an, so wird $b^2 \equiv 0 \pmod 4$, $e^{SU_0} = \mathfrak{p}$, und setzt man noch $a+b \equiv 1 \pmod 4$, so dafs k primär ist, in dem Sinne von *Gaufs*, so wird auch $G = \mathfrak{p}$, und nach $(\eta.)$ hat man also für einen primären Werth von k, da $N(l) = 2$ ist:

$$(\vartheta_1.) \qquad P_{x'} F\left(\frac{x'}{k}\right) = \mathfrak{p} \cdot e^{\pi i l^2} k \varphi\left(\frac{1}{1+i}\right)^{N(l)-1} : (1+i)^{N(l)-1}.$$

Für $l = 1-r$, $N(l) = 3$ hat λ' die beiden Werthe ± 1. Man kann immer annehmen, dafs $k \equiv +1 \pmod{1-r}$; denn eine der beiden Zahlen $\pm k$ genügt sicher dieser Bedingung; dann ist $k\lambda' \equiv \lambda' \pmod{1-r}$, nämlich $\pm k \equiv \pm 1 \pmod{1-r}$; g und h haben zwei einander entgegengesetzte Werthe, so dafs $Sg = 0$, $Sh = 0$. Der Exponent der in G vorkommenden Exponentialgröfse, welchen ich durch W bezeichnen will, ist

$$W = -\pi i \left\{ S h^2 r + 2 S\left(\frac{h\lambda'}{1-r}\right)\right\}.$$

Setzt man $k-1 = (1-r)(g+hr)$, so durchläuft h^2 in der Summe die beiden Werthe h^2, h^2, und $h\lambda'$ die beiden Werthe h, h, weil $\lambda' = +1$, $+h$ und $\lambda' = -1$, $-h$ entspricht. Erlaubt man sich nun, im Exponenten beliebig alle reellen Bestandtheile wegzulassen, so kommt $W = -\pi i\{-h^2 + 2h\}$, weil der reelle Bestandtheil von r, $= -\frac{1}{2}$, der von $\frac{2}{1-r}$, $= 1$ ist und in der Parenthese die imaginären Theile weggelassen werden können. Läfst man auch die ganzen Vielfachen von $2\pi i$ weg, so kommt $W = h^2 \pi i = h \pi i$, also $G = \mathfrak{p}(-1)^h$; und setzt man $k = a + br$, so ist $g + hr = \frac{1}{3}(a-1+br)(1-r^2)$, also $3g = 2a - b - 2$, $3h = a + b - 1$ und $G = \mathfrak{p}(-1)^{a+b-1}$. Dasselbe findet man, wenn $k \equiv -1 \pmod{1-r}$. Ferner ist $SU_0 = \frac{2\pi i}{3} b(ar^2 + b)$, und der imaginäre Theil hiervon ist $\frac{\pi i}{3} b(2b - a)$, folglich $e^{SU_0} = \mathfrak{p}(-1)^{ab} r^{b(a+b)}$; vereinigt man ab mit $a+b-1$ in G zu $(a-1)(b-1)$, welches *gerade* ist, da nicht a und b beide gerade sein sollen, so erhält man

$$(\vartheta_2.) \qquad P_{x'} F\left(\frac{x'}{k}\right)^2 = \mathfrak{p}\, e^{\pi i l^2} r^{b(a+b)} k^2 P_{\lambda'} \varphi\left(\frac{\lambda'}{1-r}\right)^{N(l)-1} : (1-r)^{N(l)-1}.$$

Wenn endlich $l = 2$ gesetzt wird und die ähnlichen Berechnungen gemacht werden, so erhält man eine Formel zur Bestimmung der dritten Potenz des in $(\vartheta_2.)$ zur Linken befindlichen Products, und wenn man diese durch $(\vartheta_2.)$ dividirt, so erhält man die erste Potenz jenes Products für den Fall der aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten complexen Zahlen.

Diese Untersuchungen gewinnen auf nachstehende Art eine noch gröfsere Übersichtlichkeit, und man sieht zugleich, dafs zur vollständigen Darstellung der in den folgenden Paragraphen gegebenen Beweise der Reciprocitätsgesetze für die Reste der vierten und sechsten Potenzen nur eine geringe Zahl von Betrachtungen erforderlich ist.

Wenn $\alpha = 1$, $\beta = i$ oder $= r$, also $\delta = -1$, und w die Totalität aller complexen ganzen Zahlen von der Form $m + n\beta$ darstellt, und wenn ferner k eine ganze complexe Zahl $a + b\beta$, z ein vollständiges, z' ein reducirtes complexes Restensystem mod. k ist, so stellt $kw + z$ ebenfalls die Totalität aller complexen ganzen Zahlen dar und es kann statt w in das unendliche Doppelproduct $f(x, \gamma)$ gesetzt werden, wodurch dasselbe in ein Product von $N(k)$ Doppelproducten $f\left(\frac{x}{k}, \frac{\gamma + z}{k}\right)$ zerfällt. Die Modification von $\log f(x, \gamma)$ ist $= -\nabla(1, \gamma)x - \frac{1}{2}\nabla(2, \gamma)x^2$; $\nabla(2, \gamma)$ ist gleich dem Coëfficienten von γ in $\nabla(1, \gamma)$ mit entgegengesetztem Zeichen genommen, und $\nabla(1, \gamma)$, dessen lineare Form in Bezug auf γ man schon kennt, findet sich, wenn man in die Formel $\frac{1}{k}\mathrm{S}\left(1, \frac{\gamma + z}{k}\right) = (1, \gamma) + \nabla(1, \gamma)$ zuerst $\gamma \infty \gamma + k$, dann $\gamma \infty -\gamma$ setzt und die uneigentliche Periodicität von $(1, \gamma)$ berücksichtigt, nach welcher $(1, \gamma + g + h\beta) = (1, \gamma) - 2h\pi i$ ist. Man findet auf diese Weise

$$\nabla(1, \gamma) = \frac{-2\pi i}{k}\left(\mathfrak{S}\mathrm{S}\left(\frac{z}{k}\right) - \mathfrak{S}(k)\gamma\right), \qquad \nabla(2, \gamma) = \frac{-2\pi i}{k}\mathfrak{S}(k),$$

$$\nabla \log f(x, \gamma) = \frac{2\pi i}{k}\left(\left(\mathfrak{S}\mathrm{S}\frac{z}{k} - \mathfrak{S}k \cdot \gamma\right)x + \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}k \cdot x^2\right),$$

$$P_z f\left(\frac{x}{k}, \frac{\gamma + z}{k}\right) = e^{\nabla \log f(x, \gamma)} f(x, \gamma), \quad P_z f\left(x, \gamma + \frac{z}{k}\right) = e^{\nabla \log f(kx, k\gamma)} f(kx, k\gamma).$$

Multiplicirt man letztere Gleichung auf beiden Seiten mit $-k\gamma$, stellt die $N(k)$ Zahlen z aus der Null und den $N(k) - 1$ Zahlen z' zusammen und setzt zuletzt $\gamma = 0$ und $x \infty -x$, indem man die aus der Definition der unendlichen Doppelproducte von selbst hervorgehenden Relationen $-\gamma f(x, \gamma) = \varphi(x)$, $f\left(x, \frac{z'}{k}\right) = \dfrac{\varphi\left(\frac{z'}{k} - x\right)}{\varphi\left(\frac{z'}{k}\right)}$,

$-k\gamma f(kx, k\gamma) = \varphi(kx)$, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ berücksichtigt, so ergiebt sich:

$$(1.) \qquad e^{\nabla \log f(-kx, 0)}\varphi(kx) = \frac{kP\varphi\left(x + \frac{z}{k}\right)}{P\varphi\left(\frac{z'}{k}\right)};$$

wo $\nabla \log f(-kx, 0) = 2\pi i\left(-\mathfrak{S}\mathrm{S}\left(\frac{z}{k}\right)x + \frac{1}{2}\mathfrak{S}(k) \cdot kx^2\right)$.

Es sei l eine zweite complexe ganze Zahl, welche mit k keinen gemeinschaftlichen Theiler hat; λ sei ein vollständiges, λ' ein reducirtes Restensystem (mod. l); ferner sei $N(k)=p$, $N(l)=q$, und man setze der Kürze wegen die Producte

$$P_{\varkappa'}\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)=\psi(k), \qquad P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right)=\psi(l),$$

$$P_{\lambda}\varphi\left(kx+\frac{k\lambda}{l}\right)=A, \quad P_{\lambda}\varphi\left(kx+\frac{\lambda}{l}\right)=B, \quad P_{\varkappa}P_{\lambda}\varphi\left(x+\frac{\varkappa}{k}+\frac{\lambda}{l}\right)=C.$$

Da die Vielfachen $k\lambda'$, wenn man sie durch den mod. l dividirt, ihre Reste, welche sämmtlich verschieden sind, in der Reihe λ' finden, so sei

$$k\lambda' \equiv \lambda_1 \,(\mathrm{mod}.\, l) \quad \text{und} \quad k\lambda' = \lambda_1+(\nu_0+\nu\beta)l,$$

wo λ_1 unter den λ' befindlich ist, und alle λ_1 mit allen λ', wenn auch in anderer Ordnung, zusammenfallen. Auf ähnliche Weise sei, da die Vielfachen $l\varkappa'$ (mod. k) ihre Reste unter den $\varkappa'$ haben, und diese Reste die sämmtlichen $\varkappa'$ erschöpfen,

$$l\varkappa' \equiv \varkappa_1 \,(\mathrm{mod}.\, k) \quad \text{und} \quad l\varkappa' = \varkappa_1+(\mu_0+\mu\beta)k;$$

wo alle $\varkappa_1$ mit allen $\varkappa'$, wenn auch in anderer Ordnung, zusammenfallen. Da hiernach $\frac{k\lambda'}{l}=\frac{\lambda_1}{l}+\nu_0+\nu\beta$ ist, so folgt aus der uneigentlichen Periodicität der Function φ:

$$\varphi\left(kx+\frac{k\lambda'}{l}\right)=(-1)^{\nu_0+\nu}e^{-2\pi i\left(\frac{1}{2}\nu^2\beta+\frac{\nu\lambda_1}{l}+\nu kx\right)}\varphi\left(kx+\frac{\lambda_1}{l}\right).$$

Setzt man für λ alle seine q Werthe und jedesmal die entsprechenden Werthe von λ_1, ν_0 und ν, so kommt, da alle λ_1 mit allen λ' zusammenfallen:

$$A=e^{2\pi i.V}B, \quad \text{wo} \quad V=\tfrac{1}{2}\mathrm{S}\nu_0+\tfrac{1}{2}\mathrm{S}\nu-\tfrac{1}{2}\mathrm{S}\nu^2\beta-\frac{\mathrm{S}(\nu\lambda_1)}{l}-\mathrm{S}\nu\cdot kx.$$

Aus (1.) erhält man, wenn $x \,\mathfrak{o}\, x+\frac{\lambda}{l}$ gesetzt und über alle Werthe von λ multiplicirt wird:

$$e^{2\pi i.W}.A=\frac{k^q}{\psi(k)^q}C;$$

wo $W=-\mathfrak{C}\mathrm{S}\left(\frac{\varkappa}{k}\right)\cdot\mathrm{S}\left(x+\frac{\lambda}{l}\right)+\frac{1}{2}\mathfrak{C}(k)k\mathrm{S}\left(x+\frac{\lambda}{l}\right)^2$. Endlich erhält man aus (1.), wenn man $k \,\mathfrak{o}\, l$, also auch $\varkappa \,\mathfrak{o}\, \lambda$, $\varkappa' \,\mathfrak{o}\, \lambda'$, und aufserdem $x \,\mathfrak{o}\, kx$ setzt:

$$e^{2\pi i.Z}\varphi(klx)=\frac{l}{\psi(l)}B, \quad \text{wo} \quad Z=-\mathfrak{C}\mathrm{S}\left(\frac{\lambda}{l}\right)kx+\tfrac{1}{2}\mathfrak{C}(l)lk^2x^2,$$

und aus der Verbindung dieser drei Formeln $A = e^{2\pi i.V} B$, $e^{2\pi i.W} A = \frac{k^q}{\psi(k)^q} C$ und $e^{2\pi i.Z} \varphi(klx) = \frac{l}{\psi(l)} B$ folgt

$$\frac{\varphi(klx)}{C} = \frac{l}{\psi(l)} \cdot \frac{k^q}{\psi(k)^q} e^{2\pi i(-V-W-Z)}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung bleibt unverändert, wenn man k mit l vertauscht; dasselbe mufs also auch rechts der Fall sein. Zunächst müssen daher die Coëfficienten von x und x^2 in $-V-W-Z$ bei der Vertauschung von k mit l unverändert bleiben, was sich auch leicht a posteriori verificiren läfst. Setzt man ferner das constante Glied in $-V-W-Z$, welches von rein arithmetischer Form ist, $= [l; k]$, nämlich

$$[l; k] = \mathfrak{C}\mathrm{S}\left(\frac{\varkappa}{k}\right)\cdot\mathrm{S}\left(\frac{\lambda}{l}\right) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}(k)k\mathrm{S}\left(\frac{\lambda^2}{l^2}\right) - \tfrac{1}{2}\mathrm{S}\nu_0 - \tfrac{1}{2}\mathrm{S}\nu + \tfrac{1}{2}\mathrm{S}\nu^2\beta + \frac{\mathrm{S}(\nu\lambda_1)}{l},$$

und in ähnlicher Weise

$$[k; l] = \mathfrak{C}\mathrm{S}\left(\frac{\lambda}{l}\right)\cdot\mathrm{S}\left(\frac{\varkappa}{k}\right) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}(l)l\mathrm{S}\left(\frac{\varkappa^2}{k^2}\right) - \tfrac{1}{2}\mathrm{S}\mu_0 - \tfrac{1}{2}\mathrm{S}\mu + \tfrac{1}{2}\mathrm{S}\mu^2\beta + \frac{\mathrm{S}(\mu\varkappa_1)}{k},$$

so erhält man durch Vertauschung von k mit l, aus obiger Gleichung:

$$\frac{l}{\psi(l)} \cdot \frac{k^q}{\psi(k)^q} e^{2\pi i.[l; k]} = \frac{k}{\psi(k)} \cdot \frac{l^p}{\psi(l)^p} e^{2\pi i.[k; l]}, \quad \text{also}$$

$$(2.) \qquad \frac{k^{q-1}}{\psi(k)^{q-1}} = e^{2\pi i[k; l]} e^{-2\pi i[l; k]} \frac{l^{p-1}}{\psi(l)^{p-1}}.$$

Aus dieser Gleichung läfst sich für unendlich viele Werthe von $q-1$ die $(q-1)$te Potenz von $\frac{k}{\psi(k)}$ finden, wenn man l specielle Werthe giebt; aber da die Darstellung von $\frac{k}{\psi(k)}$ durch Wurzelgröfsen und namentlich durch solche, deren Wurzel-Exponenten durch 2 oder 3 theilbar sind, für die nachfolgende Anwendung gänzlich unbrauchbar ist, so mufs man einen Werth von l suchen, oder solche Werthe von l combiniren, durch welche die Darstellung von $\frac{k}{\psi(k)}$ in rationaler und unzweideutiger Form möglich wird. Wenn $\beta = i$ ist, so ist $l = 1+i$ ein Werth, für welchen unmittelbar $q-1 = 1$ wird. Wenn $\beta = r$ ist, so hat man die beiden Werthe $l = 1-r$ und $l = 2$, für welche $q-1 = 2$ resp. $q-1 = 3$ ist, und man erhält die 2te und die 3te Potenz des oft erwähnten Quotienten, und durch deren Combination (Division) die erte Potenz jenes Quotienten.

Die Ausdrücke $[l;k]$ und $[k;l]$ vereinfachen sich für specielle Formen, die sich den Restensystemen geben lassen. Wenn zunächst mit jedem $\varkappa$ auch sein entgegengesetzter Werth $-\varkappa$ in dem Restensysteme (mod. k) vorkommt, so ist $S\varkappa = 0$, und da aus $\varkappa \sigma -\varkappa$; $\mu_0 \sigma -\mu_0$, $\mu \sigma -\mu$ folgt, so ist auch $S\mu_0 = 0$, $S\mu = 0$. Wenn ferner für $\beta = r$ immer gleichzeitig $\varkappa$, $r\varkappa$, $r^2\varkappa$ vorkommen, so ist ebenfalls $S\varkappa = 0$ und auch $S\varkappa^2 = 0$; und da unter dieser Voraussetzung immer drei Werthe von $\mu_0 + \mu r$, wie $\mu_0 + \mu r$, $-\mu + (\mu_0 - \mu) r$, $(\mu - \mu_0) - \mu_0 r$, zusammengehören, deren Summe verschwindet, so ist $S\mu_0 = 0$, $S\mu = 0$. Wenn endlich für $\beta = i$ immer gleichzeitig die vier Werthe $\pm\varkappa$, $\pm i\varkappa$ von $\varkappa$ vorkommen, so ist $S\varkappa = 0$, $S\varkappa^2 = 0$, $S\mu_0 = 0$, $S\mu = 0$. Nimmt man demnach an, das Restensystem mod. k sei so construirt, dafs für $\beta = i$ immer gleichzeitig die vier associirten Reste $\pm\varkappa$, $\pm i\varkappa$ und für $\beta = r$ immer gleichzeitig die sechs associirten Reste $\pm\varkappa$, $\pm r\varkappa$, $\pm r^2\varkappa$ vorkommen, wenn $\varkappa$ vorkommt, welche Constructionsweise sich beiläufig die Eintheilung des Restensystems in seine vier, resp. sechs *associirten* Theile nennen läfst, so nehmen $[l;k]$ und $[k;l]$ folgende einfachere Form an:

$$[l;k] = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{C}(k)k\,S\left(\frac{\lambda^2}{l^2}\right) - \tfrac{1}{2}S\nu_0 - \tfrac{1}{2}S\nu + \tfrac{1}{2}S\nu^2\cdot\beta + \frac{S(\nu\lambda_1)}{l},$$

$$[k;l] = \tfrac{1}{2}S\mu^2\cdot\beta + \frac{S(\mu\varkappa_1)}{k}.$$

Diese Annahme schliefst die Fälle aus, wenn k durch $1+i$, für $\beta = i$, und wenn k durch $1-r$, oder durch 2, für $\beta = r$, theilbar ist. Man bemerke (was für das Folgende von besonderer Wichtigkeit ist), dafs in dieser Form $[k;l] \sigma t^2[k;l]$, wenn $\varkappa \sigma t\varkappa$ gesetzt wird, wo t reell und ganz, und nicht durch p theilbar ist: denn aus $\varkappa \sigma t\varkappa$ folgt $\varkappa_1 \sigma t\varkappa_1$ und, da t reell angenommen wird, $\mu \sigma t\mu$, $\mu^2 \sigma t^2\mu^2$, $\mu\varkappa_1 \sigma t^2\mu\varkappa_1$, also $S\mu^2 \sigma t^2 S\mu^2$ und $S(\mu\varkappa_1) \sigma t^2 S(\mu\varkappa_1)$.

Ich komme zu der übersichtlichen Darstellung der Berechnung von $[1+i;k]$, $[1-r;k]$ und $[2;k]$.

Erstens, für $\beta = i$, $l = 1+i$ ist $\lambda' = 1$, $\nu_0 + \nu i = \frac{k-1}{1+i}$, also wenn $k = a+bi$ gesetzt wird, $\nu_0 = \frac{a+b-1}{2}$, $\nu = \frac{b-a+1}{2}$; $-\frac{1}{2}\mathfrak{C}(k)k\,S\left(\frac{\lambda^2}{l^2}\right) = -\frac{1}{2}b(a+bi)\cdot\frac{1}{2i} = \frac{1}{4}(-b^2+abi)$, $-\frac{1}{2}S\nu_0 - \frac{1}{2}S\nu = -\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}S\nu^2\beta = \frac{1}{8}(b-a+1)^2\cdot i$, $\frac{S(\nu\lambda_1)}{l} = \frac{b-a+1}{2(1+i)} = \frac{1}{4}(b-a+1) - \frac{1}{4}(b-a+1)i$, mithin

$$[1+i;k] = -\tfrac{1}{4}(b^2+b+a-1) + \tfrac{1}{8}i(2ab+(b-a+1)^2-2(b-a+1)).$$

Nun ist $(b-a+1)^2-2(b-a+1)=(b-a)^2-1$, also der Coëfficient von $\frac{1}{8}i$, $=2ab+(b-a)^2-1=a^2+b^2-1=p-1$, folglich

$$[1+i;k]=-\tfrac{1}{4}(b^2+b+a-1)+\tfrac{1}{8}(p-1)i.$$

Zweitens, für $\beta=r$, $l=1-r$ ist $\lambda'=\pm 1$, also zunächst $S\nu_0=0$, $S\nu=0$, $[1-r;k]=-\frac{1}{2}\mathfrak{C}(k)kS\left(\frac{\lambda^2}{l^2}\right)+\frac{1}{2}S\nu^2\cdot r+\frac{S\nu\lambda_1}{l}$. Nimmt man $k\equiv 1 \pmod{1-r}$ an und setzt

$$k=a+br,\ \frac{k-1}{1-r}=g+hr=\tfrac{1}{3}(a-1+br)(1-r^2)=\tfrac{1}{3}(2a-b-2)+\tfrac{1}{3}(a+b-1)r,$$

so sind $\nu=\pm h$ die beiden Werthe von ν, und $\lambda_1=\lambda'=\pm 1$ die entsprechenden Werthe von λ_1. Hiernach ist $S\lambda^2=2$, $S\nu^2=2h^2$, $S(\nu\lambda_1)=2h$, $-\frac{1}{2}S\left(\frac{\lambda^2}{l^2}\right)=\frac{-1}{(1-r)^2}=\frac{1}{3}r^2$, $\frac{1}{2}S\nu^2\cdot r=h^2r$, $\frac{S\nu\lambda_1}{l}=\frac{2h}{1-r}=\frac{2}{3}h(1-r^2)$, also $[1-r;k]=\frac{1}{3}b(a+br)r^2+h^2r+\frac{2}{3}h(1-r^2)=\frac{1}{3}b^2+\frac{2}{3}h+h^2r+\frac{1}{3}(ab-2h)r^2=\frac{1}{3}(b^2-ab+4h)+(h^2+\frac{2}{3}h-\frac{1}{3}ab)r=\frac{1}{3}(b^2-ab+4h)-\frac{1}{2}(h^2+\frac{2}{3}h-\frac{1}{3}ab)+\frac{1}{2}(h^2+\frac{2}{3}h-\frac{1}{3}ab)\sqrt{-3}$. Nun ist $h^2+\frac{2}{3}h=\frac{1}{9}\{(3h+1)^2-1\}=\frac{1}{9}\{(a+b)^2-1\}$, also ist der Coëfficient von $\sqrt{-3}$, $\frac{1}{18}\{(a+b)^2-3ab-1\}=\frac{1}{18}\{a^2-ab+b^2-1\}=\frac{1}{18}(p-1)$. Der reelle Theil wird

$$\tfrac{1}{3}(b^2+ab)-\tfrac{1}{2}\{(a+b-1)^2-3ab\}-2ab+h+4h^2,$$

weil $(a+b-1)^2=9h^2$ ist. Es ist aber $(a+b-1)^2-3ab=p-2a-2b+1=p-1-6h$, und $b^2+ab=b(a+b)=b(3h+1)$, also wird der reelle Theil $=\frac{1}{3}b-\frac{1}{2}(p-1)+bh-2ab+4h+4h^2$. Läfst man die ganze Zahl $bh-2ab+4h+4h^2$ weg, so ändert sich $e^{2\pi i[1-r;k]}$ nicht; man darf daher auch blofs $[1-r;k]=\frac{1}{3}b-\frac{1}{2}(p-1)+\frac{1}{18}(p-1)\sqrt{-3}$ setzen. Wenn k nicht durch 2 theilbar ist, so ist auch das Glied $-\frac{1}{2}(p-1)$ eine ganze Zahl und kann ebenfalls weggelassen werden, so dafs blofs $[1-r;k]=\frac{1}{3}b+\frac{1}{18}(p-1)\sqrt{-3}$ ist. Die vollständigere Formel gilt aber auch für einen geraden Werth von k.

Wenn endlich *drittens* $\beta=r$, $l=2$ gesetzt wird und dem λ' die drei Werthe $1, r, r^2$ gegeben werden, so erhält man $S\lambda^2=0$, $S\nu_0=0$, $S\nu=0$; also ist blofs $[2;k]=\frac{1}{2}S\nu^2\cdot r+\frac{1}{2}S(\nu\lambda_1)$. Es sei $k\equiv 1 \pmod 2$ und $\frac{k-1}{2}=g+hr$, $g=\frac{a-1}{2}$, $h=\frac{1}{2}b$, so erhält man ferner $\lambda_1=\lambda'=1, r, r^2$ und, diesen Werthen entsprechend, $\nu=h, g-h, -g$, also $\frac{1}{2}S\nu^2=g^2-gh+h^2$, $S(\nu\lambda_1)=h+(g-h)r-gr^2=g+h+(2g-h)r$, folglich

$$[2;k]=\tfrac{1}{2}(g+h)+\tfrac{1}{2}(2g^2-2gh+2h^2+2g-h)r.$$

Nun ist $g+h=\frac{a+b-1}{2}$, $2g^2+2g=2(g+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}$, $-2gh-h=-(2g+1)h=-\frac{1}{2}ab$, $2h^2=\frac{1}{2}b^2$, also

$$[2;k]=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{a+b-1}{2}+\tfrac{1}{4}(a^2-ab+b^2-1)r=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{a+b-1}{2}+\tfrac{1}{4}(p-1)r.$$

Die drei eben gefundenen Werthe

$$[1+i;k]=-\tfrac{1}{4}(b^2+b+a-1)+\tfrac{1}{8}(p-1)i,$$
$$[1-r;k]=\tfrac{1}{3}b+\tfrac{1}{18}(p-1)\sqrt{-3},$$
$$[2;k]=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{a+b-1}{2}+\tfrac{1}{4}(p-1)r, \text{ geben}$$

$$e^{2\pi i[1+i;k]}=i^{-(b^2+b+a-1)}e^{-\frac{1}{4}\pi(p-1)},$$
$$e^{2\pi i[1-r;k]}=r^b e^{-\frac{1}{3}\pi(p-1)\sqrt{3}}, \qquad e^{2\pi i[2;k]}=(-1)^{\frac{1}{2}(a+b-1)}e^{\frac{1}{2}\pi(p-1)ri}.$$

Setzt man wirklich nach und nach die drei so eben betrachteten Werthe von l in die Gleichung (2.), so erhält man

(3.) $$\frac{k}{\psi(k)}=i^{b^2+b+a-1}e^{\frac{1}{4}\pi(p-1)}\left\{\frac{1+i}{\psi(1+i)}\right\}^{p-1}\cdot e^{2\pi i[k;1+i]}, \text{ wenn } \beta=i, \text{ und}$$

(4.) $$\frac{k}{\psi(k)}=(-1)^{\frac{a+b-1}{2}}r^{-b}e^{(-\frac{1}{2}\pi ri-\frac{1}{3}\pi\sqrt{3})(p-1)}\left\{\frac{2\psi(1-r)}{(1-r)\psi(2)}\right\}^{p-1}e^{2\pi i\{[k;2]-[k;1-r]\}},$$

wenn $\beta=r$. Wird dieser Werth von $\frac{k}{\psi(k)}=\frac{k}{P\varphi\left(\frac{x'}{k}\right)}$ in (1.) substituirt, und setzt man, um die Formeln vereinigen zu können, $\varrho=i^{b^2+b+a-1}$, wenn $\beta=i$, $k=a+bi$ ist, und $\varrho=(-1)^{\frac{a+b-1}{2}}r^{-b}$, wenn $\beta=r$, $k=a+br$ ist, und schreibt endlich in (1.) tx statt x und tz statt z, so erhält man eine Formel von folgender Gestalt:

(*E.*) $$F(kx)=\varrho c^{p-1}e^{\mathfrak{w}t^2}\cdot P_z F\left(x+\frac{z}{k}\right)=\varrho c^{p-1}e^{\mathfrak{w}t^2}F(x)P_{z'}F\left(x+\frac{z'}{k}\right);$$

wo $F(x)=\varphi(tx)$, c eine rein numerische Constante, welche durch (3.) und (4.) und $\mathfrak{w}$ ein von t unabhängiger Werth ist, der durch (3.), (4.) und (1.) vollständig bestimmt ist, während die den beiden Werthen $\beta=i$ und $\beta=r$ entsprechenden Werthe der complexen Einheit ϱ so eben hingeschrieben worden sind.

Die beiden nachstehenden Formeln, welche als specielle Fälle in dem Vorhergehenden enthalten sind, müssen noch, wegen ihrer besondern Wichtigkeit für die Anwendung des folgenden Paragraphen, ausdrücklich hervorgehoben werden. Setzt man in die Formel (1.) für k eine complexe Einheit,

welche ich durch $\mathfrak{e}$ bezeichne, so dafs $\mathfrak{e} = \pm 1, \pm i$, wenn $\beta = i$, $\mathfrak{e} = \pm 1, \pm r, \pm r^2$, wenn $\beta = r$, so hat z nur den einen Werth Null, die z' sind gar nicht vorhanden, und setzt man noch $x \circ tx$, so erhält man

$$(F.) \qquad F(\mathfrak{e}x) = \mathfrak{e} \cdot e^{\mathfrak{w}t^2} F(x),$$

wo ebenfalls $\mathfrak{w}$ von t unabhängig ist, nämlich $\mathfrak{w} = -\pi i \mathfrak{C}(\mathfrak{e}) \cdot \mathfrak{e} x^2$, welches sich nach den verschiedenen Werthen von $\mathfrak{e}$ entweder auf 0 oder auf $\pm \pi i \cdot \mathfrak{e} x^2$ reducirt. Die letzte Formel, welche wir aufzustellen haben, ist die oben benutzte, welche mit der Formel (XI.) in §. 4. zusammenfällt und die uneigentliche Periodicität der Function φ ausdrückt. Sie wird, wenn man t *gerade* annimmt, für die Function F:

$$(G.) \qquad F(x + k) = e^{\mathfrak{w}t^2} F(x);$$

wo k irgend eine ganze complexe Zahl vorstellt; $\mathfrak{w}$ hangt von x und von k ab, aber nicht von t. Wenn also x und y irgend zwei Werthe sind, welche sich um eine ganze complexe Zahl von einander unterscheiden, so ist

$$(G'.) \qquad F(x) = e^{\mathfrak{w}t^2} F(y).$$

Die Formeln ($G.$) und ($G'.$) gelten aber nur in dieser Einfachheit, wenn t eine *gerade* Zahl ist.

7.

Arithmetische Anwendungen.

Diese Anwendungen beruhen, aufser auf den Betrachtungen des vorhergehenden Paragraphen, auf dem folgenden sehr einfachen Lemma.

„Wenn eine Gleichung von der Form $A = Be^{\mathfrak{w}t^2}$, in welcher A, B „und $\mathfrak{w}$ von t unabhängig sind, für alle *ganzen reellen* Werthe von t Statt „findet, welche durch eine gewisse Reihe von ganzen Zahlen theilbar und durch „eine gewisse andere Reihe von Zahlen, die zu 2 und zu 3 relative Prim„zahlen sind, nicht theilbar sind, so ist nothwendig $A = B$ und $\mathfrak{w}t^2 = 0$ oder „wenigstens ein Vielfaches von $2\pi i$; und wenn in der zweiten Reihe von „Zahlen auch die 3 befindlich ist, so kann doch der Quotient von A durch B „nur eine dritte Wurzel der Einheit sein."

Denn da, wegen $e^{\mathfrak{w}t^2} = \frac{A}{B} = C$, $e^{\mathfrak{w}t^2}$ von t unabhängig ist, und da die Beschränkungen, welchen die Werthe von t unterworfen sind, nicht hindern, t gröfser als jede gegebene Gröfse anzunehmen, so mufs zunächst der reelle Theil von $\mathfrak{w}$ verschwinden, weil sonst $e^{\mathfrak{w}t^2}$ gröfser oder kleiner als jede Gröfse, z. B. $\frac{A}{B}$, gemacht werden könnte. Die Bedingungen, welchen t unterworfen

ist, reduciren sich darauf, dafs t durch eine gegebene ganze Zahl g theilbar und durch eine Reihe von ungeraden Primzahlen p, p', ... nicht theilbar sein soll; die erste Bedingung reducirt die vorgelegte Gleichung auf eine andere von ähnlicher Form, in welcher $\mathfrak{w} \circ g^2\mathfrak{w}$ und t alle ganzen Werthe haben kann, die weder durch p noch durch p' etc. theilbar sind. Da diese Primzahlen nach der Voraussetzung sämmtlich ungerade sind, so darf man $t=1$ und $t=2$ setzen und erhält $e^{\mathfrak{w}}=C$, $e^{4\mathfrak{w}}=C$, also $e^{3\mathfrak{w}}=1$; folglich ist $\mathfrak{w}$ von der Form $\frac{2n\pi i}{3}$, wo n eine ganze Zahl ist. Wenn nun die 3 in der Reihe der Primzahlen p, p', ... vorkommt, so ist doch immer C einer dritten Wurzel der Einheit gleich, nämlich $C=e^{\mathfrak{w}}=e^{\frac{2n\pi i}{3}}$, $A=e^{\frac{2n\pi i}{3}}B$: kommt die 3 in jener Reihe ***nicht*** vor, so kann man der ganzen Zahl t einen durch 3 theilbaren Werth geben und erhält, wenn man z. B. $t=3$ setzt, $C=e^{9\mathfrak{w}}=e^{6n\pi i}=1$, folglich $A=B$.

Um die Theorie der Reste der vierten und der sechsten Potenzen in eine gemeinschaftliche Betrachtung zu vereinigen, sei $\vartheta=4$ oder $\vartheta=6$, je nachdem $\beta=i$ oder $\beta=r=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ist; und nach diesen beiden Fällen sei ε entweder eine vierte oder sechste Wurzel der Einheit, so dafs $\varepsilon^{\vartheta}=1$ ist; ferner sei t eine ***gerade*** ganze Zahl und

$$F(x)=\prod_{n=-\infty}^{n=\infty}\left\{\prod_{m=-\infty}^{m=\infty}\left(1-\frac{tx}{m+n\beta}\right)\right\},$$

wo in dem unendlichen Doppelproducte tx statt des sinnlosen Factors $1-\frac{tx}{0}$ zu setzen ist. Übrigens werden die in der letzten Hälfte des vorigen Paragraphen eingeführten Bezeichnungen beibehalten.

Es seien k und l zwei verschiedene complexe Primzahlen, p und q ihre Normen, $\varkappa$ ein vollständiges, $\varkappa'$ ein reducirtes Restensystem (mod. k), λ ein vollständiges, λ' ein reducirtes Restensystem (mod. l); k und l werden so angenommen, dafs $p-1$ und $q-1$ durch ϑ theilbar sind, d. h. für $\beta=i$ wird die complexe Primzahl $1+i$ und für $\beta=r$ werden die beiden complexen Primzahlen $1-r$ und 2 ausgeschlossen; man setze $p-1=\vartheta p'$, $q-1=\vartheta q'$. Die beiden reducirten Restensysteme $\varkappa'$, λ' seien in ihre ϑ associirten Theile eingetheilt und es sei $\varkappa'=\varepsilon\sigma$, $\lambda'=\varepsilon\tau$, wo ε seine sechs Werthe durchläuft, während davon unabhängig σ seine p' und τ seine q' Werthe erhält; σ ist daher das allgemeine Glied einer Reihe von $p'=\frac{p-1}{\vartheta}$ Zahlen, welche nicht

blofs untereinander sämmtlich incongruent sind mod. k, sondern welche auch diese Eigenschaft der Incongruenz beibehalten, wenn man statt jeder irgend eine ihrer associirten Zahlen setzt; dasselbe gilt von den q' Zahlen τ in Bezug auf mod. l. Die Vielfachen $l\sigma$ finden ihre Reste (mod. k) unter den $\varkappa'$; wenn diese Reste also auch nicht immer unter den σ vorkommen, so kommen sie sicher stets in einer der ϑ Reihen vor, deren Inbegriff durch $\mathfrak{e}\sigma$ bezeichnet wird, und man kann daher immer

$$(1.) \qquad l\sigma \equiv \mathfrak{e}\sigma_1 \pmod{k}$$

setzen, wo jedem σ ein ganz bestimmtes σ_1 aus der Reihe σ und eine ebenfalls ganz bestimmte complexe Einheit $\mathfrak{e}$ entspricht. Da vermöge der Congruenz (1.) die beiden Quotienten $\frac{l\sigma}{k}$ und $\frac{\mathfrak{e}\sigma_1}{k}$ sich nur um eine complexe ganze Zahl unterscheiden, so hat man nach ($G'.$) des vorigen Paragraphen $F(l\sigma:k)$ *) $= e^{\mathfrak{w}t^2} F(\mathfrak{e}\sigma_1:k)$, und ferner nach ($F.$) $F(\mathfrak{e}\sigma_1:k) = \mathfrak{e}e^{\mathfrak{w}t^2} F(\sigma_1:k)$, folglich

$$(2.) \qquad F(l\sigma:k) = \mathfrak{e}\cdot e^{\mathfrak{w}t^2}\cdot F(\sigma_1:k).$$

Bildet man alle p' Congruenzen von der Form (1.), indem man dem σ alle seine Werthe und σ_1 und $\mathfrak{e}$ jedesmal die zugehörigen Werthe giebt, und multiplicirt alle diese Congruenzen, indem man Acht hat, dafs alle σ_1 mit allen σ, wenn auch in anderer Ordnung, zusammenfallen, so ergiebt sich:

$$l^{p'} P(\sigma) \equiv P(\mathfrak{e})P(\sigma) \pmod{k},$$

und da $P(\sigma)$ nicht durch die Primzahl k theilbar ist,

$$(3.) \qquad l^{p'} \equiv P(\mathfrak{e}) \pmod{k}.$$

Ebenso erhält man durch Multiplication aller Gleichungen von der Form (2.), wobei ebenfalls zu bemerken, dafs alle σ_1 mit allen σ zusammenfallen,

$$P_\sigma F(l\sigma:k) = P(\mathfrak{e})e^{\mathfrak{w}t^2} P_\sigma F(\sigma:k), \quad \text{also}$$

$$(4.) \qquad P(\mathfrak{e}) = e^{\mathfrak{w}t^2} P_\sigma \left\{\frac{F(l\sigma:k)}{F(\sigma:k)}\right\}.$$

In jeder dieser Gleichungen hat $\mathfrak{w}$ einen andern, aber stets einen von t unabhängigen Werth. Nach ($E.$), im vorigen Paragraphen, ist nun allgemein $\frac{F(lx)}{F(x)} = \varrho' c^{q-1} e^{\mathfrak{w}t^2} P_{\lambda'} F\left(x + \frac{\lambda'}{l}\right)$, wenn ϱ' ebenso von l abhangt, wie dort ϱ von k. Hiernach erhält man aus (4.), wenn man dem x nach und nach alle Werthe von der Form $\frac{\sigma}{k}$ giebt:

$$P(\mathfrak{e}) = e^{\mathfrak{w}t^2}\cdot \varrho'^{p'} c^{\vartheta p' q'} P_\sigma P_{\lambda'} F\left(\frac{\sigma}{k} + \frac{\lambda'}{l}\right).$$

*) Das Divisionszeichen : setze ich zuweilen statt des Bruchstriches, um den Druck zu erleichtern.

Das Doppelproduct zur Rechten zerfällt in das Product von ϑ Partialproducten, welche sich auf σ und τ beziehen, wenn man die Werthe von λ' in die ϑ associirten Gruppen zerfället, deren allgemeine Glieder entweder durch τ, $i\tau$, $-\tau$, $-i\tau$, oder durch τ, $-r\tau$, $r^2\tau$, $-\tau$, $r\tau$, $-r^2\tau$, also durch $\mathfrak{e}\tau$ ausgedrückt werden. Hiernach wird diejenige complexe Einheit, welcher die Potenz $l^{p'}$ (mod. k) congruent ist, durch die Formel

$$(5.)\qquad e^{\mathfrak{w}t^2}\varrho'^{p'}c^{\vartheta p'q'}\boldsymbol{P}\left\{\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{P}_\tau\boldsymbol{F}\left(\frac{\sigma}{k}+\frac{\mathfrak{e}\tau}{l}\right)\right\}$$

bestimmt, in welcher sich die eine Multiplication auf alle σ, die zweite auf alle τ, und die dritte auf alle ϑ Werthe der complexen Einheit $\mathfrak{e}$ bezieht. Man hat bis jetzt keine besondere Benennung zur Bezeichnung derjenigen complexen Einheit eingeführt, welcher die Potenz $l^{p'}$ (mod. k) congruent ist; ***Gaufs*** nennt den Exponenten dieser Einheit den ***Character*** von l in Bezug auf den Modul k; ich will hier, der Kürze wegen, jene Einheit selbst, welche durch (5.) ausgedrückt ist, den ***Character von l zu k*** nennen.

Wendet man genau dieselben Betrachtungen auf den Modul l an, so erhält man den Character von k zu l durch die analoge Formel

$$e^{\mathfrak{w}t^2}\varrho^{q'}c^{\vartheta p'q'}\boldsymbol{P}\left\{\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{P}_\tau\boldsymbol{F}\left(\frac{\mathfrak{e}\sigma}{k}+\frac{\tau}{l}\right)\right\}$$

ausgedrückt, welche aus (5.) hervorgeht, wenn man k mit l, also ϱ' mit ϱ, p mit q, p' mit q', σ mit τ vertauscht; die rein numerische Constante c bleibt natürlich dieselbe. Man kann diesem Ausdrucke eine etwas verschiedene Form geben, in welcher er besser mit (5.) vergleichbar wird. Da nämlich $\frac{1}{\mathfrak{e}}$ genau dieselben Werthe wie $\mathfrak{e}$, nur in anderer Reihenfolge durchläuft, so kann man auch

$$(6.)\qquad e^{\mathfrak{w}t^2}\varrho^{q'}c^{\vartheta p'q'}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{P}_\tau\boldsymbol{F}\left(\frac{\sigma}{\mathfrak{e}k}+\frac{\tau}{l}\right)$$

schreiben, als den Ausdruck des Characters von k zu l. Es ist nun sehr leicht, die beiden Ausdrücke (5.) und (6.) mit einander zu vergleichen. Zunächst haben beide den Factor $c^{\vartheta p'q'}$ gemeinschaftlich; ferner lassen sich die allgemeinen Glieder der dreifachen Producte durch die Formel

$$\boldsymbol{F}\left(\frac{\sigma}{k}+\frac{\mathfrak{e}\tau}{l}\right)=\mathfrak{e}e^{\mathfrak{w}t^2}\boldsymbol{F}\left(\frac{\sigma}{\mathfrak{e}k}+\frac{\tau}{l}\right),$$

welche eine neue Anwendung von ($\boldsymbol{F}$.) §. 6. ist, auf einander zurückführen; für jeden stehenden Werth von $\mathfrak{e}$ enthalten die dreifachen Producte $p'q'$ Factoren, nämlich eben so viele, als es Combinationen σ, τ giebt, und da das

Product aller ϑ Werthe von ϵ gleich -1 ist, indem das Product der vier Einheiten ± 1, $\pm i$, so wie auch das Product der sechs Einheiten ± 1, $\pm r$, $\pm r^2$ wirklich -1 beträgt, so stehen die beiden dreifachen Producte in (5.) und in (6.) in dem Verhältnifs wie $1:(-1)^{p'q'}e^{\mathfrak{w}t^2}$, und die Ausdrücke (5.) und (6.) stehen selbst in dem Verhältnifs

$$(5.):(6.) = \varrho^{\prime p'}:\varrho^{q'}(-1)^{p'q'}e^{\mathfrak{w}t^2}.$$

Diese Schlüsse beruhen wesentlich auf der Voraussetzung, dafs t zu p und zu q relative Primzahl sei, denn darauf beruht die Anwendbarkeit der Formel (*E.*) §. 6., welche sowohl für den Multiplicator l als für den Multiplicator k benutzt wurde; auch mufs, wie schon erinnert wurde, t gerade sein, weil nur unter dieser Voraussetzung die Formel (*G.*) gültig ist. Andere Beschränkungen finden aber nicht für die ganze Zahl t Statt.

Wendet man daher das am Anfange dieses Paragraphen bewiesene Lemma an, indem man den Character von l zu k (5.) durch $\left(\frac{l}{k}\right)$ und den Character von k zu l (6.) durch $\left(\frac{k}{l}\right)$ bezeichnet, so erhält man aus der eben gefundenen Gleichung

$$\left(\frac{l}{k}\right):\left(\frac{k}{l}\right) = \varrho^{\prime p'}:\varrho^{q'}(-1)^{p'q'}e^{\mathfrak{w}t^2}, \quad \text{oder} \quad \varrho^{\prime p'}\left(\frac{k}{l}\right) = \varrho^{q'}(-1)^{p'q'}\left(\frac{l}{k}\right)e^{\mathfrak{w}t^2},$$

nach dem Lemma die folgende:

$$(\odot.) \qquad \varrho^{\prime p'}\left(\frac{k}{l}\right) = \varrho^{q'}(-1)^{p'q'}\left(\frac{l}{k}\right),$$

wenn nur weder p noch q durch 3 theilbar sind. Der Fall, wenn eine der beiden Normen p, q durch 3 theilbar ist, kann nur Statt finden, wenn es sich um complexe Zahlen aus vierten Wurzeln der Einheit handelt; wenn nämlich eine der beiden Primzahlen k und l der 3 und also ihre Norm der 9 gleich ist; dann brauchen nach dem Lemma nicht nothwendig die beiden Seiten von (⊙.) in dem Verhältnifs 1:1 zu stehen, jedoch müssen sie immer in dem Verhältnifs wie 1 zu einer dritten Wurzel der Einheit stehen. Da jedoch in diesem speciellem Falle rechts und links in (⊙.) nur vierte und keine dritten Wurzeln der Einheit befindlich sind, weil $\vartheta = 4$ ist, und da eine vierte Wurzel der Einheit nie einer dritten Wurzel der Einheit gleich sein kann, aufser wenn beide $= 1$ sind, so gilt auch in diesem Falle die Gleichung (⊙.). Diese Gleichung enthält die Reciprocitätsgesetze für die Reste der vierten und sechsten Potenzen. Durch die Einführung der unbestimmten ganzen Zahl t war es möglich, diejenigen Functionen, welche eine eigentliche und eine

uneigentliche Periode besitzen, bei dem Beweise ganz so zu benutzen, als wären sie doppelt periodische Functionen; immer bildet jedoch die Grundlage des Beweises die Eintheilung der Restensysteme in ihre associirten Theile, welche wir ***Gaufs*** zu verdanken haben. — Es liefsen sich hier noch mehrere Betrachtungen anknüpfen, namentlich über das besondere Verhalten der Ausdrücke $\mathfrak{w}$; auf welche ich vielleicht bei einer andern Gelegenheit zurückkomme.

Der Werth von ϱ, welcher allein von k abhangt, so wie der entsprechende von ϱ', welcher genau eben so von l abhangt, in der Formel des Reciprocitätsgesetzes, ist im vorigen Paragraphen für alle nicht durch $1+i$ theilbaren k bestimmt worden, wenn es sich um complexe Zahlen aus 4ten Wurzeln der Einheit handelt *); für die aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten und weder durch $1-r$ noch durch 2 theilbaren k aber nur in dem Falle, wenn $k \equiv 1 \pmod{2-2r}$ ist **). Da man jedoch für jedes k und jedes l, welche zu $2-2r$ relative Primzahlen sind, immer complexe Einheiten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$ finden kann, so dafs $\mathfrak{e}k \equiv 1$, $\mathfrak{e}'l \equiv 1 \pmod{2-2r}$ ist, so gilt die Formel $(\odot.)$ zunächst für $\left(\frac{\mathfrak{e}k}{\mathfrak{e}'l}\right)$ und $\left(\frac{\mathfrak{e}'l}{\mathfrak{e}k}\right)$, und da $\left(\frac{\mathfrak{e}k}{\mathfrak{e}'l}\right)=\left(\frac{\mathfrak{e}}{l}\right)\left(\frac{k}{l}\right)=\mathfrak{e}^{q'}\left(\frac{k}{l}\right)$, $\left(\frac{\mathfrak{e}'l}{\mathfrak{e}k}\right)=\left(\frac{\mathfrak{e}'}{k}\right)\left(\frac{l}{k}\right)$ $=\mathfrak{e}'^{p'}\left(\frac{l}{k}\right)$ ist, so erhält man hieraus auch unmittelbar das Reciprocitätsgesetz zwischen $\left(\frac{k}{l}\right)$ und $\left(\frac{l}{k}\right)$, wo k und l irgend zwei, weder durch $1-r$ noch durch 2 theilbare complexe Primzahlen aus dritten Wurzeln der Einheit sind. Für die aus vierten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Zahlen hat schon ***Gaufs*** in seiner „Theorie der biquadratischen Reste" unter je vier associirten Primzahlen immer eine solche als ***primäre*** characterisirt, dafs zwischen ***primären*** Primzahlen das Reciprocitätsgesetz in seiner einfachsten Gestalt

$$\left(\frac{l}{k}\right) = (-1)^{p'q'}\left(\frac{k}{l}\right)$$

auftritt. Es mufs nämlich dann $\varrho = 1$, also $b^2+a+b-1 \equiv 0 \pmod 4$ sein; und dies geschieht, wenn erstlich b gerade ist, wodurch $b^2 \equiv 0 \pmod 4$ wird, und wenn zweitens $a+b \equiv 1 \pmod 4$ ist; eine andere Annahme ist nicht möglich, da a und b weder beide gerade, noch beide ungerade sein dürfen. Um denselben Zweck, nämlich die gröfste Vereinfachung des Reciprocitätsgesetzes in der so eben hingeschriebenen Form, auch für die aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Primzahlen und für die sechsten Potenz-

*) Nämlich $\varrho = i^{b^2+a+b-1}$, wenn $k = a+bi$ ist.

**) Nämlich $\varrho = (-1)^{\frac{1}{2}(a+b-1)}r^{-b}$, wenn $k = a+br$.

reste zu erreichen, mufs man in jeder Gruppe von sechs associirten complexen Primzahlen immer diejenige, stets existirende und nur einmal vorkommende, als *primäre* bezeichnen, welche den folgenden Bedingungen genügt: damit $a+br$ *primär* sei, mufs erstlich $b \equiv 0 \pmod 3$ sein und zweitens

entweder $a+b \equiv 1 \pmod 4$, wenn a ungerade, b gerade,

oder $\quad b \equiv 1 \pmod 4$, wenn a gerade, b ungerade ist,

oder $\quad a \equiv 3 \pmod 4$, wenn a und b beide ungerade sind.

Wenn k und l in diesem Sinne primäre Primzahlen sind, so findet das Reciprocitätsgesetz für die sechsten Potenzreste zwischen $\left(\frac{k}{l}\right)$ und $\left(\frac{l}{k}\right)$ in der That in der vorhin aufgestellten Einfachheit Statt. Ich verweile nicht bei dem Raisonnement, welches zu diesem Resultate führt, da dasselbe nicht die mindesten Schwierigkeiten hat, sobald man sich vermöge der weiter oben gemachten Bemerkung die verschiedenen Formen vor Augen stellt, welche das Reciprocitätsgesetz nach den verschiedenen Resten von k und l $(\mathrm{mod.}\ 2-2r)$ darbieten kann. Da nichts hindert, die so eben für primäre Primzahlen aufgestellten Criterien auch für zusammengesetzte Zahlen gelten zu lassen, so entsteht nur noch die Frage, ob das Product zweier primären Zahlen wiederum eine primäre Zahl hervorbringe; und diese Frage beantwortet sich bejahend, wenn man die kleine damit verbundene Rechnung ausführt und jeden der neun Fälle, welche das Product zweier primären Zahlen darbieten kann, einer besonderen Prüfung unterwirft. Hiernach kann man sofort das Reciprocitätsgesetz auf primäre zusammengesetzte Zahlen ausdehnen, wenn man unter $\left(\frac{k}{l}\right)$ (wenn l das Product der Primzahlen $l_1.l_2.l_3\ldots$ ist) das Product

$$\left(\frac{k}{l_1}\right)\left(\frac{k}{l_2}\right)\left(\frac{k}{l_3}\right)\cdots = \left(\frac{k}{l}\right)$$

versteht, sei es, dafs es sich um die biquadratischen, sei es, dafs es sich um die Reste der sechsten Potenzen handelt. Für die ersteren müssen k und l zu $1+i$, für die letzteren zu $2-2r$ relative Primzahlen sein; diese letztere Bedingung ist aber schon vorausgesetzt, wenn man k und l primär annimmt. Da nun offenbar $\frac{N(l_1)-1}{\vartheta}+\frac{N(l_2)-1}{\vartheta} \equiv \frac{N(l_1 l_2)-1}{\vartheta}$ *) $(\mathrm{mod.}\ \vartheta)$, also auch $(\mathrm{mod.}\ 2)$ ist, so gilt die Formel

$$\left(\frac{l}{k}\right) = (-1)^{p'q'}\left(\frac{k}{l}\right),$$

---

*) Es sei $p = N(k) = \vartheta p'+1$, $q = N(l) = \vartheta q'+1$, so ist $pq = N(kl) = \vartheta^2 p'q'+\vartheta(p'+q')+1$, also $\frac{N(kl)-1}{\vartheta} = \vartheta p'q'+p'+q' \equiv p'+q' \pmod{\vartheta}$.

wenn k und l irgend zwei primäre Zahlen, p und q deren Normen sind und $p = \vartheta p' + 1$, $q = \vartheta q' + 1$ ist; und da die nicht primären Zahlen, welche zu $1+i$ resp. $2-2r$ relative Primzahlen sind, aus den primären durch Multiplication mit complexen Einheiten hervorgehen, so erhält man auch das Reciprocitätsgesetz für die nicht primären Zahlen aus dem für die primären, obwohl jenes nicht dieselbe Einfachheit hat, wie dieses.

Zu einer vollständigen Theorie der Reste der vierten und sechsten Potenzen fehlen nur noch die Sätze, welche die Criterien des biquadratischen Characters der Zahl $1+i$ und die Criterien des Characters der beiden Zahlen $1-r$ und 2 in Bezug auf sechste Potenzreste enthalten. Diese Sätze gehen als eine sehr einfache Folgerung aus dem verallgemeinerten Reciprocitätssatze hervor, welcher lehrt, wie man $\left(\frac{l}{k}\right)$ in $\left(\frac{k}{l}\right)$ ausdrücken kann, wenn k und l irgend zwei nicht durch $1+i$ resp. nicht durch $1-r$ oder 2 theilbare Zahlen sind. Um die drei in Rede stehenden Sätze unter eine gemeinschaftliche Betrachtung zu vereinigen, will ich durch η irgend eine der drei Zahlen $1+i$, $1-r$, 2, und durch ζ eine der beiden Zahlen $1+i$, $2-2r$ bezeichnen, und zwar in dem Sinne, dafs $\eta = 1+i$, $\zeta = 1+i$ ist, wenn alle vorkommenden Zahlen aus vierten Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind und $\vartheta = 4$ ist, und dafs $\eta = 1-r$ oder $\eta = 2$ und $\zeta = 2-2r$ ist, wenn alle vorkommenden Zahlen aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind und $\vartheta = 6$ ist. Es sei k irgend eine complexe Zahl, welche zu ζ relative Primzahl ist, welche also einer complexen Einheit congruent ist (mod. ζ): dann kann man in allen Fällen eine complexe Einheit $\mathfrak{e}$ finden, von der Art, dafs $k+\mathfrak{e}$ durch η theilbar, aber der Quotient $\frac{k+\mathfrak{e}}{\eta}$ zu ζ relative Primzahl ist. Es sei $k+\mathfrak{e} = l\eta$, $N(k) = p$, $N(l) = q$, so ist $k \equiv -\mathfrak{e} \pmod{l}$, also $\left(\frac{k}{l}\right) = \left(\frac{-\mathfrak{e}}{l}\right) = (-\mathfrak{e})^{q'}$ und $l\eta \equiv \mathfrak{e} \pmod{k}$, also $\left(\frac{l}{k}\right)\left(\frac{\eta}{k}\right) = \left(\frac{\mathfrak{e}}{k}\right) = \mathfrak{e}^{p'}$. Da nun l zu ζ relative Primzahl ist, so kann man nach dem verallgemeinerten Reciprocitätssatze $\left(\frac{l}{k}\right)$ in $\left(\frac{k}{l}\right)$ ausdrücken. Es sei $\left(\frac{l}{k}\right) = \varepsilon\left(\frac{k}{l}\right)$, wo ε eine complexe Einheit ist, deren Exponent auf sehr einfache Weise von den Elementen in k und l abhangt; und da die Elemente von l wegen $l = \frac{k+\mathfrak{e}}{\eta}$ unmittelbar in die von k ausgedrückt werden können, so ist jener Exponent eine sehr einfache Function der Elemente von k. Da nun schon $\left(\frac{k}{l}\right) = (-\mathfrak{e})^{q'}$ gefunden ist, so hat man $\left(\frac{l}{k}\right) = \varepsilon(-\mathfrak{e})^{q'}$ und $\varepsilon \cdot (-\mathfrak{e})^{q'}\left(\frac{\eta}{k}\right) = \mathfrak{e}^{p'}$, durch welche

Formel $\left(\frac{\eta}{k}\right)$ vollständig durch die Elemente von k bestimmt ist. Es hat keine Schwierigkeit, wenn man die verschiedenen Fälle von einander trennt und die kleinen Rechnungen ausführt, welche sie darbieten, um die aus dieser Betrachtung hervorgehenden Theoreme, als Ergänzungen des Reciprocitätssatzes, vollständig aufzustellen; was ich dem Leser überlassen darf. Übrigens kann man noch den quadratischen Character der Zahl $1-r$ und den cubischen Character der Zahl 2 aus den im Anfange dieses Paragraphen angewandten Principien ableiten.

Auf diese Weise hätten wir demnach, als ein Corollar zu der Theorie der in dieser Abhandlung betrachteten unendlichen Doppelproducte, eine ausführliche Theorie der Reste der vierten und sechsten Potenzen aufgestellt: eine Theorie, die bis auf einige leichte, rein mechanische Operationen, welche noch auszuführen wären, aber keine principielle Schwierigkeit darbieten, der Vollständigkeit nach nichts zu wünschen übrig läfst. Es kann keinem aufmerksamen Leser entgehen, dafs die Theorie der quadratischen Reste für reelle Zahlen genau in derselben Weise, nur mit einem weit geringeren Aufwande von Betrachtungen aus der Theorie der einfachen Producte von der Form

$$\prod_{m=-\infty}^{m=\infty}\left(1-\frac{x}{m+\gamma}\right)$$

abgeleitet werden kann; und da diese Darstellungsweise, welche sehr instructiv ist und auf das Vorhergehende ein neues Licht wirft, nur wenig Raum einnimmt, so will ich sie der Vollständigkeit wegen hierher setzen.

Das eben hingeschriebene Doppelproduct werde als Grenze (für $n=\infty$) desjenigen betrachtet, in welchem sich m von $-n$ bis $+n$ erstreckt und durch $f(x,\gamma)$ bezeichnet. Da bei der Substitution $m \circlearrowright m+1$ ein Factor im Unendlichen hinzugesetzt, ein anderer weggelassen wird, und diese beiden Factoren $=1$ sind, so ist $f(x,\gamma+1)=f(x,\gamma)$, und allgemein für jede ganze Zahl h ist hiernach

$$(1.)\qquad f(x,\gamma+h)=f(x,\gamma).$$

Da ferner, wenn k irgend eine ganze Zahl ist und z ein vollständiges Restensystem mod. k repräsentirt, bei der Substitution $m \circlearrowright km+z$ die hinzutretenden, so wie die weggelassenen Factoren im Unendlichen sämmtlich $=1$ werden, und

da aus dieser Substitution $x \backsim \frac{x}{k}$, $\gamma \backsim \frac{\gamma+\varkappa}{k}$ folgt, so ist

$$(2.) \quad f(x,\gamma) = \mathrm{S}_\varkappa f\left(\frac{x}{k}, \frac{\gamma+\varkappa}{k}\right);$$

endlich ist offenbar

$$(3.) \quad f(x,\gamma) = f(-x,-\gamma),$$

wie sich zeigt, wenn man $m \backsim -m$ setzt. Das allgemeine Glied des unendlichen Products läfst sich, wenn m von 0 verschieden ist, so schreiben:

$$\frac{m+\gamma-x}{m+\gamma} = \left(1-\frac{x-\gamma}{m}\right):\left(1-\frac{-\gamma}{m}\right),$$

und für $m=0$ so: $(x-\gamma):(-\gamma)$. Setzt man daher $\prod_{m=-\varkappa}^{m=\varkappa}\left(1-\frac{x}{m}\right)$, wo x statt des sinnlosen Factors $1-\frac{x}{0}$ geschrieben wird, $=\varphi(x)$, so erhält man

$$(4.) \quad f(x,\gamma) = \frac{\varphi(x-\gamma)}{\varphi(-\gamma)} = \frac{\varphi(\gamma-x)}{\varphi(\gamma)}.$$

Nach der Definition von $\varphi(x)$ ist

$$(5.) \quad \varphi(x) = [-\gamma f(x,\gamma)]_{\gamma=0}.$$

Stellt man die $M(k)$ Zahlen z aus der Null und $M(k)-1$ andern Zahlen z' zusammen, so erhält man hiernach aus (2.), wenn man diese Gleichung auf beiden Seiten mit $-\gamma = k\cdot\frac{-\gamma}{k}$ multiplicirt und $\gamma=0$ setzt,

$$(6.) \quad \varphi(x) = k\mathrm{P}\varphi\left(\frac{x+z}{k}\right):\mathrm{P}\varphi\left(\frac{z'}{k}\right).$$

Aus (1. und 4.) folgt $\frac{\varphi(\gamma-x+h)}{\varphi(\gamma+h)} = \frac{\varphi(\gamma-x)}{\varphi(\gamma)}$, und setzt man $\gamma - x \backsim x$, so wird hiernach $\varphi(x+h) = C\varphi(x)$, wo C von x unabhängig ist. Aus (3.) folgt, wenn man auf beiden Seiten mit $-\gamma$ multiplicirt und dann $\gamma=0$ setzt, wobei (5.) in Anwendung kommt,

$$(7.) \quad \varphi(-x) = -\varphi(x);$$

und setzt man demnach in $\varphi(x+1) = C\varphi(x)$, $x=-\frac{1}{2}$, so ergiebt sich $\varphi(\frac{1}{2}) = C\varphi(-\frac{1}{2}) = -C\varphi(\frac{1}{2})$, $C=-1$, folglich $\varphi(x+1) = -\varphi(x)$, und deshalb allgemein

$$(8.) \quad \varphi(x+h) = (-1)^h\varphi(x).$$

Aus (6.) erhält man für den speciellen Fall $k=2$,

$$(9.) \quad \varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right):\varphi(\tfrac{1}{2}).$$

Der Gleichung (6.) kann man eine bequemere Form geben, wenn man $x \sigma kx$ setzt, und die Constante $k : \boldsymbol{P}\varphi\left(\frac{z'}{k}\right)$ durch c bezeichnet, nämlich

$$(6.) \qquad \varphi(kx) = c\boldsymbol{P}\varphi\left(x+\frac{z}{k}\right);$$

für $k=2$ wird demnach (9.)

$$\varphi(2x) = 2\varphi(x)\varphi(x+\tfrac{1}{2}) : \varphi(\tfrac{1}{2}).$$

Um die Constante c zu bestimmen, verfahre man wie folgt. Man mache in (6.) nach und nach die drei Substitutionen $x \sigma x$, $x \sigma x+\frac{1}{2}$ und $x \sigma 2x$; dies giebt

$$\varphi(kx) = c\boldsymbol{P}\varphi\left(x+\frac{z}{k}\right), \qquad \varphi(kx+\tfrac{1}{2}k) = c\boldsymbol{P}\varphi\left(x+\frac{z}{k}+\tfrac{1}{2}\right),$$

$$\varphi(2kx) = c\boldsymbol{P}\varphi\left(2x+\frac{z}{k}\right).$$

Multiplicirt man die erste dieser drei Gleichungen mit der zweiten und bemerkt dabei, dafs nach (9.)

$$\varphi\left(x+\frac{z}{k}\right)\varphi\left(x+\frac{z}{k}+\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\varphi(\tfrac{1}{2})\varphi\left(2x+\frac{2z}{k}\right)$$

ist, so erhält man

$$\varphi(kx)\varphi(kx+\tfrac{1}{2}k) = c^2\varphi(\tfrac{1}{2})^{M(k)}\boldsymbol{P}\varphi\left(2x+\frac{2z}{k}\right) : 2^{M(k)}.$$

Es sei k ungerade und positiv; dann ist

$$\boldsymbol{M}(k) = k, \qquad \varphi(kx+\tfrac{1}{2}k) = (-1)^{\frac{k-1}{2}}\varphi(kx+\tfrac{1}{2})$$

nach (8.), während

$$\varphi(kx)\varphi(kx+\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\varphi(\tfrac{1}{2})\varphi(2kx)$$

ist, nach (9.); hiernach erhält man

$$2^{k-1}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\varphi(2kx) = c^2\varphi(\tfrac{1}{2})^{k-1}\boldsymbol{P}\varphi\left(2x+\frac{2z}{k}\right).$$

Da k ungerade ist, so hindert nichts, alle z' gerade anzunehmen; dadurch erlangt man den Vortheil, dafs die Zahlen $2z$ nicht blofs dieselben Reste wie die z (mod. k) lassen, sondern dafs auch die Vielfachen von k, um welche sich die Zahlen $2z$ von den Zahlen z unterscheiden, sämmtlich ***gerade*** sind und dafs daher nach (8.) das Product $\boldsymbol{P}\varphi\left(2x+\frac{2z}{k}\right)$ dem Producte $\boldsymbol{P}\varphi\left(2x+\frac{z}{k}\right)$ geradezu gleich wird, während es sonst und im Allgemeinen nur $= \pm\boldsymbol{P}\varphi\left(2x+\frac{z}{k}\right)$ sein würde. Hiernach ist also, wenn alle z' gerade sind,

$$2^{k-1}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\varphi(2kx) = c^2\varphi(\tfrac{1}{2})^{k-1}\boldsymbol{P}\varphi\left(2x+\frac{z}{k}\right);$$

und vergleicht man diese Formel mit der obigen $\varphi(2kx) = cP\varphi\left(2x+\frac{z}{k}\right)$, welche aus (6.) durch die Substitution $x \smile 2x$ entsprang, so erhält man

$$c = 2^{-1}(-1)^{\frac{k-1}{2}} : \varphi(\tfrac{1}{2})^{k-1} = \left\{\frac{2i}{\varphi(\frac{1}{2})}\right\}^{k-1},$$

und demnach, wenn man diesen Werth von c in (6.) substituirt:

$$(10.) \qquad \varphi(kx) = \left\{\frac{2i}{\varphi(\frac{1}{2})}\right\}^{k-1} P\varphi\left(x+\frac{z}{k}\right),$$

wo k positiv und ungerade ist und die Reste z sämmtlich als gerade Zahlen angenommen werden. Diejenigen Formeln, welche für den nachfolgenden Gebrauch dienen, sind (7., 8. und 10.); nämlich, wenn man sie zusammenstellt:

$$(I.) \qquad \varphi(x+2h) = \varphi(x),$$

$$(II.) \qquad \varphi((-1)^h x) = (-1)^h \varphi(x),$$

wenn h irgend eine reelle ganze Zahl ist, und

$$(III.) \qquad \varphi(kx) = a^{k-1} P_z \varphi\left(x+\frac{z}{k}\right), \qquad \frac{\varphi(kx)}{\varphi(x)} = a^{k-1} P_{z'} \varphi\left(x+\frac{z'}{k}\right),$$

wenn k positiv und ungerade ist, während alle z, welche ein vollständiges Restensystem mod. k bilden, gerade sind, und wo a eine rein numerische Constante vorstellt, nämlich $a = \frac{2i}{\varphi(\frac{1}{2})}$.

Nun seien k und l irgend zwei positive ungerade Primzahlen, σ sei das allgemeine Glied eines *halben* Restensystems mod. k, so dafs die Zahlen σ mit den Zahlen $-\sigma$ und der Null zusammengenommen ein vollständiges Restensystem (mod. k) bilden; τ sei das allgemeine Glied eines halben Restensystems mod. l; alle σ und alle τ werden gerade angenommen. Für jedes σ befindet sich der Rest von $l\sigma$ (mod. k) entweder unter den σ, oder unter den $-\sigma$; es sei daher $l\sigma \equiv (-1)^h \sigma_1$ (mod. k) wo alle σ_1 alle σ erschöpfen. Da vermöge dieser Congruenz die Differenz $\frac{l\sigma}{k} - \frac{(-1)^h \sigma_1}{k}$ einer ganzen Zahl, und zwar einer geraden ganzen Zahl gleich ist, weil alle σ gerade angenommen worden sind, so hat man nach (I.) $\varphi\left(\frac{l\sigma}{k}\right) = \varphi\left(\frac{(-1)^h \sigma_1}{k}\right)$, welches nach (II.) $= (-1)^h \varphi\left(\frac{\sigma_1}{k}\right)$ ist. Hieraus folgt, durch Multiplication über alle σ,

$$P_\sigma \varphi\left(\frac{l\sigma}{k}\right) = (-1)^{Sh} P\varphi\left(\frac{\sigma_1}{k}\right), \quad (-1)^{Sh} = P\varphi\left(\frac{l\sigma}{k}\right) : P\varphi\left(\frac{\sigma}{k}\right) = P\left\{\varphi\left(\frac{l\sigma}{k}\right) : \varphi\left(\frac{\sigma}{k}\right)\right\}.$$

Wenn man nun die Formel (III.) auf den Multiplicator l anwendet und $x = \frac{\sigma}{k}$

setzt, so ist

$$\varphi\left(\frac{l\sigma}{k}\right):\varphi\left(\frac{\sigma}{k}\right) = a^{l-1}\boldsymbol{P}_\tau\varphi\left(\frac{\sigma}{k}+\frac{\tau}{l}\right)\boldsymbol{P}_\tau\varphi\left(\frac{\sigma}{k}-\frac{\tau}{l}\right),$$

also

$$(-1)^{Sh} = a^{\frac{1}{2}(k-1)(l-1)}\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{P}_\tau\varphi\left(\frac{\sigma}{k}+\frac{\tau}{l}\right)\cdot\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{P}_\tau\varphi\left(\frac{\sigma}{k}-\frac{\tau}{l}\right).$$

Aus der Congruenz $l\sigma \equiv (-1)^h\sigma_1$ folgt andrerseits

$l^{\frac{k-1}{2}}\boldsymbol{P}(\sigma) \equiv (-1)^{Sh}\boldsymbol{P}(\sigma)$ (mod. k), $\quad l^{\frac{k-1}{2}} \equiv (-1)^{Sh}$, $\quad$ also $\quad (-1)^{Sh} = \left(\frac{l}{k}\right)$;

folglich ist, wenn man $\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{P}_\tau\varphi\left(\frac{\sigma}{k}+\frac{\tau}{l}\right) = \boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{P}_\tau\varphi\left(\frac{\sigma}{k}-\frac{\tau}{l}\right) = \boldsymbol{K}_2$ setzt.

$$\left(\frac{l}{k}\right) = a^{\frac{1}{2}(k-1)(l-1)}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{K}_2;$$

und wenn man hierin k mit l vertauscht, so ist in derselben Weise

$$\left(\frac{k}{l}\right) = a^{\frac{1}{2}(k-1)(l-1)}\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2, \quad \text{wo} \quad \boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}\varphi\left(\frac{\tau}{l}+\frac{\sigma}{k}\right), \quad \boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}\varphi\left(\frac{\tau}{l}-\frac{\sigma}{k}\right).$$

Da nun offenbar $\boldsymbol{K}_1 = \boldsymbol{L}_1$, und wenn man auf jeden der $\frac{1}{2}(k-1)\frac{1}{2}(l-1)$ Factoren von $\boldsymbol{L}_2$ die Formel $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ anwendet, $\boldsymbol{K}_2 = (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)\cdot\frac{1}{2}(l-1)}\boldsymbol{L}_2$ ist, so erhält man endlich $\left(\frac{k}{l}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)\cdot\frac{1}{2}(l-1)}\left(\frac{l}{k}\right)$. Dies ist das ***Legendre***sche Reciprocitätsgesetz, welches zuerst von ***Gaufs*** bewiesen worden ist. Verallgemeinert man dasselbe, so dafs es für je zwei positive ungerade Zahlen k und l ohne gemeinschaftlichen Theiler gilt, so kann man hieraus auch unmittelbar den Werth von $\left(\frac{2}{k}\right)$ bestimmen. Wenn $k \equiv 1$ (mod. 4) ist, so setze man $k+1 = 2l$, und wenn $k \equiv -1$ (mod. 4) ist, setze man $k-1 = 2l$ und in beiden Fällen $k+\varepsilon = 2l$, wo $\varepsilon = (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}$; bei dieser Annahme ist l stets positiv ungerade und zu k relative Primzahl. Aus der vorgelegten Gleichung folgt $2l \equiv \varepsilon$ (mod. k), $k \equiv -\varepsilon$ (mod. l), also

$$\left(\frac{2l}{k}\right) = \left(\frac{2}{k}\right)\left(\frac{l}{k}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{k}\right) = \varepsilon^{\frac{1}{2}(k-1)}, \qquad \left(\frac{k}{l}\right) = \left(\frac{-\varepsilon}{l}\right) = (-\varepsilon)^{\frac{1}{2}(l-1)}.$$

Verbindet man mit diesen beiden Formeln die dritte $\left(\frac{l}{k}\right) = (-1)^{\frac{k-1}{2}\cdot\frac{l-1}{2}}\left(\frac{k}{l}\right)$, so erhält man $\left(\frac{2}{k}\right) = (-1)^{\frac{k-1}{2}\cdot\frac{l-1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}(k-1)}\cdot(-\varepsilon)^{\frac{1}{2}(l-1)}$. Wenn demnach $k \equiv 1$ (mod. 4), $\varepsilon = 1$, so ist $\left(\frac{2}{k}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(l-1)} = (-1)^{\frac{1}{4}(k-1)}$, und wenn $k \equiv -1$ (mod. 4), $\varepsilon = -1$, so ist $\left(\frac{2}{k}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(l-1)}(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} = (-1)^{\frac{3k-5}{4}} = (-1)^{\frac{1}{4}(k+1)}$.

8.

Bemerkungen und Zusätze zu dieser Abhandlung.

Es schien mir nicht unpassend, zur Erläuterung und theilweisen Ergänzung dieser Arbeit die nachstehenden Bemerkungen hinzuzufügen.

I. ***Zu §. 1. und §. 2.*** Es hätte dort ausdrücklich bemerkt werden müssen, dafs es nicht hinreicht, die Convergenz der Reihe (1.) in §. 1., von ihrem dritten Gliede an, in dem Sinne nachzuweisen, dafs dieselbe als eine einfache Reihe mit den Coëfficienten $\frac{1}{3}\Sigma'\frac{1}{u^3}$, $\frac{1}{4}\Sigma'\frac{1}{u^4}$, ... aufgefafst wird, sondern es mufs dargethan werden, dafs dieselbe, als Tripelreihe betrachtet, unabhängig von der Anordnung der Glieder convergirt. Dies Letztere ist aber in der That in §. 2. geschehen, indem dort nicht allein statt der Coëfficienten selbst, welche Doppelreihen sind, sondern vielmehr statt aller einzelnen Glieder in diesen Doppelreihen deren analytische Moduln gesetzt worden sind. Diese Bemerkung ändert also nichts an den dortigen Schlufsfolgen, sondern soll nur zum besseren Verständnifs derselben beitragen.

II. ***Zu §. 3.*** Es sei

$$\ldots\ a_{-3},\ a_{-2},\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

eine Reihe, welche zwar convergirt, aber nicht unabhängig von der Anordnung der Glieder, und deren Summe als Grenze der folgenden $\sum_{n=-k}^{n=k} a_n$ für $k=\infty$ betrachtet wird. Setzt man $n \circlearrowright n+1$, so erlangt die Summe $\sum_{n=-k}^{n=k} a_n$, welche in $\sum_{n=-k}^{n=k} a_{n+1} = \sum_{n=-k+1}^{n=k+1} a_n$ übergeht, den Zuwachs $(a_{k+1}-a_{-k})$. Wenn nun a_k und a_{-k} für $k=\infty$ beide gegen Null convergiren, so ist dieser Zuwachs $=0$ und die Reihe bleibt durch die Substitution $n \circlearrowright n+1$, also auch durch die Substitution $n \circlearrowright n+\nu$, wo ν irgend eine constante *ganze* Zahl ist, unverändert. Diese Annahme ist jedoch zur Convergenz der Reihe keinesweges nothwendig, sondern es ist nur nothwendig, dafs a_k+a_{-k} gegen Null convergirt; es kann sich also treffen, dafs a_k gegen eine von Null verschiedene Constante c, und a_{-k} dann gegen die entgegengesetzte Constante $-c$ convergirt; in diesem Falle erlangt die Reihe den Zuwachs $(a_{k+1}-a_{-k})_{k=\infty} = c-(-c) = 2c$, wenn $n \circlearrowright n+1$ gesetzt wird, und hieraus folgt leicht, dafs sie für die Substitution $n \circlearrowright n+\nu$ den Zuwachs $2\nu c$ erlangt; nämlich es ist

$$\nabla \Sigma a_n = 2\nu c = 2\nu a_{+\infty} = -2\nu a_{-\infty}, \quad \text{wenn } n \circlearrowright n+\nu.$$

Es sei a_n von der Form

$$f(x+\beta n) \quad \text{und} \quad \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(x+\beta n) = \operatorname{Lim}_{k=\infty} \sum_{n=-k}^{n=k} f(x+\beta n) = \Delta(x);$$

dann ist $x \circlearrowleft x+\nu\beta$, wenn $n \circlearrowleft n+\nu$, also $\Delta(x+\nu\beta) = \Delta(x)$, und Δ nach β eigentlich periodisch, wenn $f(x \pm k\beta)$ für $k = \infty$ gegen Null convergirt, dagegen ist $\Delta(x+\nu\beta) = \Delta(x) + 2\nu c$, also Δ blofs uneigentlich periodisch, wenn $f(x+k\beta)$ gegen $+c$, $f(x-k\beta)$ gegen $-c$ convergirt. In §. 3. kommt der Fall vor, wenn a_n selbst eine einfache Summe nach m, $a_n = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \varphi(m, n)$ und $\varphi(\pm\infty, n) = 0$ ist, für jeden Werth von n; es bleibt also a_n durch die Substitution $m \circlearrowleft m+\mu$ unverändert, folglich bleibt auch die Doppelsumme $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \varphi(m, n) \right\}$ durch diese Substitution unverändert; und wenn $a_{\pm k}$, d. h. $\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \varphi(m, \pm k)$, für $k = \infty$ gegen $\pm c$ convergirt, so erlangt die Doppelsumme durch die Substitution $m \circlearrowleft m+\mu$, $n \circlearrowleft n+\nu$ den Zuwachs $2\nu c$.

III. *Zu §. 5. und §. 6.* Setzt man in der identischen Gleichung

$$(a.) \qquad \frac{1}{p^2 q^2} = \frac{1}{(p+q)^2}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right) + \frac{2}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right),$$

$p = x+w_1$, $q = -x-w_2$, $p+q = w_1-w_2 = w$, so erhält man durch Summation über alle Werthe von w_1 und w_2, mit Ausschlufs von $w_1 = w_2$, links $(2, x)^2 - (4, x)$, ganz eben wie in §. 4. für die Kreisfunctionen; rechts giebt die Summation nach w_1, wenn man $w_2 = w_1 - w$ setzt, was nach der Schlufsbemerkung in §. 5. erlaubt ist,

$$\frac{1}{w^2}((2, x)+(2, x-w)) + \frac{2}{w^3}((1, x)-(1, x-w));$$

was sich wegen der Periodicität auf $\frac{2}{w^2}(2, x) + \frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{n}{w^3}$ reducirt und, nach w summirt, $2(2^*, 0)(2, x) - \frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(2^*, 0)}{\partial\beta}$ giebt, so dafs man

$$(1.) \qquad (4, x) = (2, x)^2 - 2(2^*, 0)(2, x) + \frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(2^*, 0)}{\partial\beta}$$

erhält: eine Formel, welche mit (1.) in §. 4. für Kreisfunctionen bis auf die hinzutretende Constante übereinstimmt. Setzt man in (*a.*)

$$p = x+w_1, \quad q = -w_2, \quad p+q = x+w_1-w_2 = x+w$$

und schliefst die Combinationen $w_1 = w$, d. h. $w_2 = 0$ aus, so erhält man

durch ein ähnliches Verfahren und analog der Gleichung (2.) in §. 4.

$$(2.) \qquad 3(4,x)+\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\delta(2,x)}{\partial\beta} = (2,x)^2+2(1,x)(3,x).$$

Die identische Gleichung

$$(b.) \qquad \frac{1}{p^3q^2}-\frac{1}{p^2q^3} = \frac{1}{(p+q)^2}\left(\frac{1}{p^3}-\frac{1}{q^3}\right)+\frac{1}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right)$$

liefert durch dieselben Substitutionen und durch den Procefs der doppelten Erzeugung nur die eine Gleichung

$$(3.) \quad (5,x) = (3,x)\{(2,x)-(2^*,0)\},$$

welche auch durch Differentiation nach x aus (1.) hervorgeht. Diese Gleichungen kann man mit denen in §. 5. verbinden, um die Elimination, welche zu der Differentialgleichung erster Ordnung für $(2,x)$ führt, mit gröfserer Leichtigkeit auszuführen. Die Gleichung (2.) dient namentlich, um den Differentialquotienten nach β der elliptischen Function 1ter Gattung und die elliptische Function 2ter Gattung in einander auszudrücken.

Setzt man in $(a.)$ und $(b.)$ $p \smile p+w_1$, $q \smile q+w_2$ und führt, indem man über alle Werthe von w_1 und w_2 summirt, w_1+w_2 rechts als neuen Index ein (das Wort Index in einer allgemeineren Bedeutung genommen), so erhält man

$$(4.) \qquad (2,p)(2,q)$$
$$= (2,p+q)\{(2,p)+(2,q)\}+2(3,p+q)\{(1,p)+(1,q)\}-\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(2,p+q)}{\partial\beta},$$

$$(5.) \qquad (3,p)(2,q)-(2,p)(3,q)$$
$$= (2,p+q)\{(3,p)+(3,q)\}+(3,p+q)\{(2,p)+(2,q)\}.$$

Man erhält (5.) auch aus (4.) durch Differentiation nach p und q, indem man $p+q$ als constant betrachtet. Durch eine nochmalige Differentiation erhält man aus (5.), indem man wieder $p+q$ als constant betrachtet,

$$(6.) \qquad 3(4,p)(2,q)-4(3,p)(3,q)+3(2,p)(4,q)$$
$$= 3(2,p+q)\{(4,p)+(4,q)\}+2(3,p+q)\{(3,p)+(3,q)\}.$$

Die Formeln (5. und 6.), welche unverändert auch für Kreisfunctionen gelten, sind zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung von $(2,p+q)$ und $(3,p+q)$ und geben die letzteren rational in $(2,p)$, $(3,p)$, $(4,p)$ und $(2,q)$, $(3,q)$, $(4,q)$ ausgedrückt, also auch nach (1.) rational in $(2,p)$, $(3,p)$ und $(2,q)$, $(3,q)$. Die (4.) in Verbindung mit (2.) giebt das Additionstheorem für die zweite Gattung. Nämlich nach (2.) ist, wenn man der Kürze wegen $p+q=r$ setzt,

$$-\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(2,r)}{\partial\beta} = 3(4,r)-(2,r)^2-2(1,r)(3,r),$$

aus (4.) wird daher

$$(2,p)(2,q)$$
$$= (2,r)((2,p)+(2,q))+2(3,r)\{(1,p)+(1,q)-(1,r)\}+3(4,r)-(2,r)^2,$$
$$(1,p)+(1,q)-(1,r)$$
$$= \frac{1}{2(3,r)}\{(2,p)(2,q)-3(4,r)-(2,r)((2,p)+(2,q)-(2,r))\},$$

d. h. $(1,p)+(1,q)-(1,p+q)$ ist gleich einem Ausdruck, welcher nur aus elliptischen Functionen erster Gattung zusammengesetzt ist.

Die Befugnifs zu dem Verfahren, durch welches die hier gewonnenen Gleichungen gefunden worden sind, beruht auf ganz andern Gründen, als bei den in §. 5. abgeleiteten Relationen; nämlich nicht wie dort auf der Unabhängigkeit der Summen von der Anordnung ihrer Glieder, welche hier nicht Statt findet, sondern nur auf der Bemerkung am Schlusse von §. 5. Streng genommen mufs man daher eigentlich erst sämmtliche Summationen nach den verschiedenen m in den verschiedenen $w=\alpha m+\beta n$, und dann erst alle Summationen nach den verschiedenen n ausführen; aber der Algorithmus des Verfahrens bleibt derselbe wie in §. 5.

Da in der Differenz $\frac{1}{x+w}-\frac{1}{y+w}$, wenn man sie nach fallenden Potenzen von w entwickelt, der Term $\frac{1}{w}$ nicht vorkommt, so darf man in der Formel

$$\left(\frac{1}{x+w_1}-\frac{1}{y+w_1}\right)\left(\frac{1}{x+w_2}-\frac{1}{y+w_2}\right)$$
$$= \frac{1}{w_1-w_2}\left\{-\frac{1}{x+w_1}+\frac{1}{x+w_2}-\frac{1}{y+w_1}+\frac{1}{y+w_2}\right\}$$
$$+\frac{1}{x-y+w_1-w_2}\left\{\frac{1}{x+w_1}-\frac{1}{y+w_2}\right\}+\frac{1}{y-x+w_1-w_2}\left\{\frac{1}{y+w_1}-\frac{1}{x+w_2}\right\}$$

bei der Summation nach w_1 und w_2 die Differenz $w_1-w_2=w$ als neuen Index einführen, und man erhält durch den Procefs der doppelten Erzeugung, wenn man noch bemerkt, dafs für den Fall $w_1=w_2$ statt des ersten Theils rechts in der Formel

$$\frac{1}{(x+w_1)^2}+\frac{1}{(y+w_1)^2}$$

gesetzt werden mufs, das folgende Resultat. Die linke Seite giebt unmittelbar $\{(1,x)-(1,y)\}^2$; setzt man auf der rechten $w_2=w_1-w$, so ergiebt sich durch Summation nach w_1, $\frac{1}{w}\{-(1,x)+(1,x-w)-(1,y)+(1,y-w)\}$
$+\frac{1}{x-y+w}\{(1,x)-(1,y-w)\}+\frac{1}{y-x+w}\{(1,y)-(1,x-w)\}$. Da nun

$(1,x-w)=(1,x)-\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}$, $(1,y-w)=(1,y)-\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}$ ist, so reducirt sich dieser Ausdruck auf $-\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}\cdot\frac{1}{w}+\frac{1}{x-y+w}\left\{(1,x)-(1,y)+\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}\right\}$ $+\frac{1}{y-x+w}\left\{(1,y)-(1,x)+\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}\right\}$. Im ersten Term ist der Werth $w=0$ auszuschliefsen, und die Summation nach w giebt

$$\{(1,x)-(1,y)\}\{(1,x-y)-(1,y-x)\}+\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\sum\nolimits^{*}\left\{\frac{1}{x-y+w}+\frac{1}{y-x+w}-\frac{2}{w}\right\}\frac{\partial w}{\partial\beta}$$
$$=2(1,x-y)\{(1,x)-(1,y)\}+\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial\log\varphi(x-y)}{\partial\beta};$$

hierzu tritt noch $(2,x)+(2,y)$, und man erhält demnach schliefslich:

$$\{(1,x)-(1,y)\}^2=2(1,x-y)\{(1,x)-(1,y)\}+(2,x)+(2,y)+\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial\log\varphi(x-y)}{\partial\beta},$$

und wenn man noch $x=p$, $y=-q$, $-y=q$, $p+q=x-y=r$ setzt:

$$(7.)\qquad \{(1,p)+(1,q)\}^2$$
$$=2(1,r)\{(1,p)+(1,q)\}+(2,p)+(2,q)+\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial\log\varphi(r)}{\partial\beta}.$$

Die Analogie dieser Formel mit dem Additionstheorem für die Cotangente (§. 4.) ist nicht zu verkennen. Setzt man in ihr q unendlich klein und entwickelt nach steigenden Potenzen von q, so erhält man eine Reihe von Gleichungen. Die erste derselben, welche ***nicht identisch*** wird, ist die folgende (es wird noch $p\smile x$ gesetzt):

$$(8.)\qquad (2,x)-\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial\log\varphi(x)}{\partial\beta}=(1,x)^2+3(2^*,0)\ ^*);$$

die zweite ist

$$(8'.)\qquad (3,x)+\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(1,x)}{\partial\beta}=(1,x)(2,x);$$

---

*) Da $(1,x)=\frac{\partial\log\varphi(x)}{\partial x}$, $(2,x)=-\frac{\partial^2\log\varphi(x)}{\partial x^2}$, so läfst sich, wenn man $\varphi(x)=y$ setzt, die Gleichung (8.) auch so schreiben: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial y}{\partial\beta}+3(2^*,0)y=0$; dieser partiellen Differentialgleichung genügt also das unendliche Doppelproduct $\varphi(x)$, während das entsprechende einfache unendliche Product in der Theorie der Kreisfunctionen, welches den Sinus darstellt, der Gleichung $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+3(2^*,0)y=0$ genügt. Setzt man $cy=z$, wo c, als Function von β, durch $\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial\log c}{\partial\beta}=3(2^*,0)$ bestimmt wird, so kommt $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial z}{\partial\beta}=0$.

die dritte ist wiederum die Gleichung (2.), welche oben auf anderem Wege gefunden wurde, u. s. w. Man sieht, dafs diese Gleichungen sich von den in §. 4. für die Cotangente abgeleiteten einfachsten Differentialgleichungen nur durch den links hinzutretenden Term $-\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial\log\varphi(x)}{\partial\beta}$ resp. $\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(1,x)}{\partial\beta}$ unterscheiden. Wenn man in der Gleichung (7.) entweder $(2,p)$ und $(2,q)$, oder $\frac{\partial\log\varphi(r)}{\partial\beta}$ durch (8.) ausdrückt, so erhält man zwei neue Formen der Gleichung (7.), nämlich:

$$(9.)\quad (1,p)(1,q)-3(2^*,0)$$
$$=(1,r)\{(1,p)+(1,q)\}+\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\partial_\beta\{\log\varphi(p)+\log\varphi(q)+\log\varphi(r)\},$$

$$(10.)\quad \{(1,p)+(1,q)-(1,r)\}^2=(2,p)+(2,q)+(2,r)-3(2^*,0).$$

Die Gleichung (10.) ist vielleicht eine der elegantesten Darstellungen des Additionstheorems für die zweite Gattung. Differentiirt man die Gleichung (10.), indem man p und q als variabel, r als constant ansieht, so erhält man, wenn man die Seite rechts durch T bezeichnet, $-(2,p)+(2,q)=\frac{1}{\sqrt{T}}\{-(3,p)+(3,q)\}$, also

$$(11.)\quad (2,p)+(2,q)+(2,r)-3(2^*,0)=\frac{\{(3,p)-(3,q)\}^2}{\{(2,p)-(2,q)\}},$$

als eine der einfachsten Formen des Additionstheorems für die erste Gattung. Die Vergleichung von (11.) mit (10.) giebt

$$(12.)\quad (1,p)+(1,q)-(1,r)=\frac{(3,p)-(3,q)}{(2,p)-(2,q)}\ *),$$

als eine neue Form des Additionstheorems für die zweite Gattung, deren characteristische Eigenschaft darin besteht, dafs rechts keine Function von $r=p+q$, sondern nur Functionen von p und q vorkommen. Die Gleichung (12.) schreibe man in den beiden Formen

$$(13.)\quad (1,p+q)+(1,p-q)=(1,2p)+\frac{(3,p+q)-(3,p-q)}{(2,p+q)-(2,p-q)},$$

$$(14.)\quad (1,p\pm q)=(1,p)\pm(1,q)-\frac{(3,p)\mp(3,q)}{(2,p)-(2,q)}.$$

Durch Addition der beiden Gleichungen (14.) erhält man noch

$$(15.)\quad (1,p+q)+(1,p-q)=2(1,p)+\partial_p\log((2,p)-(2,q)),$$

*) Vor die Seite rechts müfste eigentlich $\pm$ gesetzt werden, aber man findet durch Entwicklung nach steigenden Potenzen von q, dafs das obere Zeichen das richtige ist.

weil $-2(3,p)=\partial_p(2,p)$ ist. Giebt man q einen solchen Werth, dafs $(3,q)=0$, so erhält man aus (12.) rechts $-\frac{1}{2}\partial_p\log\{(2,p)-(2,q)\}$, also

$$\partial_p\log\varphi(p+q)-\partial_p\log\varphi(p)-(1,q) = \tfrac{1}{2}\partial_p\log\{(2,p)-(2,q)\},$$

$$\log\varphi(p+q)-\log\varphi(p) = \tfrac{1}{2}\log\{(2,p)-(2,q)\}+(1,q)p+\text{Const.},$$

$$\frac{\varphi(p+q)^2}{\varphi(p)^2} = \boldsymbol{C}\cdot e^{2(1,q)\cdot p}\{(2,p)-(2,q)\}.$$

Setzt man hier p unendlich klein, und entwickelt nach steigenden Potenzen von p, so giebt der erste Term der Entwicklung $\boldsymbol{C}=\varphi(q)^2$. Die Function φ hat immer dieselbe Bedeutung, wie in der letzten Hälfte von §. 4., und q ist z. B. $=\frac{\alpha}{2}$ oder $=\frac{\beta}{2}$ oder $=\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Nach der Transformationsformel (*A.*) des §. 6. ist, mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnungen,

$$(16.)\quad \mathrm{S}(1,\gamma+\sigma\alpha+\tau\beta)' = (1,\gamma)+a-b\gamma,$$

$$(17.)\quad \mathrm{S}(1,\gamma-\sigma\alpha-\tau\beta)' = (1,\gamma)-a-b\gamma.$$

Die Anzahl der Summanden links ist $\pm\varepsilon=\boldsymbol{M}(\varepsilon)$. Addirt man (16.) und (17.) Glied um Glied und benutzt (13.), indem man links $p=\gamma$, $q=\sigma\alpha+\tau\beta$, rechts $p=\gamma$, $q=0$ (oder besser q unendlich klein) setzt, so ergiebt sich

$$(18.)\quad \boldsymbol{M}(\varepsilon)\cdot(1,2\gamma)'+\mathrm{S}\frac{(3,\gamma+\sigma\alpha+\tau\beta)'-(3,\gamma-\sigma\alpha-\tau\beta)'}{(2,\gamma+\sigma\alpha+\tau\beta)'-(2,\gamma-\sigma\alpha-\tau\beta)'}$$

$$= (1,2\gamma)+\frac{(3,\gamma+0)-(3,\gamma-0)}{(2,\gamma+0)-(2,\gamma-0)}-2b\gamma.$$

Benutzt man hingegen (15.) bei der Addition von (16.) und (17.), aber blofs links, so erhält man

$$(19.)\quad 2\boldsymbol{M}(\varepsilon)(1,\gamma)'+\partial_\gamma\log\boldsymbol{P}\{(2,\gamma)'-(2,\sigma\alpha+\tau\beta)'\} = 2(1,\gamma)-2b\gamma,$$

wo $b=\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}$ ist und das Multiplicationszeichen $\boldsymbol{P}$ sich auf die $\boldsymbol{M}(\varepsilon)-1$ Combinationen σ, τ mit Ausschlufs von 0, 0 bezieht. Dies sind die Transformationsformeln für die zweite Gattung, in einer Form, welche der zuerst von *Jacobi* aufgestellten sehr ähnlich ist. Durch Differentiation nach γ erhält man die Transformationsformeln für die erste Gattung.

Die Darstellung der Transformationsformeln in Form von Producten kann man mit Zuziehung von (*A.*) §. 6. sehr leicht aus der folgenden allgemeinen Relation ableiten, welche sich ebenfalls durch den Procefs der doppelten Erzeugung ergiebt. Wenn $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, ... irgend verschiedene Gröfsen

sind, so giebt das Product $\frac{1}{(x+z_1)^2}\cdot\frac{1}{(x+z_2)^2}\cdot\frac{1}{(x+z_3)^2}\ldots$ durch Zerfällung in Partialbrüche eine Summe von der Form $\mathrm{S}_z\frac{\mathfrak{A}}{(x+z)^2}+\mathrm{S}\frac{\mathfrak{B}}{x+z}$, wo die verschiedenen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nur von den Differenzen zwischen den verschiedenen z abhangen. Wenn man daher $z_1 \mathfrak{o} z_1+w_1$, $z_2 \mathfrak{o} z_2+w_2$, etc. allgemein $z \mathfrak{o} z+w$ setzt und die Differenzen zwischen den verschiedenen w als neue Indices einführt, so erhält man durch Anwendung der oft benutzten Methode:

$$(20.)\qquad \boldsymbol{P}_z(2, x+z) = \mathrm{S}\{\boldsymbol{A}(2, x+z)\}+\mathrm{S}\{\boldsymbol{B}(1, x+z)\}+\boldsymbol{C};$$

wo die verschiedenen $\boldsymbol{A}$, die verschiedenen $\boldsymbol{B}$, so wie $\boldsymbol{C}$ von x unabhängig sind, nur von den Differenzen zwischen den verschiedenen z abhangen und übrigens leicht vollständig durch elliptische Functionen ausgedrückt werden können, wenn man die besondere Form der Coëfficienten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ berücksichtigt. Diese Relation (20.), durch welche ein Product von beliebig vielen elliptischen Functionen linear durch die elliptischen Functionen (erster und zweiter Gattung) der einzelnen Elemente ausgedrückt wird, erfordert, dafs nicht allein alle z verschieden sind, sondern auch, dafs keine ihrer Differenzen auf die Form $m\alpha+n\beta$ gebracht werden kann, wo m und n ganze Zahlen sind. Die Transformationsformeln in Form von Producten gehen hieraus hervor, wenn man in (20.) statt der ursprünglichen elliptischen Functionen die transformirten mit den Moduln α', β' setzt, statt der verschiedenen z die $\boldsymbol{M}(\varepsilon)$ Ausdrücke $\sigma\alpha+\tau\beta$ wählt, und berücksichtigt, dafs in diesem Falle alle $\boldsymbol{A}$ einander gleich werden und alle $\boldsymbol{B}$ verschwinden, endlich aber die Gleichung ($\boldsymbol{A}$.) §. 6. für $g=2$ anwendet.

Die nachstehenden Folgerungen aus dem Vorhergehenden sind noch von besonderer Wichtigkeit. Die obige Additionsformel für die zweite Gattung

$$(1, x+y) = (1, x)+(1, y)-\frac{(3, x)-(3, y)}{(2, x)-(2, y)}$$

läfst sich so schreiben:

$$\partial_x \log\varphi(x+y)$$
$$= \partial_x \log\varphi(x)+(1, y)+\tfrac{1}{2}\partial_x \log\{(2, x)-(2, y)\}+\frac{(3, y)}{(2, x)-(2, y)},$$

woraus durch Integration nach x

$$\log\varphi(x+y)$$
$$= \log\varphi(x)+(1, y)x+\tfrac{1}{2}\log\{(2, x)-(2, y)\}+(3, y)\cdot\int_0^x\frac{\partial x}{(2, x)-(2, y)}+\text{Const.}$$

hervorgeht. Die Constante bestimmt man durch Entwicklung aller Termen nach Potenzen von x. Man erhält

$$\log\varphi(x+y) = \log\varphi(y) + \text{etc.}, \qquad \log\varphi(x) = \log x + \text{etc.},$$

$$(2,x)-(2,y) = \frac{1}{x^2} + \{(2^*,0)-(2,y)\} + \text{etc.} = \frac{1}{x^2}\{1+\text{etc.}\},$$

$$\tfrac{1}{2}\log\{(2,x)-(2,y)\} = -\log x + \text{etc.},$$

und das Integral fängt gleich mit $\frac{x^3}{3}$ an. Das einzige constante Glied, welches in diesen Entwicklungen vorkommt, ist links $\log\varphi(y)$; also ist Const. $=\log\varphi(y)$, folglich hat man

$$(21.)\quad \log\frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)\varphi(y)} = (1,y)x + \tfrac{1}{2}\log\{(2,x)-(2,y)\} + (3,y)\int_0^x \frac{\partial x}{(2,x)-(2,y)},$$

wodurch, wie bei *Jacobi*, die dritte Gattung durch die Function φ ausgedrückt ist; $(2,y)$ ist hier der Parameter. Ein specieller Fall hiervon ist der schon oben betrachtete, wenn man y einen solchen Werth giebt, dafs $(3,y)=0$ wird. Es sei $(3,q)=0$ und $y=q$, dann erhält man

$$(22.)\quad \frac{\varphi(x+q)^2}{\varphi(x)^2\varphi(q)^2} = e^{2(1,q)x}\{(2,x)-(2,q)\}.$$

Durch diese Formel wird der Zusammenhang zwischen den Doppelreihen und den Quotienten aus den Doppelproducten nachgewiesen. Die Formel (15.) für das Additionstheorem läfst sich so schreiben:

$$\partial_x\log\varphi(x+y)+\partial_x\log\varphi(x-y) = 2\,\partial_x\log\varphi(x)+\partial_x\log\{(2,x)-(2,y)\},$$

und sie giebt, exponentiell integrirt,

$$\varphi(x+y)\varphi(x-y) = C\cdot\varphi(x)^2\{(2,x)-(2,y)\}.$$

Da $\varphi(x\pm y)$, entwickelt, mit $\varphi(\pm y)$, $\varphi(x)^2$ mit x^2, $(2,x)-(2,y)$ mit $\frac{1}{x^2}$ anfangen, so wird $\varphi(y)\varphi(-y)=C$, oder $C=-\varphi(y)^2$, und folglich hat man die Formel

$$(23.)\quad \frac{\varphi(y+x)\varphi(y-x)}{\varphi(y)^2\varphi(x)^2} = (2,x)-(2,y).$$

Schreibt man in dieser letztern die Seite rechts so:

$$\{(2,x)-(2,q)\}-\{(2,y)-(2,q)\}$$

und vergleicht sie mit der vorhin abgeleiteten Formel, so findet sich

$$(24.)\quad \varphi(q)^2\varphi(x+y)\varphi(x-y)$$
$$= \varphi(x)^2\{e^{-(1,q)y}\varphi(y+q)\}^2 - \varphi(y)^2\{e^{-(1,q)x}\varphi(x+q)\}^2,$$

wo q der Gleichung $(3,q)=0$ genügt; u. s. w.

In Bezug auf die Transformationsformel für die zweite Gattung bemerke man, dafs sie für einen ungeraden Werth von ε, wegen $(2, -\sigma\alpha - \tau\beta) = (2, \sigma\alpha + \tau\beta)$, auch so geschrieben werden kann:

$$\boldsymbol{M}(\varepsilon)(1,\gamma)' = (1,\gamma) - b\gamma - \partial_\gamma \log \boldsymbol{P}_1 \{(2,\gamma)' - (2, \sigma\alpha + \tau\beta)'\},$$

wo in $\boldsymbol{P}_1$ nur $\frac{1}{2}\{\boldsymbol{M}(\varepsilon) - 1\}$ Combinationen σ, τ vorkommen, indem von je zweien, wie σ, τ; $-\sigma, -\tau$, eine ausgeschlossen wird. Durch exponentielle Integration dieser Gleichung erhält man

$$\varphi'(\gamma)^{\boldsymbol{M}(\varepsilon)} e^{\frac{1}{2}b\gamma^2} \boldsymbol{P}_1 \{(2,\gamma)' - (2, \sigma\alpha + \tau\beta)'\} = \boldsymbol{C} \cdot \varphi(\gamma).$$

Da $\varphi'(\gamma)$, entwickelt, mit γ anfängt, so fängt die $\boldsymbol{M}(\varepsilon)$te Potenz davon mit $\gamma^{\boldsymbol{M}(\varepsilon)}$ an, $e^{\frac{1}{2}b\gamma^2}$ fängt mit 1, $(2,\gamma)' - (2, \sigma\alpha + \tau\beta)'$ mit $\frac{1}{\gamma^2}$, folglich das Product in der Formel mit $\frac{1}{\gamma^{\boldsymbol{M}(\varepsilon)-1}}$, und daher die ganze linke Seite der Formel mit γ an, und da die Entwicklung der Seite $\boldsymbol{C}\varphi(\gamma)$ rechts mit $\boldsymbol{C}\gamma$ anfängt, so ist nothwendig $\boldsymbol{C} = 1$ und demnach

$$(25.) \qquad \boldsymbol{P}_1 \{(2,\gamma)' - (2, \sigma\alpha + \tau\beta)'\} = e^{-\frac{1}{2}b\gamma^2} \frac{\varphi(\gamma)}{\varphi'(\gamma)^{\boldsymbol{M}(\varepsilon)}},$$

wo immer $b = \frac{2\delta\nu\pi i}{\alpha\alpha'}$ ist. Die Multiplication $\boldsymbol{P}_1$ umfafst nur $\frac{1}{2}\{\boldsymbol{M}(\varepsilon) - 1\}$ Combinationen σ, τ, und diese Formel gilt nur für einen ungeraden Werth von ε. Im Allgemeinen hat man aber für jeden Werth (auch wenn ε gerade) von ε:

$$(26.) \qquad \boldsymbol{P} \{(2,\gamma)' - (2, \sigma\alpha + \tau\beta)'\} = e^{-b\gamma^2} \frac{\varphi(\gamma)^2}{\varphi'(\gamma)^{2\boldsymbol{M}(\varepsilon)}},$$

wo das Product $\boldsymbol{M}(\varepsilon) - 1$ Combinationen σ, τ umfafst. Diese wichtigen Fundamentalformeln sind, wenn auch in etwas anderer, aber nicht wesentlich verschiedener Form, schon von ***Jacobi*** aufgestellt worden (***Crelle's*** Journal Band 4.).

Setzt man

$$\boldsymbol{P}\{(2,\gamma)' - (2, \sigma\alpha + \tau\beta)'\} = \boldsymbol{V} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{P}_1\{(2,\gamma)' - (2, \sigma\alpha + \tau\beta)'\} = \boldsymbol{W},$$

so ist

$$\boldsymbol{M}(\varepsilon)(1,\gamma)' = (1,\gamma) - b\gamma - \tfrac{1}{2}\frac{\partial \log \boldsymbol{V}}{\partial \gamma}$$

für einen beliebigen Werth von ε, und

$$\boldsymbol{M}(\varepsilon)(1,\gamma)' = (1,\gamma) - b\gamma - \frac{\partial \log \boldsymbol{W}}{\partial \gamma}$$

für einen ungeraden Werth von ε. Differentiirt man diese Gleichungen nach γ,

so ergiebt sich

$$(27.)\quad (2,\gamma) = M(\varepsilon)(2,\gamma)' - b - \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 \log V}{\partial \gamma^2},$$

$$(28.)\quad (2,\gamma) = M(\varepsilon)(2,\gamma)' - b - \frac{\partial^2 \log W}{\partial \gamma^2};$$

und bezeichnet man die Differentialquotienten der ganzen Functionen V und W von $(2,\gamma)'$, nach $(2,\gamma)'$ genommen, durch V', V'', etc., W', W'', etc., so erhält man

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma} = V'\frac{\partial (2,\gamma)'}{\partial \gamma} = -2(3,\gamma)'V',$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \gamma^2} = V''\Big(\frac{\partial (2,\gamma)'}{\partial \gamma}\Big)^2 + V'\frac{\partial^2 (2,\gamma)'}{\partial \gamma^2} = 4(3,\gamma)'^2 V'' + 6(4,\gamma)'V',$$

$$\frac{\partial \log V}{\partial \gamma} = -\frac{2V'}{V}(3,\gamma)', \quad \frac{\partial^2 \log V}{\partial \gamma^2} = \frac{V\{4(3,\gamma)'^2 V'' + 6(4,\gamma)'V'\} - 4(3,\gamma)'^2 V'^2}{V^2}.$$

Dieselben Formeln gelten in Bezug auf W, und da $(3,\gamma)'^2$ und $(4,\gamma)'$ ganzen Functionen von $(2,\gamma)'$ gleich sind, so erhält man auf diese Weise die Darstellung von $(2,\gamma)$ durch rationale Functionen von $(2,\gamma)'$; übrigens ist $V = W^2$, wenn ε ungerade.

Ich bemerke hier ausdrücklich, um jedem Angriffe zuvorzukommen, dafs ich keine der hier aufgestellten ***Formeln*** als neu beanspruche, wohl aber die ***Methode,*** durch welche die Relationen zwischen elliptischen, so wie zwischen Kreisfunctionen auf ***algebraische*** Relationen zurückgeführt werden. Das hier Gegebene ist als eine Anwendung dieser Methode auf die einfachsten und leichtesten Probleme anzusehen. Vielleicht finde ich bald Gelegenheit, in einer besondern Abhandlung theils die hier angestellten Untersuchungen weiter auszuführen, theils dieselbe Methode auf schwierigere und verborgenere Probleme anzuwenden.

Es wurde im Vorhergehenden häufig die Entwicklung von Functionen, wie (g, x), $(g, x+y)$ für einen unendlich kleinen Werth von x nach steigenden Potenzen von x verlangt. Diese Entwicklungen geschehen nach den Formeln

$$(g,x) = \frac{1}{x^g} + (g^*,0) - g(g+1^*,0)x + \frac{g(g+1)}{2}(g+2^*,0)x^2 - \text{etc.},$$

$$(g,x+y) = (g,y) - g(g+1,y)x + \frac{g(g+1)}{2}(g+2,y)x^2 - \text{etc.},$$

welche gelten, so lange $M(x)$ kleiner bleibt, als der kleinste (von Null verschiedene) Werth von $M(w)$, resp. $M(w+y)$; für einen beliebigen Werth von x müssen im Allgemeinen diejenigen Termen von $(g, x+y)$, für welche

$M(w+y) < M(x)$, und deren Anzahl endlich ist, nach ***absteigenden***, alle übrigen Termen, für welche $M(w+y) > M(x)$ ist, nach ***aufsteigenden*** Potenzen von x entwickelt werden. Man erhält auf diese Weise, nach den verschiedenen Intervallen, in welchen sich $M(x)$ befinden kann und welche durch die Werthe von $M(w+y) = M(\alpha m+\beta n+y)$ als Grenzwerthe von einander geschieden sind, unendlich viele verschiedene Entwicklungen von $(g, x+y)$. Der Kürze wegen setze ich den speciellen Fall bei Seite, wenn $M(x)$ mit einem der Werthe von $M(w+y)$ zusammenfällt; w ist immer $= \alpha m+\beta n$ und $(g, x+y) = \sum_{m,n} \frac{1}{(w+x+y)^g}$.

IV. ***Zu §. 7.*** Bei Gelegenheit der neuen Beweise der Reciprocitätssätze für die Reste der vierten und sechsten Potenzen, welche ich in §. 7. gegeben habe, komme ich für einen Augenblick auf meine ersten, aus der Theorie der Kreistheilung gezogenen und im 27ten und 28ten Bande dieses Journals publicirten Beweise des cubischen und biquadratischen Fundamentaltheorems zurück. Nach der Notiz des Hrn. Prof. ***Jacobi***, Seite 172 des 30ten Bandes dieses Journals, welche sich auf jene ersten Beweise bezieht und wie folgt lautet:

„Diese aus vielfach verbreiteten Nachschriften der oben erwähnten Vor-
„lesungen (an der Königsberger Universität) auch den Herren Professoren
„***Dirichlet*** und ***Kummer*** seit mehreren Jahren bekannten Beweise sind
„neuerdings von Hrn. Dr. ***Eisenstein*** im 27ten Bande dieses Journals
„S. 289 und im 28ten Bande desselben Journals S. 53 publicirt worden.
„Der S. 41 des 28ten Bandes von Hrn. Dr. ***Eisenstein*** gegebene Beweis
„des quadratischen Reciprocitätssatzes ist der nämliche, welchen ich im
„Jahre 1827 ***Legendre*** mitgetheilt und dieser in die 3te Ausgabe seiner
„Zahlentheorie aufgenommen hat"

könnte auf mich der Verdacht fallen, als seien meine Beweise nichts anderes, als vielleicht Abschriften oder Ausarbeitungen der erwähnten Collegienhefte. Dem mufs ich mit der Bemerkung widersprechen, dafs mir, zu der Zeit als ich, nur mit geringen Hülfsmitteln versehen (wie die Werke von ***Gaufs*** und einige Bände dieses Journals), so wie abgeschnitten von aller mündlichen, so wie schriftlichen mathematischen Unterweisung, resp. Correspondenz, jene Beweise fand und herausgab, die betreffenden Untersuchungen des Hrn. Prof. ***Jacobi*** gänzlich unbekannt waren, und dafs ich auch bis auf den heutigen Tag keine Gelegenheit gefunden habe, irgend eines der erwähnten Collegienhefte mit Mufse einer Durchsicht zu unterwerfen. Ich halte es um so mehr für überflüssig, mich

auf nähere Einzelnheiten in dieser Beziehung einzulassen, als meine spätern Arbeiten über denselben Gegenstand die Selbstständigkeit meiner Forschungen zur Genüge darthun mögen, und als ich schon bei der Publication meiner ersten Beweise auseinandergesetzt habe, wie dieselben aus dem Studium der Werke Dessen entstanden sind, welcher als der Schöpfer und Begründer der ganzen Theorie, von welcher diese Beweise einen Theil ausmachen, zu betrachten ist. Wer den ganzen mathematischen Zustand hier in Berlin zu jener Zeit gekannt hat, wird mir Gerechtigkeit widerfahren lassen; ich bin überzeugt, dafs von den oft angezogenen Collegienheften damals kein einziges hier zu finden gewesen wäre. Jene Bemerkung des Hrn. Prof. ***Jacobi*** war mir aber um so schmerzlicher, als sie mich ganz unerwartet traf, und als ich mich durch das Wohlwollen, mit welchem mich der grofse Gelehrte selbst noch lange Zeit nach der Publication jener meiner ersten Arbeiten beehrte und erfreute, so wie durch die Bewunderung der unschätzbaren wissenschaftlichen Verdienste des grofsen Mannes, zur Dankbarkeit ihm verpflichtet fühle. Endlich ist der in obiger Notiz erwähnte Beweis des quadratischen Reciprocitätssatzes vom Jahre 1827, abgesehen von einer rein äufserlichen Unterschiedenheit, kein anderer als der sechste ***Gaufs***ische Beweis, welchen ***Gaufs*** im Jahre 1818 in den ***Goettinger Commentationes (recentiores)*** dargestellt hat; der Unterschied besteht nämlich darin, dafs ***Gaufs*** zeigt, die Differenz zweier ganzen Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ von x sei durch $\frac{1-x^p}{1-x} = X$ theilbar, während in der andern Darstellung desselben Beweises, auf welche sich Hr. Prof. ***Jacobi*** bezieht, gezeigt wird, dafs die ganze Function $\varphi(x) - \psi(x)$ verschwindet für alle Werthe von x, die $X = 0$ machen; was offenbar Dasselbe ist.

Berlin im September 1847.

12.

Aufgaben und Lehrsätze.

(Von Herrn Dr. phil. *G. Eisenstein*, Privatdocent zu Berlin.)

1. Es sei F eine homogene ganze Function $n$ten Grades mit 2 Variabeln; ihre Coëfficienten seien $a, b, c, \ldots$ und ihre beiden Variabeln x, y. Setzt man $x = \alpha\xi + \beta\eta$ und $y = \gamma\xi + \delta\eta$, wo $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, so geht F in eine transformirte Function F' mit den Variabeln ξ, η über, deren Coëfficienten ich durch $a', b', c', \ldots$ bezeichne; $a', b', c', \ldots$ sind homogene Verbindungen aus $a, b, c, \ldots$ vom ersten, und sie sind zugleich homogen in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vom $n$ten Grade. Jede homogene ganze Function $\varphi(a, b, c, \ldots)$ der Coëfficienten, welche der Relation

$$\varphi(a', b', c', \ldots) = \varphi(a, b, c, \ldots)$$

genügt, heifse *eine Determinante* der Form F. Es läfst sich nun immer eine Anzahl von *Fundamental-Determinanten* aufstellen, aus welchen alle andern Determinanten algebraisch zusammengesetzt werden können, welche zugleich die einfachsten ihrer Art sind und selbst aus einander nicht zusammengesetzt werden können. Wie grofs ist die Anzahl dieser Fundamental-Determinanten für ein gegebenes n, und wie werden sie gebildet? Herr *Cayley* aus Cambridge, der Erste, welcher so viel ich weifs, dieses Problem in Anregung gebracht hat, vermuthet, dafs diese Anzahl entweder $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ sei, je nachdem n gerade oder ungerade ist, ohne jedoch einen strengen Beweis dieses Satzes gefunden zu haben. — Wenn man ferner alle Coëfficienten der Formen, so wie die Transformations-Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als ganze Zahlen annimmt, so behalten die Fundamental-Determinanten für alle untereinander äquivalente Formen, also für eine ganze Classe von Formen, sämmtlich dieselben Werthe: es soll nun bewiesen werden, dafs die Anzahl der Classen homogener Formen $n$ten Grades mit 2 Variabeln, welche zu demselben System gegebener Werthe der sämmtlichen Fundamental-Determinanten gehören, endlich ist, und es soll die Art der Abhängigkeit der Anzahl der Classen von den Werthen der Fundamental-Determinanten erforscht werden. — Endlich sollen alle homogenen Verbindungen $f(a, b, c, \ldots, x, y)$ von x, y, deren Coëfficienten von $a, b, c, \ldots$ abhangen, aufgestellt werden, welche in ihre correspondirenden $f(a', b', c', \ldots \xi, \eta)$ durch die Transformation über-

gehen, und welche ich determinirende Verbindungen der Form F nenne. Ich habe gezeigt, dafs für $n=3$ eine determinirende Verbindung zweiten Grades existirt; *Cayley's* fruchtbare Principien liefern eine Menge von determinirenden Verbindungen.

2. Dieselben Untersuchungen in Bezug auf homogene Functionen von mehr als 2 Variabeln.

3. Wenn $m=a+bi$ eine ungerade complexe ganze Zahl ist, und x_1, x_2 irgend zwei der a^2+b^2-1 von Null verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$m\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = 4\int_0^1 \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^4)}}$$

bezeichnen, so läfst sich bekanntlich x_1 als rationale gebrochene Function von x_2 mit ganzen complexen Coëfficienten darstellen; es läfst sich aber auch, wie noch nicht bekannt zu sein scheint, x_1 als *ganze* Function von x_2 darstellen, deren Coëfficienten, wenn sie auch nicht ganze Zahlen sind, doch nur Potenzen von 2 zu Nennern haben, d. h. es läfst sich immer ein ganzer Exponent μ finden, *so dafs $2^\mu . x_1$ einer ganzen Function von x_2 mit ganzen complexen Coëfficienten gleich ist;* der Grad dieser ganzen Function kann immer $\leqq a^2+b^2-2$ gemacht werden. Jede ganze Function mit ganzen complexen Coëfficienten der sämmtlichen a^2+b^2-1 Wurzeln der obigen Gleichung läfst sich daher, wenn man sie zuvor mit einer geeigneten Potenz von 2 multiplicirt, als ganze Function einer einzigen dieser Wurzeln mit *ganzen* complexen Coëfficienten darstellen; und zwar kann dies nur auf eine Art geschehen, wenn der Grad der letzteren ganzen Function $\leqq a^2+b^2-2$ angenommen wird.

4. Wenn ein und dieselbe Function zweien verschiedenen Differentialgleichungen genügt: die einfachste Differentialgleichung für diese Function zu finden.

Druckfehler in diesem Bande.

S. 127 Z. 6 v. o. st. Factoren l. Primfactoren
— 154 — 2 v. u. st. reelle Theil l. Coëfficient von i
— 181 — 9 v. u. st. führen, sind l. führen
— 182 — 2 v. u. st. vierte l. dritte
— 186 — 8 v. u. st. Determinate l. Determinante
— 189 — 12 v. o. st. das Folgende l. die folgende
— 221 — 6 v. u. st. $\frac{1}{(x-\alpha)^\varepsilon}$ l. $\frac{1}{(x-c)^\varepsilon}$
— 240 — 12 v. u. fehlt in der Formel der Factor $\varphi(x)$
— 251 — 17 v. o. st. Acht hat l. berücksichtigt

13.

Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis.

(Auctore Dr. *A. Göpel.*)

Quum theoria transcendentium *Abelianarum* jam inde a longo tempore geometras defatigaverit, cujus rei hice annales et praemium anno praeterito ab Academ. Paris. propositum testes sunt amplissimi, ita et ipse ante hos septem vel octo annos nonnulla in hac re excogitavi. Etenim quum functionibus ellipticis operam darem, statim deprehendi eas methodo ab *Abeliana* illa et *Jacobiana* omnino diversa tractari posse. Neque longum fuit quin animadverterem, hanc methodum quaestiones multo generaliores amplecti et fundamentum esse theoriae transcendentium *Abelianarum*, imo omnium quae ex integratione quantitatum algebraicarum oriuntur. Has meas lucubrationes cum geometris communicare in dies distuli, sperans ut aliquando tempus daretur, quo dissertationem accurate elaboratam et attentione doctorum dignam offerre possem; praesertim quum analystarum neminem talem tractationem ne suspicari quidem viderem. Verumtamen prodierunt nuperrime in lucem binae epistolae D^{i} *Hermite* tribus annis abhinc ad D^{m} *Jacobi* datae (cf. T. 33 hujus diarii) in quibus quum plura doctissime de transcendentibus altioribus disputavit, tum nonnulla e theoria functionum ellipticarum proposuit, quae meis tam similia erant, ut mihi eandem viam ingredi videretur, quam ipse absolveram. Quamobrem, ne mea obsolescerent, incomte quam omnino nihil dicere malui; quanquam doctissimus vir se idem in theoria transcendentium *Abelianarum* adhuc praestare non posse fassus est. Constitui itaque, editore hujus diarii humanissime admonente, theoriae novae specimen aliquod tradere, quantulumcunque est; in quo conscribendo quum magis quam optabam festinandum fuisset, si quid minus lucide et concinne dictum est, veniam lectoris pro sua benevolentia et illa rei conditione imprecor. Viam autem, quam hic geometris patefeci, aliis persequendam et excolendam relinquo, fortunatis, quibus „Deus haec otia fecit."

Praeliminaria.

Constat ex elementis, quamlibet expressionem quadraticam binarum variabilium $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, qualis est

$$(1.) \qquad \alpha\mathfrak{a}^2+2\beta\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\gamma\mathfrak{b}^2+2\delta\mathfrak{a}+2\varepsilon\mathfrak{b}+\zeta,$$

adjecta idonea constante, transformari posse in summam duorum quadratorum:

$$(2.) \qquad (u+\mathfrak{a}K+\mathfrak{b}L)^2+(u'+\mathfrak{a}K'+\mathfrak{b}L')^2.$$

Quod in theoria sectionum conicarum est problema de reductione aequationis ad centrum et diametros. Excipiendus autem est casus, ubi $\beta^2=\alpha\gamma$ quae aequivalet conditioni $KL'-K'L=0$, qui talem transformationem non patitur. Nam quum in universum habeatur

$$X^2+Y^2=\left(\frac{pX+qY}{\sqrt{(p^2+q^2)}}\right)^2+\left(\frac{qX-pY}{\sqrt{(p^2+q^2)}}\right)^2,$$

expressio (2.) eo casu reduci potest ad formam

$$\left(\frac{K'u-Ku'}{\sqrt{(K^2+K'^2)}}\right)^2+\left(\frac{Ku+K'u'+\mathfrak{a}(K^2+K'^2)+\mathfrak{b}(KL+K'L')}{\sqrt{(K^2+K'^2)}}\right)^2$$

quae manifesto locum habere nequit, nisi est $\beta^2=\alpha\gamma$, et adjecta idonea constante revera unum tantum quadratum continet. Hunc itaque casum, ubi $KL'-K'L$ evanescit, etiam hoc loco excipimus atque e nostris disquisitionibus excludimus.

Constantibus, quae sunt in expressione (2.), speciem paulo diversam tribuere placet. Loco enim ipsorum u, K, L, u', K', L' ponemus $u\sqrt{r}$, $2K\sqrt{r}$, $2L\sqrt{r}$, $u'\sqrt{r'}$, $2K'\sqrt{r'}$, $2L'\sqrt{r'}$, et considerabimus formulam

$$(3.) \qquad r(u+2\mathfrak{a}K+2\mathfrak{b}L)^2+r'(u'+2\mathfrak{a}K'+2\mathfrak{b}L')^2.$$

Jam patet, quod omnium quae sequuntur fundamentum est, si variabilis $\mathfrak{a}$ unitate augeatur, idem esse ac si quantitas u capiat incrementum $2K$ *simul*que u' incrementum $2K'$. Item si variabilis $\mathfrak{b}$ unitate augeatur, idem esse ac si quantitates u, u' *simul* capiant incrementa $2L, 2L'$. Quare si formatur complexus terminorum, qui ex expressione (3.) pro singulis valoribus integris indicum $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ oriuntur, manifestum est, hunc complexum, positis $u+2K$, $u'+2K'$ pro u, u' (vel etiam $u+2L$, $u'+2L'$ pro u, u'), ipsum in se redire, quoniam quivis terminus in proximum abit. Idem omnino valet de complexu terminorum, qui ex qualibet functione expressionis (3.) pro singulis valoribus integris indicum $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ proveniunt.

Expositio problematis.

Fingatur itaque series bis infinita, cujus terminus generalis sit functio exponentialis ipsius expressionis (3.), quae denotetur per $e^{ru^2+r'u'^2}\boldsymbol{P'''}(u,u')$,

$$e^{ru^2+r'u'^2}\boldsymbol{P'''}(u,u') = \boldsymbol{S}e^{r(u+2\mathfrak{a}K+2\mathfrak{b}L)^2+r'(u'+2\mathfrak{a}K'+2\mathfrak{b}L')^2}$$

sive explicite

$$e^{ru^2+r'u'^2}\boldsymbol{P'''}(u,u') =$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc}
\cdots & + & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
\cdots & + e^{r(u-2K-2L)^2+r'(u'-2K'-2L')^2} & + e^{r(u-2L)^2+r'(u'-2L')^2} & + e^{r(u+2K-2L)^2+r'(u'+2K'-2L')^2} & + \cdots \\
\cdots & + e^{r(u-2K)^2+r'(u-2K')^2} & + e^{ru^2+r'u'^2} & + e^{r(u+2K)^2+r'(u'+2K')^2} & + \cdots \\
\cdots & + e^{r(u-2K+2L)^2+r'(u'-2K'+2L')^2} & + e^{r(u+2L)^2+r'(u'+2L')^2} & + e^{r(u+2K+2L)^2+r'(u'+2K'+2L')^2} & + \cdots \\
\cdots & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & &
\end{array}\right.$$

Ex antecedentibus constat hanc functionem ipsarum u et u' esse periodicam, ita ut pro valoribus simultaneis

$$\left\{\begin{array}{l} u = u+2K,\quad u+4K,\quad \text{etc.},\quad u+2L,\quad u+4L,\quad \text{etc.}, \\ u' = u'+2K',\quad u'+4K',\quad \text{etc.},\quad u'+2L',\quad u'+4L',\quad \text{etc.} \end{array}\right.$$

in se ipsa redeat. Juvat autem valores, quos illa pro intermediis *argumentorum* u et u' valoribus accipit, peculiaribus notis insignire. Itidem seriebus, quae ex iisdem terminis, alternantibus tamen signis, compositae sunt, sua signa dabimus. Hoc modo oriuntur sedecim functiones ipsarum u et u', quas sequenti modo denotamus:

(4.)
$$\left\{\begin{array}{ll}
e^{ru^2+r'u'^2}\boldsymbol{P}(u,u') & = \boldsymbol{S}(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}e^{r(u+2\mathfrak{a}K+2\mathfrak{b}L)^2+r'(u'+2\mathfrak{a}K'+2\mathfrak{b}L')^2} \\
e^{ru^2+r'u'^2}\boldsymbol{P'}(u,u') & = \boldsymbol{S}(-1)^{\mathfrak{b}}\times \text{ in eundem factorem} \\
e^{ru^2+r'u'^2}\boldsymbol{P''}(u,u') & = \boldsymbol{S}(-1)^{\mathfrak{a}}\times \text{ in eundem} \\
e^{ru^2+r'u'^2}\boldsymbol{P'''}(u,u') & = \boldsymbol{S}\quad 1\quad \times \text{ in eundem} \\
e^{ru^2+r'u'^2}i\boldsymbol{Q}(u,u') & = \boldsymbol{S}(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}e^{r(u+(2\mathfrak{a}+1)K+2\mathfrak{b}L)^2+r'(u'+(2\mathfrak{a}+1)K'+2\mathfrak{b}L')^2} \\
e^{ru^2+r'u'^2}\boldsymbol{Q'}(u,u') & = \boldsymbol{S}(-1)^{\mathfrak{b}}\times \text{ in eundem} \\
e^{ru^2+r'u'^2}i\boldsymbol{Q''}(u,u') & = \boldsymbol{S}(-1)^{\mathfrak{a}}\times \text{ in eundem} \\
e^{ru^2+r'u'^2}\boldsymbol{Q'''}(u,u') & = \boldsymbol{S}\quad 1\quad \times \text{ in eundem} \\
e^{ru^2+r'u'^2}i\boldsymbol{R}(u,u') & = \boldsymbol{S}(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}e^{r(u+2\mathfrak{a}K+(2\mathfrak{b}+1)L)^2+r'(u'+2\mathfrak{a}K'+(2\mathfrak{b}+1)L')^2} \\
e^{ru^2+r'u'^2}i\boldsymbol{R'}(u,u') & = \boldsymbol{S}(-1)^{\mathfrak{b}}\times \text{ in eundem} \\
e^{ru^2+r'u'^2}\boldsymbol{R''}(u,u') & = \boldsymbol{S}(-1)^{\mathfrak{a}}\times \text{ in eundem} \\
e^{ru^2+r'u'^2}\boldsymbol{R'''}(u,u') & = \boldsymbol{S}\quad 1\quad \times \text{ in eundem}
\end{array}\right.$$

$$(4.)\quad \begin{cases} e^{ru^2+r'u'^2}S(u,u') &= S(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}e^{r(u+(2\mathfrak{a}+1)K+(2\mathfrak{b}+1)L)^2+r'(u'+(2\mathfrak{a}+1)K'+(2\mathfrak{b}+1)L')^2} \\ e^{ru^2+r'u'^2}iS'(u,u') &= S(-1)^{\mathfrak{b}}\times \text{ in eundem} \\ e^{ru^2+r'u'^2}iS''(u,u') &= S(-1)^{\mathfrak{a}}\times \text{ in eundem} \\ e^{ru^2+r'u'^2}S'''(u,u') &= S\quad 1\quad \times \text{ in eundem.} \end{cases}$$

Sed quum argumentorum et periodorum duplicitate major, quam commodum est, molestia scribentibus et legentibus creetur, abbreviationibus nonnunquam utemur. Ita pro $P(u,u')$ simplicius scribemus P vel $P(u)$. Similiter in quantitatibus exponentialibus eam partem, quae ad secundum argumentum u' spectat, saepius omittemus, ita ut $e^{r(u+2\mathfrak{a}K+2\mathfrak{b}L)^2+\cdots}$ sit pro $e^{r(u+2\mathfrak{a}K+2\mathfrak{b}L)^2+r'(u'+2\mathfrak{a}K'+2\mathfrak{b}L')^2}$; $e^{4r\mathfrak{a}Ku+4r\mathfrak{a}^2K^2+\cdots}$ pro $e^{4r\mathfrak{a}Ku+4r\mathfrak{a}^2K^2+4r'\mathfrak{a}K'u'+4r'\mathfrak{a}^2K'^2}$; $P(u+A)$ pro $P(u+A,u'+A')$ et cetera.

Hisce positis, oportet proprietates functionum P, Q, etc. investigare et relationes algebraicas vel differentiales inter illas invenire *).

Periodicitas functionum P, Q, etc. duplex; functionum $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q}$, etc. quadruplex.

Quemadmodum in antecedentibus functionem $e^{ru^2+r'u'^2}P'''$ duplici periodo $2K$, $2L$ (cum correspondentibus $2K'$, $2L'$) gaudere vidimus, ita etiam functiones $e^{ru^2+r'u'^2}Q'''$, $e^{ru^2+r'u'^2}R'''$, $e^{ru^2+r'u'^2}S'''$ eadem gaudere in promptu est. Reliquae autem, quarum termini alternantia signa habent, applicatis illis periodis ex parte signum mutant, sicut tabula infra apposita demonstrat. Functio ex. gr. $e^{ru^2+r'u'^2}iQ$, positis $u+2K$, $u'+2K'$ pro u, u', in sequentem abit

$$e^{r(u+2K)^2+\cdots}iQ(u+2K) = S(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}e^{r(u+(2\mathfrak{a}+3)K+2\mathfrak{b}L)^2+\cdots}$$

sive posito $\mathfrak{a}-1$ pro $\mathfrak{a}$, unde nihil mutatur, in

$$\begin{aligned} e^{r(u+2K)^2+\cdots}iQ(u+2K) &= S(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+1}e^{r(u+(2\mathfrak{a}+1)K+2\mathfrak{b}L)^2+\cdots} \\ &= -e^{ru^2+\cdots}iQ. \end{aligned}$$

Periodo autem iterum applicata, signum iterum mutatur et functio nostra in pristinum statum revertitur, ita ut sit

$$e^{r(u+4K)^2+\cdots}Q(u+4K) = e^{ru^2+r'u'^2}Q.$$

Functiones itaque $e^{ru^2+r'u'^2}P$, etc. *mutatis* u, u' *in* $u+4K$, $u'+4K'$, *vel in* $u+4L$, $u'+4L'$ *nihil mutantur.* Quod primum est.

Verumtamen etiam functionibus ipsis P, Q, etc. suae sunt periodi, ab illis diversae. Divisis enim aequationibus (4.) utrimque per $e^{ru^2+r'u'^2}$, exponentes

*) Vix necessarium videtur peritos monere, simili modo functiones trium vel plurium argumentorum considerari posse; quae ad theoriam altiorum transcendentium perducunt.

singulorum terminorum fiunt expressiones *lineares* ipsarum u et u'. Erit ex. gr.

$$S = S(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} e^{2(2\mathfrak{a}+1)(rKu+r'K'u')+2(2\mathfrak{b}+1)(rLu+r'L'u')+r((2\mathfrak{a}+1)K+(2\mathfrak{b}+1)L)^2+r'((2\mathfrak{a}+1)K'+(2\mathfrak{b}+1)L')^2}.$$

Quamobrem facile invenientur binae periodi $4A$ et $4B$ (cum correspondentibus $4A'$ et $4B'$), quibus applicatis quivis terminus in se ipse redeat. Debebit enim esse

$$(5)\quad \begin{cases} 4rAK+4r'A'K' = \pi i, & 4rAL+4r'A'L' = 0, \\ 4rBK+4r'B'K' = 0, & 4rBL+4r'B'L' = -\pi i, \end{cases}$$

unde fit

$$(6.)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\pi L' i}{4r(KL'-K'L)}, & A' = -\dfrac{\pi L i}{4r'(KL'-K'L)}, \\ B = \dfrac{\pi K' i}{4r(KL'-K'L)}, & B' = -\dfrac{\pi K i}{4r'(KL'-K'L)}. \end{cases}$$

Habentur itaque inter quadrantes A, B, K, L etc. relationes sequentes

$$AK' = BL', \qquad A'K = B'L.$$

Functiones itaque P, Q, etc. ***mutatis simul u, u' in $u+4A$, $u'+4A'$ vel in $u+4B$, $u'+4B'$ nihil mutantur.*** Quod secundum est *).

Quotientes $\frac{P}{Q}$, etc. manifesto habent periodos $4A$ et $4B$, quae singulis functionibus P, Q, etc. conveniunt. Sed est $\frac{P}{Q} = \frac{e^{ru^2+r'u'^2}P}{e^{ru^2+r'u'^2}Q}$, et similes. Unde quotiens $\frac{P}{Q}$ habet etiam periodos, quae singulis $e^{ru^2+r'u'^2}P$, $e^{ru^2+r'u'^2}Q$, etc. conveniunt; hasce dico $4K$ et $4L$.

Quotientes itaque binarum e functionibus P, Q, etc. quadrupliciter periodici sunt et mutatis simul u, u' in $u+4A$, $u'+4A'$, vel in $u+4B$, $u'+4B'$, vel in $u+4K$, $u'+4K'$ vel in $u+4L$, $u'+4L'$ nihil mutantur. Quod tertium est.

Quamvis autem in universum argumenta per integras periodos ($4A$ vel $4B$, vel etc.) incedere debeant, ut functiones P, Q, etc. vel $e^{ru^2+r'u'^2}P$, etc. eosdem valores accipiant, sunt tamen nonnullae, quae post dimidias jam periodos in se revertuntur; cujus rei supra vidisti exemplum. En tabulam conspectum mutationum offerentem, quas illae crescentibus argumentis per dimidias periodos subeunt.

---

*) Videtur etiam tertia periodus $4b$ (et $4b'$) inveniri posse, siquidem ponitur

$$4rbK+4r'b'K' = \mu\pi i, \qquad 4rbL+4r'b'L' = \nu\pi i$$

existentibus μ et ν numeris integris. Sed invenitur $4b = 4\mu A - 4\nu B$, $4b' = 4\mu A' - 4\nu B'$; est itaque ex periodis $4A$, $4B$ conflata, itaque ab illis non diversa.

(7.)

	$2A$	$2B$	$2A+2B$	$2K$	$2L$	$2K+2L$
P	+	+	+	−	−	+
P'	+	+	+	+	−	−
P''	+	+	+	−	+	−
P'''	+	+	+	+	+	+
Q	−	+	−	−	−	+
Q'	−	+	−	+	−	−
Q''	−	+	−	−	+	−
Q'''	−	+	−	+	+	+
R	+	−	−	−	−	+
R'	+	−	−	+	−	−
R''	+	−	−	−	+	−
R'''	+	−	−	+	+	+
S	−	−	+	−	−	+
S'	−	−	+	+	−	−
S''	−	−	+	−	+	−
S'''	−	−	+	+	+	+ .

Hinc ex. gr. facile desumitur esse $Q(u+2B)=Q$, $Q(u+2A+2B)=-Q$. Hoc tamen probe tenendum est, signa sub rubricis $2K$, $2L$, $2K+2L$ adnotata non referri ad ipsas functiones P, Q, etc., sed ad hasce $e^{ru^2+r'u'^2}P$, etc. Invenietur itaque ex. gr. non $Q(u+2L)=-Q(u)$, sed

$$e^{r(u+2L)^2+r'(u+2L')^2}Q(u+2L) = -e^{ru^2+r'u'^2}Q(u)$$

vel si mavis

$$e^{4rLu+4rL^2+\cdots}Q(u+2L) = -Q(u).$$

Nexus inter sedecim functiones P, Q, etc. quoad argumenta.

Functiones $e^{ru^2+r'u'^2}P'''$, $e^{ru^2+r'u'^2}Q'''$, $e^{ru^2+r'u'^2}R'''$, $e^{ru^2+r'u'^2}S'''$ hoc modo alteras ex altera deduximus, ut argumenta u, u' quadrantibus periodorum (K, L, $K+L$ cum correspondentibus K', L', $K'+L'$) augeremus; de quo retrospicias ad aeqq. (4.). Idem valet de quaternis illis functionibus, quae vel duabus plagulis, vel una, vel nulla notatae sunt. Prorsus simili modo ex hisce P''', Q''', R''', S''' deduci possunt aliae, si argumenta quadrantibus A, B et $A+B$ (cum correspondentibus) augeatur. Quod si facis, in ipsas illas functiones P, P', P'', Q, etc. incidis, quas supra definivimus (vid. aeqq. (4.)); unde manifestum fit, non temere nos tales functiones introduxisse, quarum ter-

mini alternantibus signis affecti sint. Etenim quum habeatur ex. gr.

$$iQ = S(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} e^{2(2\mathfrak{a}+1)(rKu+r'K'u')+4\mathfrak{b}(rLu+r'L'u')+a},$$

ubi a est constans, qua hoc loco non est opus, fit adhibitis aeqq. (5.)

$$iQ(u+A) = iS(-1)^{\mathfrak{b}} e^{2(2\mathfrak{a}+1)(rKu+r'K'u')+4\mathfrak{b}(rLu+r'L'u')+a},$$
$$iQ(u+B) = S(-1)^{\mathfrak{a}} e^{2(2\mathfrak{a}+1)(rKu+r'K'u')+4\mathfrak{b}(rLu+r'L'u')+a},$$

ergo e notatione nostra

$$Q(u+A) = Q', \qquad Q(u+B) = Q''.$$

Sequens tabula mutationes ante oculos ponit, quas functiones post quadrantes periodorum patiuntur:

(8.)

	A	B	$A+B$	K	L	$K+L$
P	P'	P''	P'''	iQ	iR	S
Q	Q'	Q''	Q'''	iP	$-iS$	$-R$
R	R'	$-R''$	$-R'''$	$-iS$	iP	$-Q$
S	$-S'$	S''	S'''	$-iR$	$-iQ$	P
P'	P	P'''	P''	Q'	iR'	iS'
Q'	$-Q$	Q'''	$-Q''$	P'	iS'	iR'
R'	R	$-R'''$	$-R''$	S'	iP'	iQ'
S'	S	$-S'''$	S''	R'	iQ'	iP'

	A	B	$A+B$	K	L	$K+L$
P''	P'''	P	P'	iQ''	R''	iS''
Q''	Q'''	Q	Q'	iP''	S''	iR''
R''	R'''	R	R'	iS''	P''	iQ''
S''	S'''	$-S$	S'	iR''	Q''	iP''
P'''	P''	P_1'	P	Q'''	R'''	S'''
Q'''	$-Q''$	Q'	$-Q$	P'''	S'''	R'''
R'''	R''	R'	R	S'''	P'''	Q'''
S'''	$-S''$	S'	S	R'''	Q'''	P'''

De columnis, quae titulis K, L, $K+L$ inscriptae sunt, idem quod supra monendum est. Harum tabularum (7.) et (8.) maximus erit in sequentibus usus, quippe quarum ope ex data aequatione inter quantitates P, Q, etc. deducuntur quindecim aliae, quae inde auctis argumentis oriuntur. Ceterum in medio est, quomodo tabula (7.) ex (8.) derivari possit.

Valores argumentorum pro quibus sedecim functiones P, Q, etc. evanescunt.

Inter functiones P, Q, etc. decem sunt ordinis paris respectu variabilium simultanearum u, u'; videlicet P, P', P'', P'''; Q', Q'''; R'', R'''; S, S'''; reliquae sex imparis, nimirum Q, Q''; R, R'; S' S''. Ordinis autem paris ad similitudinem functionum algebraicarum eas dicimus, quae mutatis u, u' in $-u$, $-u'$ non mutantur; imparis quae signum mutant. Decem itaque illae evolvi poterunt in series hujusmodi

$$\alpha+(\beta u^2+\beta_1 uu'+\beta_2 u'^2)+(\gamma u^4+\gamma_1 u^3u'+\gamma_2 u^2u'^2+\gamma_3 uu'^3+\gamma_4 u'^4)+\text{ etc.:}$$

reliquae sex in tales

$$(\alpha u+\alpha_1 u')+(\beta u^3+\beta_1 u^2u'+\beta_2 uu'^2+\beta_3 u'^3)+\text{ etc.}$$

Quod ex ipsa expressionum (4.) forma cognoscere licet. Nam fit ex gr.

$$e^{ru^2+r'u'^2}iQ(-u,-u') = S(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}e^{r(u-(2\mathfrak{a}+1)K-2\mathfrak{b}L)^2+\cdots};$$

hinc positis $-\mathfrak{a}-1$, $-\mathfrak{b}$ pro $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, quod salvo valore facere licet,

$$e^{ru^2+r'u'^2}iQ(-u,-u') = S(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}e^{r(u+(2\mathfrak{a}+1)K+2\mathfrak{b}L)^2+\cdots},$$

ergo $Q(-u,-u') = -Q(u,u')$. Similiter erit de functione Q''. Reliquae autem binae Q', Q''', quum singulis terminis signum $(-1)^{\mathfrak{a}}$ non sit praefixum, immutatae manent.

Hinc intelligitur, istas sex functiones imparis ordinis evanescere pro $u=0$, $u'=0$; bini enim termini se destruunt. Sed quum quaelibet harum functionum tabulae (8.) ope in reliquas quinque mutari possit, oportet eam etiam pro quinque aliis valoribus evanescere. Ita quum ex tabula (8.) habeatur

$$R'(u+A+B) = -R''(u),$$

$$e^{r(u+K+L)^2+\cdots}R''(u+K+L) = e^{ru^2+\cdots}iQ''(u)$$

fit propter $Q''(0)=0$, etiam

$$R''(K+L)=0, \text{ nec non } R'(A+B+K+L)=0.$$

Hinc nascitur tabula exhibens valores, pro quibus sedecim functiones P, Q, etc. evanescunt.

(9.)

Q	Q''	R	R'	S'	S''	P	P'
0	0	0	0	0	0	K	L
B	B	A	A	K	L	L	$A+K$
$A+L$	L	$A+K$	K	$A+K$	$A+B$	$A+L$	$A+L$
$K+L$	$A+B+L$	$B+K$	$A+B+K$	$A+L$	$B+K$	$B+K$	$K+L$
$B+L$	$B+K+L$	$K+L$	$A+L+K$	$A+B$	$B+L$	$A+K+L$	$A+B+K$
$A+K+L$	$A+B+K+L$	$B+K+L$	$A+B+L+K$	$A+B+L$	$A+B+K$	$B+K+L$	$A+B+K+L$

P''	P'''	Q'	Q'''	R''	R'''	S	S'''
K	$A+K$	A .	A	B	B	A	A
$B+K$	$B+L$	L	$A+B$	K	$A+B$	B	B
$B+L$	$A+B+K$	$A+B$	$A+L$	$A+B$	$A+K$	K	$A+L$
$K+L$	$A+B+L$	$K+L$	$B+L$	$K+L$	$B+K$	L	$B+K$
$A+B+L$	$A+K+L$	$A+B+L$	$B+K+L$	$A+B+K$	$A+K+L$	$A+B$	$A+B+K$
$A+B+K+L$	$B+K+L$	$A+K+L$	$A+B+K+L$	$B+K+L$	$A+B+K+L$	$K+L$	$A+B+L$

Monendum autem est primum, alteri argumento valores correspondentes 0, B', $A'+L'$, et sic porro tribuendos esse; secundum, functiones nostras propter periodicitatem etiam pro aliis et infinite multis valoribus evanescere;

eos dico, qui ex illis oriuntur additis semiperiodis $2A$, $2B$, $2K$ et $2L$. Quae consideratio etiam in construenda illa tabula adjumento fuit. Inventis enim sex valoribus argumentorum, qui ipsam Q nihilo aequalem reddant, quum sit $Q''(u+B) = Q(u)$, singulis addendus est quadrans B, ut inveniantur valores, pro quibus ipsa Q'' evanescit. Habentur itaque B, $2B$, $A+B+L$, $B+K+L$, $2B+L$, $A+B+K+L$, vel simplicius B, 0, $A+B+L$, $B+K+L$, L, $A+B+K+L$, quos in tabula legis. Et sic porro.

Animadvertisti in aequationibus (4.) notas functionales Q, Q'' etc., uno verbo eas, quae pro $u=0$, $u'=0$ annihilantur, factore imaginario i affectas esse. Quod quum arbitrarium esset, ideo factum est ut analogia functionum ellipticarum, quantum fieri posset, conservaretur. Consideratis enim quadrantibus K, L, sicut in illa theoria usuvenit, sub specie imaginaria Ki, Li, sedecim functiones nostrae sub specie reali exhiberi possunt, cujus ecce exempla:

$$P(u,u) = S(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} q^{\mathfrak{a}^2} q_1^{2\mathfrak{a}\mathfrak{b}} q_2^{\mathfrak{b}^2} \cos(2\mathfrak{a}x+2\mathfrak{b}x'),$$
$$Q(u,u) = S(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} q^{(\mathfrak{a}+\frac{1}{2})^2} q_1^{(2\mathfrak{a}+1)\mathfrak{b}} q_2^{\mathfrak{b}^2} \sin((2\mathfrak{a}+1)x+2\mathfrak{b}x'),$$

siquidem ponitur

$$2rKu+2r'K'u' = x, \qquad 2rLu+2r'L'u' = x',$$
$$e^{-4rK^2-4r'K'^2} = q, \qquad e^{-4rKL-4r'K'L'} = q_1, \qquad e^{-4rL^2-4r'L'^2} = q_2.$$

Relationes algebraicae inter functiones P, Q, etc.

Evolvantur quadrata ipsarum P, Q, etc. Quo facto invenietur, unumquodque lineariter per quatuor novas series exprimi posse. Datur itaque inter quina quadrata relatio linearis. Calculus autem hunc in modum se habet.

Ponatur

$$(10.) \qquad e^{ru^2+r'u'^2} X = S(-1)^{p\mathfrak{a}+q\mathfrak{b}} e^{r(u+(2\mathfrak{a}+\mu)K+(2\mathfrak{b}+\nu)L)^2+\ldots},$$

quae forma omnes illas (4.) amplectitur; tribuendo enim literis p, q, μ, ν omnem ex ordine combinationem valorum 0 et 1 nascuntur sedecim illae aequationes. Ponatur iterum, quod idem est,

$$e^{ru^2+r'u'^2} X = S(-1)^{p\mathfrak{a}_1+q\mathfrak{b}_1} e^{r(u+(2\mathfrak{a}_1+\mu)K+(2\mathfrak{b}_1+\nu)L)^2+\ldots}$$

et instituatur multiplicatio, quod fit multiplicando terminum generalem alterum per alterum. Hinc posito

$$(11.) \qquad \begin{cases} \mathfrak{a}+\mathfrak{a}_1 = \varepsilon, & \mathfrak{b}+\mathfrak{b}_1 = \vartheta, \\ \mathfrak{a}-\mathfrak{a}_1 = \varepsilon_1, & \mathfrak{b}-\mathfrak{b}_1 = \vartheta_1, \end{cases}$$

et advocata formula

$$x^2+y^2 = \tfrac{1}{2}(x-y)^2+\tfrac{1}{2}(x+y)^2,$$

prodit

$$(12.)\qquad e^{2ru^2+2r'u'^2}X^2 = S(-1)^{p\varepsilon+q\vartheta}\, e^{2r(\varepsilon_1 K+\vartheta_1 L)^2+\ldots.}\, e^{2r(u+(\varepsilon+\mu)K+(\vartheta+\nu)L)^2+\ldots.}.$$

Literis ε, ϑ, ε_1, ϑ_1 singuli deinceps valores integri tribuendi sunt, ea tamen conditione ut, quod aeqq. (11.) sibi postulant, ε et ε_1, item ϑ et ϑ_1, simul vel pares vel impares valores nanciscantur. Hinc patet, terminos seriei (12.) in quatuor genera distribui,

prout pares valores ipsius ε cum paribus ipsius ϑ combinantur
vel impares – – – ε cum paribus – –
vel pares – – – ε cum imparibus – –
vel impares – – – ε cum imparibus – –

Manifesto autem summa terminorum, qui ad idem genus pertinent, sub forma ducti e duabus seriebus hujusmodi exhiberi potest:

$$(13.)\qquad Se^{2r(\varepsilon_1 K+\vartheta_1 L)^2+\ldots.} \times Se^{2r(u+(\varepsilon+\mu)K+(\vartheta+\nu)L)^2+\ldots.},$$

namque factor $(-1)^{p\varepsilon+q\vartheta}$ pro terminis ejusdem generis idem manet.

Dispescitur itaque series (12.) in quatuor summandos ita:

$$(14.)\qquad e^{2ru^2+2r'u'^2}X = a_{00}+(-1)^p a_{10}+(-1)^q a_{01}+(-1)^{p+q}a_{11},$$

ubi a_{00} denotat valorem expressionis (13.) pro paribus valoribus ipsius ε cum paribus ipsius ϑ, a_{10} valorem ejusdem expressionis pro imparibus ipsius ε cum paribus ipsius ϑ, et sic porro.

Jam descendimus ad valores particulares ipsarum p, q, μ, ν, et posito brevitatis causa

$$(15.)\qquad \begin{cases} e^{2ru^2+2r'u'^2}T = Se^{2r(u+2\varepsilon K+2\vartheta L)^2+\ldots.}, \\ e^{2ru^2+2r'u'^2}U = Se^{2r(u+(2\varepsilon+1)K+2\vartheta L)^2+\ldots.}, \\ e^{2ru^2+2r'u'^2}V = Se^{2r(u+2\varepsilon K+(2\vartheta+1)L)^2+\ldots.}, \\ e^{2ru^2+2r'u'^2}W = Se^{2r(u+(2\varepsilon+1)K+(2\vartheta+1)L)^2+\ldots.}, \end{cases}$$

itemque istarum valoribus particularibus pro $u=0$, $u'=0$,

$$(16.)\qquad \begin{cases} t = Se^{2r(2\varepsilon K+2\vartheta L)^2+\ldots.}, \\ u = Se^{2r((2\varepsilon+1)K+2\vartheta L)^2+\ldots.}, \\ v = Se^{2r(2\varepsilon K+(2\vartheta+1)L)^2+\ldots.}, \\ w = Se^{2r((2\varepsilon+1)K+(2\vartheta+1)L)^2+\ldots.}, \end{cases}$$

invenimus aequationes sequentes*),

*) Experti facile providebunt, hasce aequationes ad transformationem secundi ordinis nostrarum functionum pertinere. Nam si in nostras notationes $P(u, u')$ etc. quantitatem r introducere volumus, ita ut audiant $P(u, u'; r)$, functiones illae T, U, V, W exhibentur hoc modo $P'''(u, u'; 2r)$, $Q'''(u, u'; 2r)$ etc. De quo infra.

$$(17.)\quad \begin{cases} P^2 = tT-uU-vV+wW, & R^2 = vT-wU-tU+uW, \\ P'^2 = tT+uU-vV-wW, & R'^2 = vT+wU-tV-uW, \\ P''^2 = tT-uU+vV-wW, & R''^2 = vT-wU+tV-uW, \\ P'''^2 = tT+uU+vV+wW, & R'''^2 = vT+wU+tV+uW, \\ Q^2 = uT-tU-wV+vW, & S^2 = wT-vU-uV+tW, \\ Q'^2 = uT+tU-wV-vW, & S'^2 = wT+vU-uV-tW, \\ Q''^2 = uT-tU+wV-vW, & S''^2 = wT-vU+uV-tW, \\ Q'''^2 = uT+tU+wV+vW, & S'''^2 = wT+vU+uV+tW. \end{cases}$$

Selectis itaque quatuor quibusvis e quadratis P^2, Q^2, etc., functiones T, U, V, W, ergo etiam reliqua duodecim quadrata poterunt per illa lineariter exprimi. Coëfficientes harum relationum pendebunt a valoribus constantibus t, u, v, w. Praestat autem valores particulares ipsarum P, Q, R, etc. introducere, quam alienas constantes. Quamobrem inveniendae sunt relationes inter t, u, v, w et inter valores, quos functiones P, Q, R, etc. pro $u=0$, $u'=0$ induunt, quos per correspondentes literas graecas easque minusculas significabimus. Id quod fit, ponendo in aeqq. (17.) $u=0$, $u'=0$.

Hinc habetur

$$(18.)\quad \begin{cases} \varpi^2 = t^2-u^2-v^2+w^2, \\ \varpi'^2 = t^2+u^2-v^2-w^2, \\ \varpi''^2 = t^2-u^2+v^2-w^2, \\ \varpi'''^2 = t^2+u^2+v^2+w^2, \end{cases}$$

$$(19.)\quad \begin{cases} k'^2 = 2tu-2vw, & k'''^2 = 2tu+2vw, \\ \varrho''^2 = 2tv-2uw, & \varrho'''^2 = 2tv+2uw, \\ \sigma^2 = 2tw-2uv, & \sigma'''^2 = 2tw+2uv. \end{cases}$$

Valores k, k'', ϱ, ϱ', σ', σ'' evanescunt, sicuti fieri debere supra vidimus. Ex (18. et 19.) deducuntur sequentes:

$$(20.)\quad \begin{cases} \varpi^2+\varpi'^2+\varpi''^2+\varpi'''^2 = 4t^2, \\ -\varpi^2+\varpi'^2-\varpi''^2+\varpi'''^2 = 4u^2, \\ -\varpi^2-\varpi'^2+\varpi''^2+\varpi'''^2 = 4v^2, \\ \varpi^2-\varpi'^2-\varpi''^2+\varpi'''^2 = 4w^2, \end{cases}$$

$$(21.)\quad \begin{cases} k'''^2+k'^2 = 4tu, & k'''^2-k'^2 = 4vw, \\ \varrho'''^2+\varrho''^2 = 4tv, & \varrho'''^2-\varrho''^2 = 4uw, \\ \sigma'''^2+\sigma^2 = 4tw, & \sigma'''^2-\sigma^2 = 4uv. \end{cases}$$

Eliminatis hinc ipsis t, u, v, w restant sex aequationes inter constantes ϖ, ϖ', etc., quarum itaque sex per reliquas quatuor inter se independentes exprimi poterunt. Verum hoc loco sufficiat, insigniores relationes inter ipsas apponere, quarum in posterum usus erit.

Ex aeqq. (21.) invenitur

$$(22.)\quad k'''^4 - k'^4 = \varrho'''^4 - \varrho'^4 = \sigma'''^4 - \sigma^4 \ (= 16\,tuvw).$$

Ex aeqq. (18.) et (19.) est

$$\varpi^2 + \sigma^2 = (t+w)^2 - (u+v)^2, \qquad \varpi^2 - \sigma^2 = (t-w)^2 - (u-v)^2,$$

ergo

$$(23.)\quad \left\{ \begin{array}{c} \varpi^4 - \sigma^4 = \varpi'^4 - k'^4 = \varpi''^4 - \varrho''^4 \\ (= (t+u+v+w)(t+u-v-w)(t-u+v-w)(t-u-v+w)). \end{array} \right.$$

Similiter invenitur

$$\varpi'''^4 - \varpi^4 = k'''^4 + \varrho''^4 = k'^4 + \varrho'''^4 \ (= 4(t^2+w^2)(u^2+v^2)),$$

et hinc adhibitis aeqq. (22.) et (23.)

$$(24.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \varpi'''^4 - \varpi'^4 = \varrho'''^4 + \sigma^4 = \varrho''^4 + \sigma'''^4, \\ \varpi'''^4 - \varpi''^4 = \sigma'''^4 + k'^4 = \sigma^4 + k'''^4. \end{array} \right.$$

Porro est $\varpi^2\varpi'''^2 - \varpi'^2\varpi''^2 = 4t^2w^2 - 4u^2v^2$; dehinc et similiter:

$$(25.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \varpi^2\varpi'''^2 - \varpi'^2\varpi''^2 = \sigma^2\sigma'''^2, \\ \varpi'^2\varpi'''^2 - \varpi''^2\varpi^2 = k'^2k'''^2, \\ \varpi''^2\varpi'''^2 - \varpi^2\varpi'^2 = \varrho''^2\varrho'''^2, \end{array} \right.$$

$$(26.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \varpi^2 k'''^2 - \varpi''^2 k'^2 = \varrho'''^2\sigma^2, \\ \varpi'^2 k'''^2 - \varpi'''^2 k'^2 = \varrho''^2\,\sigma^2, \\ \varpi''^2 k'''^2 - \varpi^2 k'^2 = \varrho''^2\,\sigma'''^2, \\ \varpi'''^2 k'''^2 - \varpi'^2 k'^2 = \varrho'''^2\sigma'''^2, \end{array} \right.$$

$$(27.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \varpi^2\varrho'''^2 - \varpi'^2\varrho''^2 = k'''^2\sigma^2, \\ \varpi'^2\varrho'''^2 - \varpi^2\varrho''^2 = k'^2\sigma'''^2, \\ \varpi''^2\varrho'''^2 - \varpi'''^2\varrho''^2 = k'^2\sigma^2, \\ \varpi'''^2\varrho'''^2 - \varpi''^2\varrho''^2 = k'''^2\sigma'''^2, \end{array} \right.$$

$$(28.)^*)\quad \left\{ \begin{array}{l} \varpi^2\sigma'''^2 - \varpi'''^2\sigma^2 = k'^2\varrho''^2, \\ \varpi'^2\sigma'''^2 - \varpi''^2\sigma^2 = k'^2\varrho'''^2, \\ \varpi''^2\sigma'''^2 - \varpi'^2\sigma^2 = k'''^2\varrho''^2, \\ \varpi'''^2\sigma'''^2 - \varpi^2\sigma^2 = k'''^2\varrho'''^2. \end{array} \right.$$

---

*) Aequationes (22 — 28.), si series dupliciter infinitas respicis, quae literis ϖ, $\varkappa$, ϱ, etc. denotantur, haud minus memorabiles sunt, quam illa una, quae in theoria functionum ellipti-

Aequationum (20. et 21.) ope quantitates t, u, v, w poterunt eliminari ex aeqq. (17.), quo facto eliminatis etiam ipsis T, U, V, W ex quinis, invenietur relatio cujus coëfficientes per constantes ϖ, ϖ', ... exprimuntur. Quae methodus nimium molestos calculos poscit. Semel autem cognita aequationum quaesitarum forma, ex. gr.

$$P^2 = aP'^2 + bS'^2 + cP''^2 + dS''^2,$$

res multo faciliori negotio per considerationem valorum particularium ipsorum u, u' absolvitur. Positis enim $u=0$, $u'=0$; vel $u=K$, $u'=K'$; vel similibus, mox habebitur tabulae (8.) ope sufficiens numerus aequationum, ex quibus coëfficientes a, b, c, d determinare liceat. Fit enim

pro $u = K$,	$u' = K'$ *);	$0 = ak'^2 - d\varrho''^2$,
pro $u = A+L$,	$u' = A'+L'$;	$0 = c\varrho''^2 + dk''^2$,
pro $u = B+K$,	$u' = B'+K'$;	$0 = ak''^2 + b\varrho''^2$,
pro $u = 0$,	$u' = 0$;	$\varpi^2 = a\varpi'^2 + c\varpi''^2$,
pro $u = A$,	$u' = A'$;	$\varpi'^2 = a\varpi^2 + b\sigma^2 + c\varpi''^2 + d\sigma''^2$.

Ex prioribus tribus statim concluditur esse $a = e\varrho'^2\varrho''^2$, $b = -e\varrho'^2 k''^2$, $c = -ek'^2 k''^2$, $d = ek'^2\varrho''^2$; quibus valoribus in quartam substitutis fit

$$\varpi^2 = e(\varpi'^2\varrho''^2\varrho'''^2 - \varpi''^2 k'^2 k'''^2),$$

sive propter aeqq. (25.)

$$\begin{aligned}\varpi^2 &= e(\varpi'^2(\varpi''^2\varpi'''^2 - \varpi^2\varpi'^2) - \varpi''^2(\varpi'^2\varpi'''^2 - \varpi''^2\varpi^2)) \\ &= -e\varpi^2(\varpi'^4 - \varpi''^4),\end{aligned}$$

unde $e = -\frac{1}{\varpi'^4 - \varpi''^4}$. Quodsi valores ipsarum a, b, c, d in aequationem quintam substituere mavis, habebis

$$\varpi'^2 = e(\varpi^2\varrho''^2\varrho'''^2 - \sigma^2\varrho''^2 k'''^2 - \varpi'''^2 k'^2 k'''^2 + \sigma'''^2 k'^2\varrho'''^2),$$

sive

$$\varpi'^2 = e(\varrho''^2(\varpi^2\varrho'''^2 - k'''^2\sigma^2) - k'^2(\varpi'''^2 k'''^2 - \varrho'''^2\sigma'''^2)),$$

quae propter primam ipsarum (27.) et ultimam ipsarum (26.) abit in hanc:

$$\varpi'^2 = e(\varpi'^2\varrho''^4 - \varpi'^2 k'^4) = e\varpi'^2(\varrho''^4 - k'^4),$$

---

carum earum locum tenet, videlicet

$$(1-2q+2q^4-2q^9+\ldots)^4+(2q^{\frac{1}{4}}+2q^{\frac{9}{4}}+2q^{\frac{25}{4}}+\ldots)^4 = (1+2q+2q^4+2q^9+\ldots)^4.$$

Cf. *Jacobi,* Theoria funct. ellipt. p. 184.

*) Data aequatione *homogenea* gradus m^{ti} inter quantitates P, Q, etc., licet etiam quadrantes K, L, $K+L$ applicare. Quod manifestum fit multiplicando aequationem per $e^{mru^2+m'r'u'^2}$.

et haec aeqq. (23.) gratia in sequentem

$$1 = -e(\varpi'^4 - \varpi''^4),$$

unde $e = -\frac{1}{\varpi'^4 - \varpi''^4}$, sicut supra. Functio itaque P^2 hunc in modum exprimitur

$$(29.) \quad (\varpi'^4 - \varpi''^4)P^2 = -\varrho''^2\varrho'''^2 P'^2 + \varrho''^2 k'''^2 S'^2 + k'^2 k'''^2 P''^2 - k'^2 \varrho'''^2 S''^2.$$

Ex hac deducuntur sequentes ope tabulae (8.) ponendo vicissim $u+K+L$, $u+A+B$, $u+A+B+K+L$ pro u:

$$(30.) \begin{cases} (\varpi'^4 - \varpi''^4)S^2 = -\varrho''^2 k'''^2 P'^2 + \varrho''^2\varrho'''^2 S'^2 + k'^2\varrho''^2 P''^2 - k'^2 k'''^2 S''^2, \\ (\varpi'^4 - \varpi''^4)P'''^2 = k'^2 k'''^2 P'^2 - k'^2\varrho'''^2 S'^2 - \varrho''^2\varrho'''^2 P''^2 + \varrho''^2 k'''^2 S''^2, \\ (\varpi'^4 - \varpi''^4)S'''^2 = k'^2\varrho'''^2 P'^2 - k'^2 k'''^2 S'^2 - \varrho''^2 k'''^2 S''^2 + \varrho''^2\varrho'''^2 S''^2. \end{cases}$$

Similiter similia:

$$(31.) \begin{cases} (\varpi'^4 - \varpi''^4)Q'^2 = \varpi'^2 k'^2 P'^2 - \varpi''^2\varrho''^2 S'^2 - \varpi''^2 k'^2 P''^2 + \varpi'^2\varrho''^2 S''^2, \\ (\varpi'^4 - \varpi''^4)R'^2 = -\varpi''^2\varrho''^2 P'^2 + \varpi'^2 k'^2 S'^2 + \varpi'^2\varrho''^2 P''^2 - \varpi''^2 k'^2 S''^2, \\ \text{et cetera.} \end{cases}$$

Quoniam hoc modo functiones P, Q, etc. algebraice ad quaslibet quaternas (dic P', S', P'', S'') reductae sunt, restat ut relationes inter has quatuor investigentur, quarum manifesto nulla inter quadrata P'^2, S'^2, P''^2, S''^2 locum habere potest; tunc enim aliquis coëfficientium a, b, c, d, quos jamjam determinavimus, indeterminatus evadere debuisset. Oportet itaque producta binarum PQ, PR, etc. considerare. Quem ad finem itidem multiplicatio terminorum generalium institui potest. Attamen quum praevidere liceat, hoc modo ad relationes lineares inter producta binarum perveniri, calculus simplicissimus consideratione sequente perficitur.

Si datur relatio inter producta binarum, talis ex. gr.

$$PS = aP'Q + A,$$

ubi A summam reliquorum terminorum denotat, fit etiam ex tabula (7.)

$$PS = -aP'Q + A,$$

ergo addendo, $2PS = A + A$, ex qua productum $P'Q$ eliminatum est. Relatio itaque ea, quae ipsum PS continet, alios terminos continere nequit, nisi tales, qui adhibitis mutationibus tabulae (7.) immutati maneant. Qui sequentes esse inveniuntur: $P'S'$, $P''S''$, $P'''S'''$, QR, $Q'R'$, $Q''R''$, $Q'''R'''$; qua propter haberi poterit

$$aPS + bP'S' + cP''S'' + dP'''S''' + eQR + fQ'R' + gQ''R'' + hQ'''R''' = 0.$$

Hi tamen termini ope tabulae (8.) in dua systemata quaternorum discerpuntur. Mutato enim u in $u+K+L$, unde P in S et S in P mutatur, fit

$$aPS - bP'S' - cP''S'' + dP'''S''' + eQR - fQ'R' - gQ''R'' + hQ'''R''' = 0;$$

unde addendo et subtrahendo deducitur

$$aPS + dP'''S''' + eQR + hQ'''R''' = 0,$$
$$bP'S' + cP''S'' + fQ'R' + gQ''R'' = 0.$$

Et generaliter dato quolibet producto, verbi causa RS'', inveniri poterunt tria alia, e quibus cum illo relatio linearis formare liceat.

Ponatur itaque

$$aP'S' + bP''S'' + cQ'R' + dQ''R'' = 0.$$

Hinc tabulae (8.) beneficio deducuntur sequentes:

$$\begin{aligned} aPS + bP'''S''' - cQR + dQ'''R''' &= 0,\\ aP'''S''' + bPS + cQ'''R''' - dQR &= 0,\\ aQR + bQ'''R''' - cPS + dP'''S''' &= 0,\\ aQ'''R''' + bQR + cP'''S''' - dPS &= 0, \end{aligned}$$

unde, posito $u = 0$, $u' = 0$,

$$\begin{aligned} a\varpi\sigma + b\varpi'''\sigma''' + dk'''\varrho''' &= 0,\\ a\varpi'''\sigma''' + b\varpi\sigma + ck'''\varrho''' &= 0,\\ bk'''\varrho''' - c\varpi\sigma + d\varpi'''\sigma''' &= 0,\\ ak'''\varrho''' + c\varpi'''\sigma''' - d\varpi\sigma &= 0. \end{aligned}$$

Valoribus ipsarum a et b ex posterioribus in prioribus substitutis fit

$$\begin{aligned} dk'''^2\varrho'''^2 &= d(\varpi'''^2\sigma'''^2 - \varpi^2\sigma^2),\\ ck'''^2\varrho'''^2 &= c(\varpi'''^2\sigma'''^2 - \varpi^2\sigma^2), \end{aligned}$$

quae propter aeqq. (28.) identicae sunt, ita ut c et d arbitrariae maneant. Posito itaque 1) $c = 1$, $d = 0$; 2) $c = 0$, $d = 1$, inveniuntur binae quae sequuntur:

$$(32.)\quad \begin{cases} k'''\varrho'''Q'R' = \varpi'''\sigma'''P'S' - \varpi\sigma P''S'', \\ k'''\varrho'''Q''R'' = -\varpi\sigma P'S' + \varpi'''\sigma'''P''S''. \end{cases}$$

Istae aequationes suppeditant novam, quam quaesivimus, relationem inter quatuor quantitates P', S', P'', S''. Nam quum ipsas Q', R' ex antecedentibus per illas P', S', P'', S'' exprimere liceat, obtinetur

$$k'''^2\varrho'''^2Q'^2R'^2 = (\varpi'''\sigma'''P'S' - \varpi\sigma P''S'')^2$$

sive e formulis (31.)

$$\begin{aligned} &k'''^2\varrho'''^2(\varpi'^2k'^2P'^2 - \varpi''^2\varrho''^2S'^2 - \varpi''^2k'^2P''^2 + \varpi'^2\varrho''^2S''^2)\\ &\times(-\varpi''^2\varrho''^2P'^2 + \varpi'^2k'^2S'^2 + \varpi'^2\varrho''^2P''^2 - \varpi''^2k'^2S''^2)\\ &= (\varpi'^4 - \varpi''^4)^2(\varpi'''\sigma'''P'S' - \varpi\sigma P''S'')^2, \end{aligned}$$

unde evolvendo et reducendo ope formularum (22.) — (28.) fit

$$(33.)\quad \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{P}'^4+\boldsymbol{S}'^4-\frac{k'''^4+\varrho'''^4}{k'''^2\varrho'''^2}\boldsymbol{P}'^2\boldsymbol{S}'^2-\frac{\varpi'^4+\varpi''^4}{\varpi'^2\varpi''^2}(\boldsymbol{P}'^2\boldsymbol{P}''^2+\boldsymbol{S}'^2\boldsymbol{S}''^2) \\ +\frac{k'^4+\varrho''^4}{k'^2\varrho''^2}(\boldsymbol{P}'^2\boldsymbol{S}'''^2+\boldsymbol{P}''^2\boldsymbol{S}'^2)-\frac{2\varpi\sigma\varpi'''\sigma'''(\varpi'^4-\varpi''^4)^2}{\varpi'^2\varpi^2k'^2\varrho''^2k'''^2\varrho'''^2}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{S}'\boldsymbol{P}''\boldsymbol{S}'' \\ +\boldsymbol{P}''^4+\boldsymbol{S}''^4-\frac{k'''^4+\varrho'''^4}{k'''^2\varrho'''^2}\boldsymbol{P}''^2\boldsymbol{S}''^2 \end{array}\right\}=0.$$

Secunda aequationum (31.) ad alteram relationem inter quantitates $\boldsymbol{P}'$, $\boldsymbol{S}'$, $\boldsymbol{P}''$, $\boldsymbol{P}''$ perducere videtur, sed videtur tantum. Namque eliminatis inde litteris $\boldsymbol{Q}''$, $\boldsymbol{R}''$, ad eandem illam (33.) pervenitur. Quod vel a priori demonstrari potest. Manifesto enim relatio ex secunda illa aequatione proveniens eandem formam habebit, quam aeq. (33.), neque nisi respectu coëfficientum ab ea differre poterit. Quod si revera locum haberet, eliminari posset ex binis terminus $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{S}'\boldsymbol{P}''\boldsymbol{S}''$, unde resultaret relatio secundi gradus inter *quadrata* $\boldsymbol{P}'^2$, $\boldsymbol{S}'^2$, $\boldsymbol{P}''^2$, $\boldsymbol{S}''^2$. Introductis itaque functionibus $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ ex aeqq. (17.) prodiret relatio rationalis secundi gradus inter ipsas $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$. At hae non differunt ab ipsis $\boldsymbol{P}'''$, $\boldsymbol{Q}'''$, $\boldsymbol{R}'''$, $\boldsymbol{S}'''$, nisi quod quantitas r duplicata est, sicut ibi adnotavimus. Mutato itaque $2r$ in r prodiret relatio secundi gradus inter ipsas $\boldsymbol{P}'''$, $\boldsymbol{Q}'''$, $\boldsymbol{R}'''$, $\boldsymbol{S}'''$. Quod absurdum esse supra vidimus.

Eodem fere modo demonstratur, reliquas aequationes, quae inter producta binarum obtinent (quales sunt $\varrho''\sigma'''\boldsymbol{RS}'=\varpi''k'''\boldsymbol{PQ}'-\varpi k'\boldsymbol{P}''\boldsymbol{Q}'''$, $\varrho''\sigma\boldsymbol{RS}''=\varpi'k'''\boldsymbol{P}'''\boldsymbol{Q}'-\varpi'''k'\boldsymbol{P}'\boldsymbol{Q}'''$ et cetera), ad eandem illam relationem (33.) perducere.

Apponimus hic formulas sequentes, quas vel per methodum valorum particularium vel multis aliis modis ex formulis jam cognitis eruere licet:

$$(34.)\quad \left(\frac{\varpi'^4-\varpi''^4}{k'''^2\varrho'''^2}\right)(\boldsymbol{P}'''^2\boldsymbol{S}'''^2-\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{S}^2)$$
$$=\left\{\boldsymbol{P}'^4-\frac{k'''^4+\varrho'''^4}{k'''^2\varrho'''^2}\boldsymbol{P}'^2\boldsymbol{S}'^2+\boldsymbol{S}'^4\right\}-\left\{\boldsymbol{P}''^4-\frac{k'''^4+\varrho'''^4}{k'''^2\varrho'''^2}\boldsymbol{P}''^2\boldsymbol{S}''^2+\boldsymbol{S}''^4\right\},$$

$$(35.)\quad (\boldsymbol{P}'''\boldsymbol{S}'''+\boldsymbol{PS})^2=\frac{(\varpi'''\sigma'''+\varpi\sigma)^2}{\varpi'^2\varpi''^2}(\boldsymbol{P}'^2\boldsymbol{P}''^2+\boldsymbol{S}'^2\boldsymbol{S}''^2)-\frac{k'''^2\varrho'''^2}{k'^2\varrho''^2}(\boldsymbol{P}'^2\boldsymbol{S}''^2+\boldsymbol{P}''^2\boldsymbol{S}'^2)$$
$$+2\left(\frac{\varpi\sigma\varpi'''\sigma'''(k'^4+\varrho''^4)}{\varpi'^2\varpi''^2k'^2\varrho''^2}-\frac{\varpi^2\varpi'''^2+\sigma^2\sigma'''^2}{\varpi'^2\varpi''^2}\right)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}''\boldsymbol{S}'\boldsymbol{S}'',$$

$$(36.)\quad (\boldsymbol{P}'''\boldsymbol{S}'''-\boldsymbol{PS})^2=\frac{(\varpi'''\sigma'''-\varpi\sigma)^2}{\varpi'^2\varpi''^2}(\boldsymbol{P}'^2\boldsymbol{P}''^2+\boldsymbol{S}'^2\boldsymbol{S}''^2)-\frac{k'''^2\varrho'''^2}{k'^2\varrho''^2}(\boldsymbol{P}'^2\boldsymbol{S}''^2+\boldsymbol{P}''^2\boldsymbol{S}'^2)$$
$$+2\left(\frac{\varpi\sigma\varpi'''\sigma'''(k'^4+\varrho''^4)}{\varpi'^2\varpi''^2k'^2\varrho''^2}+\frac{\varpi^2\varpi'''^2+\sigma^2\sigma'''^2}{\varpi'^2\varpi''^2}\right)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}''\boldsymbol{S}'\boldsymbol{S}''.$$

Quibus magis singularitatis quam utilitatis causa adjungimus hasce:

$$P'''^2S'''^2 - P^2S^2 = Q'''^2R'''^2 - Q^2R^2, \quad P'^2S'^2 - P''S'''^2 = Q'^2R'^2 - Q''^2R'''^2,$$
$$P^2S'''^2 - P'''^2S^2 = Q'^2R'''^2 - Q''^2R'^2, \quad P'^2S'''^2 - P''^2S'^2 = Q^2R'''^2 - Q'''^2R^2,$$
$$P''^2S'''^2 - P'^2S^2 = Q'''^2R''^2 - Q^2R'^2, \quad P'''^2S''^2 - P^2S'^2 = Q''^2R'''^2 - Q'^2R^2,$$
$$P'^2S''^2 - P''^2S^2 = Q'^2R'''^2 - Q''^2R^2, \quad P^2S''^2 - P'''^2S'^2 = Q^2R''^2 - Q'''^2R'^2,$$

etc. etc.

quae facillime ex relationibus inter producta binarum deducuntur. Adnotetur etiam, positis $u = 0$, $u' = 0$, rursus in aeqq. (25.) — (28.) incidi.

Relationes differentiales inter functiones P, Q, etc.

Quum secunda relatio algebraica inter functiones P', S', P'', S'' inveniri nequeat, confugiendum erit ad differentialia. Consideremus itaque expressionem $P'\partial S' - S'\partial P'$. Et primum quidem manifestum est, illam habere periodos $4A$, $4B$, quum propter $P'(u+4A) = P'$ sit etiam $\partial P'(u+4A) = \partial P'$, etc. Secundo expressio $e^{2ru^2+2r'u'^2}(P'\partial S' - S'\partial P')$ habet periodos $4K$, $4L$, id quod hoc modo demonstratur. Est

$$\partial(e^{ru^2+r'u'^2}S') = e^{ru^2+r'u'^2}\partial S' + (2ru\,\partial u + 2r'u'\,\partial u')e^{ru^2+r'u'^2}S',$$
$$\partial(e^{ru^2+r'u'^2}P') = e^{ru^2+r'u'^2}\partial P' + (2ru\,\partial u + 2r'u'\,\partial u')e^{ru^2+r'u'^2}P',$$

unde multiplicando per $e^{ru^2+r'u'^2}P'$ et $e^{ru^2+r'u'^2}S'$ et subtrahendo fit

$$(e^{ru^2+r'u'^2}P')\,\partial(e^{ru^2+r'u'^2}S') - (e^{ru^2+r'u'^2}S')\,\partial(e^{ru^2+r'u'^2}P')$$
$$= e^{2ru^2+2r'u'^2}(P'\partial S' - S'\partial P').$$

Qua de re, quum alterum membrum aequationis periodos $4K$ et $4L$ habeat, habebit etiam alterum. Expressio $P'\partial S' - S'\partial P'$ poterit itaque per functiones P, Q, etc. exprimi; hoc est, lineariter per quadrata P^2, Q^2, etc. et producta binarum PQ, PR, etc. Hoc etiam, seriebus in usum vocatis, demonstrari potest.

Ponatur enim brevitatis causa

$$M_1 = e^{r(u+2\mathfrak{a}_1K+2\mathfrak{b}_1L)^2+\ldots.},$$
$$M = e^{r(u+(2\mathfrak{a}+1)K+(2\mathfrak{b}+1)L)^2+\ldots.},$$

erit

$$e^{ru^2+r'u'^2}P' = S(-1)^{\mathfrak{b}_1}M_1,$$
$$e^{ru^2+r'u'^2}iS' = S(-1)^{\mathfrak{b}}M,$$
$$\partial M_1 = \{2r(u+2\mathfrak{a}_1K+2\mathfrak{b}_1L)\partial u+\ldots.\}M_1,$$
$$\partial M = \{2r(u+(2\mathfrak{a}+1)K+(2\mathfrak{b}+1)L)\partial u+\ldots.\}M,$$
$$e^{ru^2+r'u'^2}\partial P' + (2ru\,\partial u + 2r'u'\,\partial u')P' = S(-1)^{\mathfrak{b}_1}\{2r(2\mathfrak{a}_1K+2\mathfrak{b}_1L)\partial u+\ldots.\}M_1$$
$$+ S(-1)^{\mathfrak{b}_1}\{2ru\,\partial u+\ldots.\}M_1,$$

ergo

$$e^{ru^2+r'u'^2}\partial P' = S(-1)^{\mathfrak{b}_1}\{2r(2\mathfrak{a}_1 K+2\mathfrak{b}_1 L)\partial u+....\}M_1$$

et similiter

$$e^{ru^2+r'u'^2}i\partial S' = S(-1)^{\mathfrak{b}}\{2r((2\mathfrak{a}+1)K+(2\mathfrak{b}+1)L)\partial u+....\}M.$$

Dehinc

$$e^{2ru^2+2r'u'^2}i(P'\partial S'-S'\partial P')$$
$$= S(-1)^{\mathfrak{b}+\mathfrak{b}_1}\{2r((2\mathfrak{a}-2\mathfrak{a}_1+1)K+(2\mathfrak{b}-2\mathfrak{b}_1+1)L)\partial u+....\}MM_1.$$

Posito autem

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{a}_1 = \varepsilon, \qquad \mathfrak{b}+\mathfrak{b}_1 = \vartheta,$$
$$\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_1 = \varepsilon_1, \qquad \mathfrak{b}-\mathfrak{b}_1 = \vartheta_1,$$

fit

$$MM_1 = e^{2r((\varepsilon_1+\frac{1}{2})K+(\vartheta_1+\frac{1}{2})L)^2+....}e^{2r(u+(\varepsilon+\frac{1}{2})K+(\vartheta+\frac{1}{2})L)^2+....}$$

unde

$$e^{2ru^2+2r'u'^2}i(P'\partial S'-S'\partial P')$$
$$= S\{2r((2\varepsilon_1+1)K+(2\vartheta_1+1)L)\partial u+....\}e^{2r((\varepsilon_1+\frac{1}{2})K+(\vartheta_1+\frac{1}{2})L)^2+.....}$$
$$\times S(-1)^{\vartheta}e^{2r(u+(\varepsilon+\frac{1}{2})K+(\vartheta+\frac{1}{2})L)^2+....},$$

qua in formula, quum ε et ε_1 simul vel pares vel impares numeri esse debeant itemque ϑ et ϑ_1, distinguendum erit inter valores pares et impares. Quare designata serie $Se^{2r(u+(\varepsilon+\frac{1}{2})K+(\vartheta+\frac{1}{2})L)^2+....}$ per T_1, U_1, V_1, W_1, prout vel ε par, ϑ par, vel ε impar, ϑ par, etc. habebitur

$$(37.)\qquad e^{2ru^2+2r'u'^2}i(P'\partial S'-S'\partial P') = a_1T_1+b_1U_1+c_1V_1+d_1W_1.$$

Coëfficientes manifesto sunt valores differentialium functionum T_1, U_1, V_1, W_1 pro $u=0$, $u'=0$. Series autem T_1, U_1, V_1, W_1 eaedem illae sunt, in quas producta $P'S'$, $P''S''$, $Q'R'$, $Q''R''$, etc. evolvi possunt; id quod vel sine calculo ex formulis supra laudatis intelligitur. Praeter enim signa $(-1)^{\mathfrak{b}}$, $(-1)^{\mathfrak{b}_1}$ et factores illos differentiales res omnino eodemmodo se habet. Exprimantur itaque ipsa T_1, U_1, V_1, W_1 per producta PS, $P'''S'''$, QR, $Q'''R'''$, etc. et substituantur valores in aequat. (37.), quo facto habebitur aeq. hujusce formae

$$(38.)\qquad P'\partial S'-S'\partial P' = aPS+bP'''S'''+cQR+dQ'''R'''$$
$$+a_1P'S'+b_1P''S''+c_1Q'R'+d_1Q''R'',$$

existentibus a, b, c, d etc. differentialibus formae $f\partial u+f'\partial u'$, ubi f et f' constantes sunt. Vidimus autem singulas $Q'R'$, $Q''R''$ exprimi posse per $P'S'$ et $P''S''$, ergo (mutando u in $u+A$) etiam QR, $Q'''R'''$ per PS, $P'''S'''$, quadere aeq. (38.) mutatur in formam

$$(39.)\qquad P'\partial S'-S'\partial P' = aPS+bP'''S'''+a_1P'S'+b_1P''S''.$$

Accuratior determinatio earum facilius fit per valores particulares. Quem ob finem notandum est, differentialia functionum Q', Q''', R'', cet., scilicet earum, quae posito $u=0$, $u'=0$ valores finitos accipiunt, pro iisdem valoribus evanescere. Invenitur enim

$$\partial P' = S(-1)^{\mathfrak{b}_1}\{2r(2\mathfrak{a}_1 K+2\mathfrak{b}_1 L)\partial u+\ldots.\}e^{r(2\mathfrak{a}_1 K+2\mathfrak{b}_1 L)^2+\ldots.};$$

mutatis itaque $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ in $-\mathfrak{a}_1$, $-\mathfrak{b}_1$, id quod valorem ipsius $\partial P'$ non afficit, terminus generalis in oppositum mutatur; bini ergo termini se destruunt. Reliquarum autem sex, nempe ipsarum Q, Q'', R, R', S', S'' differentialia non evanescunt pro $u=0$, $u'=0$; quorum valores peculiaribus notis insigniantur ∂k, $\partial k''$, $\partial\varrho$, $\partial\varrho'$, $\partial\sigma'$, $\partial\sigma''$. Invenitur ex. gr.

$$\partial k = f\partial u+f'\partial u',$$

ubi positum est

$$if = S(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}2r((2\mathfrak{a}+1)K+2\mathfrak{b}L)e^{r((2\mathfrak{a}+1)K+2\mathfrak{b}L)^2+\ldots},$$
$$if' = S(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}2r'((2\mathfrak{a}+1)K'+2\mathfrak{b}L')e^{r((2\mathfrak{a}+1)K+2\mathfrak{b}L)^2+\ldots.}$$

et sic porro. Quibus positis, determinatio coëfficientium hoc modo succedit. Habetur aequatio

$$(39.)\quad P'\partial S'-S'\partial P' = aPS+bP'''S'''+a_1P'S'+b_1P''S'',$$

unde mutando u in $u+K+L$, adjumento tabulae (8.) prodit

$$P'\partial S'-S'\partial P' = aPS+bP'''S'''-a_1P'S'-b_1P''S''.$$

Coëfficientes itaque a_1 et b_1 manifesto evanescunt, et restat

$$(40.)\quad P'\partial S'-S'\partial P' = aPS+bP'''S'''.$$

Hinc autem fit mutando u in $u+A+B$,

$$(41.)\quad P''\partial S''-S''\partial P'' = aP'''S'''+bPS,$$

unde ponendo $u=0$, $u'=0$ coëfficientes a et b determinantur per aeqq.

$$(42.)\quad \begin{cases} \varpi'\partial\sigma' = a\varpi\sigma+b\varpi'''\sigma''', \\ \varpi''\partial\sigma'' = a\varpi'''\sigma'''+b\varpi\sigma, \end{cases}$$

quae valores sequentes suppeditant:

$$(43.)\quad \begin{cases} k'''^2\varrho'''^2 a = \varpi''\varpi'''\sigma'''\partial\sigma''-\varpi\varpi'\sigma\partial\sigma', \\ k'''^2\varrho'''^2 b = \varpi'\varpi'''\sigma'''\partial\sigma'-\varpi\varpi''\sigma\partial\sigma''. \end{cases}$$

Inveniuntur autem alii valores sequenti modo. Mutando u in $u+K$ ex aeqq. (40.) et (41.) eruitur:

$$(44.)\quad Q'\partial R'-R'\partial Q' = aQR+bQ'''R''',$$
$$(45.)\quad Q''\partial R''-R''\partial Q'' = -aQ'''R'''-bQR,$$

unde ponendo $u=0$, $u'=0$ prodeunt hae:

$$(46.)\quad \begin{cases} k'\partial\varrho' = bk'''\varrho''', \\ \varrho''\partial k'' = ak'''\varrho''', \end{cases}$$

quae non solum multo simpliciores sunt, quam aeqq. (42.) vel (43.), sed etiam, eliminatis a et b, relationes inter differentialia $\partial\sigma'$, $\partial\sigma''$, $\partial\varrho'$, $\partial k''$ praebent, scilicet:

$$(47.)\quad \begin{cases} k'''\varrho'''\varrho''\partial k'' = \varpi''\varpi'''\sigma'''\partial\sigma'' - \varpi\varpi'\sigma\partial\sigma', \\ k'''\varrho'''k'\partial\varrho' = \varpi'\varpi'''\sigma'''\partial\sigma' - \varpi\varpi''\sigma\partial\sigma''. \end{cases}$$

Simili modo inveniuntur hae:

$$(48.)\quad \begin{cases} k'\varrho''\varrho'''\partial k = \varpi\varpi'\sigma'''\partial\sigma'' - \varpi''\varpi'''\sigma\partial\sigma', \\ k'\varrho''k'''\partial\varrho = \varpi\varpi''\sigma'''\partial\sigma' - \varpi'\varpi'''\sigma\partial\sigma''. \end{cases}$$

Plures autem relationes inter differentialia ∂k, $\partial\varrho$, etc. non dantur, quum propter independentia ∂u, $\partial u'$, bina arbitraria manere debeant. Adhibitis itaque aeqq. (46.) nacti summus relationes sequentes:

$$(49.)\quad \begin{cases} \boldsymbol{P}'\partial\boldsymbol{S}' - \boldsymbol{S}'\partial\boldsymbol{P}' = \dfrac{\varrho''\partial k''}{\varrho'''k'''}\boldsymbol{PS} + \dfrac{k'\partial\varrho'}{k'''\varrho'''}\boldsymbol{P}'''\boldsymbol{S}''', \\ \boldsymbol{P}''\partial\boldsymbol{S}'' - \boldsymbol{S}''\partial\boldsymbol{P}'' = \dfrac{\varrho''\partial k''}{k'''\varrho'''}\boldsymbol{P}'''\boldsymbol{S}''' + \dfrac{k'\partial\varrho'}{k'''\varrho'''}\boldsymbol{PS}, \end{cases}$$

ita ut tres jam cognitae sint aequationes inter quantitates $\boldsymbol{P}'$, $\boldsymbol{S}'$, $\boldsymbol{P}''$, $\boldsymbol{S}''$ (producta enim $\boldsymbol{PS}$, $\boldsymbol{P}'''\boldsymbol{S}'''$ puta per ipsas $\boldsymbol{P}'$, $\boldsymbol{S}'$, $\boldsymbol{P}''$, $\boldsymbol{S}''$ expressa, quod ex antecedentibus licet), quarum altera (33.) est algebraica quarti gradus, alterae binae sunt differentiales primi ordinis. Reliquae, quas aeqq. (49.) similes invenire licet, algebraice ex illis tribus deduci possunt; quod vel a priori demonstrandum est.

Oportet itaque quartam aliquam eruere; quam ob rem ad differentialia secunda ascendendum erit. Dico autem formulam $\boldsymbol{P}'\partial^2\boldsymbol{P}' - \partial\boldsymbol{P}'^2$ lineariter per quadrata ipsarum $\boldsymbol{P}'$, $\boldsymbol{S}'$, $\boldsymbol{P}''$, $\boldsymbol{S}''$ exprimi posse, *siquidem differentialia* ∂u, $\partial u'$ *constantia esse ponuntur*. Primo enim intelligitur propter $\partial\boldsymbol{P}'(u+4\boldsymbol{A}) = \partial\boldsymbol{P}'$, $\partial^2\boldsymbol{P}'(u+4\boldsymbol{A}) = \partial^2\boldsymbol{P}'$ habere periodos $4\boldsymbol{A}$ et $4\boldsymbol{B}$. Deinde quum, posito brevitatis causa $e^{ru^2+r'u'^2} = \boldsymbol{M}$, sit

$$\partial(\boldsymbol{MP}') = \boldsymbol{M}\partial\boldsymbol{P}' + (2ru\partial u + 2r'u'\partial u')\boldsymbol{MP}',$$

$$\partial^2(\boldsymbol{MP}') = \boldsymbol{M}\partial^2\boldsymbol{P}' + 2(2ru\partial u + 2r'u'\partial u')\boldsymbol{M}\partial\boldsymbol{P}' + (2ru\partial u + 2r'u'\partial u')^2\boldsymbol{MP}' + (2r\partial u^2 + 2r'\partial u'^2)\boldsymbol{MP}' + (2ru\partial^2 u + 2r'u'\partial^2 u')\boldsymbol{MP}',$$

prodit

$$(MP')\partial^2(MP') - \partial(MP')^2 = M^2(P'\partial^2 P' - \partial P'^2) + (2r\partial u^2 + 2r'\partial u'^2)(MP')^2 + (2ru\partial^2 u + 2r'u'\partial^2 u')(MP')^2,$$

unde elicitur, formulam $e^{2ru^2+2r'u'^2}(P'\partial^2 P' - \partial P'^2)$ habere periodos $4K$ et $4L$, siquidem ponitur $\partial^2 u = 0$, $\partial^2 u' = 0$. Potest itaque illud $P'\partial^2 P' - \partial P'^2$ expressioni hujus formae aequari:

$$aP^2 + bQ^2 + cR^2 + \ldots + \alpha PQ + \beta PR + \gamma PS + \ldots$$

Applicatis autem argumentorum incrementis, quae in tabula (7.) leguntur, ipsum $P'\partial^2 P' - \partial P'^2$ non mutatur. Nec magis quadrata P^2, Q^2, etc. Productorum autem PQ, PR, etc., quodvis unum aliquando oppositum valorem induit; quare per se evanescere debent. Quadrata denique P^2, Q^2, etc. aeqq. (31.) ope ad quaterna P'^2, S'^2, P''^2, S''^2 reduci possunt. Restat itaque aequatio hujus formae:

$$P'\partial^2 P' - \partial P'^2 = aP'^2 + bS'^2 + cP''^2 + dS''^2.$$

Coëfficientes more solito determinantur. Quem ad finem animadvertendum est, sex differentialia secunda, nimirum $\partial^2 Q$, $\partial^2 Q''$, $\partial^2 R$, $\partial^2 R'$, $\partial^2 S'$, $\partial^2 S''$, evanescere pro valoribus $u = 0$, $u' = 0$. Reliqua finitos valores accipiunt et denotantur per $\partial^2\varpi$, $\partial^2\varpi'$, etc. Habent autem formam sequentem:

$$\partial^2\varpi = a\partial u^2 + 2b\partial u\partial u' + c\partial u'^2,$$

ubi a, b, c constantes. Ceterum haec differentialia omnia per unum quodlibet exprimi possunt. Nam quum habeatur ex. gr. $P\partial P' - P'\partial P =$ summae ex productis binarum, differentiando et ponendo $u = 0$, $u' = 0$ prodit $\varpi\partial^2\varpi' - \varpi'\partial^2\varpi$ = quantitati a constantibus et a quantitatibus ∂k, $\partial\varrho$, etc. pendentem.

His positis invenitur aequatio

$$(50.)\quad P'\partial^2 P' - \partial P'^2 = \frac{\varpi'^3\partial^2\varpi' - \varpi''^3\partial^2\varpi''}{\varpi'^4 - \varpi''^4}P'^2 + \frac{\varrho''^2\partial k''^2 - k'^2\partial\varrho'^2}{\varpi'^4 - \varpi''^4}S'^2 + \frac{k'^2\partial k''^2 - \varrho''^2\partial\varrho'^2}{\varpi'^4 - \varpi''^4}P''^2 + \frac{\varpi''^2\partial\sigma''^2 - \varpi'^2\partial\sigma''^2}{\varpi'^4 - \varpi''^4}S''^2,$$

nec non similes pro expressionibus $P\partial^2 P - \partial P^2$, $Q\partial^2 Q - \partial Q^2$, etc.; quas ad secundam speciem nostrarum functionum facere infra videbis. Imprimis autem notamus formulam

$$(51.)\quad (P'P'' + S'S'')\partial^2(P'P'' + S'S'') - \partial(P'P'' + S'S'')^2 = a(P'P'' + S'S'')^2 + b(P'^2S''^2 + P''^2S'^2) + cP'P''S'S'' + d(P'^2S'^2 + P''^2S''^2),$$

ubi constantes a, b, c, d determinatae sunt per aeqq.

$$(52.)\quad \begin{cases} a\varpi'\varpi'' &= \varpi'\,\partial^2\varpi'' + \varpi''\,\partial^2\varpi' + 2\,\partial\sigma\,\partial\sigma'', \\ bk'^2\varrho''^2 &= -(k'\,\partial k'' + \varrho''\,\partial\varrho')^2, \\ dk'''^2\varrho'''^2 &= (k'''\,\partial k - \varrho'''\,\partial\varrho)^2, \\ a(\varpi\varpi''' + \sigma\sigma''')^2 + b(\varpi^2\sigma'''^2 + \varpi'''^2\sigma^2) + d(\varpi^2\sigma^2 + \varpi'''^2\sigma'''^2) + c\,\varpi\varpi'''\sigma\sigma''' \\ \qquad = (\varpi\varpi''' + \sigma\sigma''')(\varpi\,\partial^2\varpi''' + \varpi'''\,\partial^2\varpi + \sigma\,\partial^2\sigma''' + \sigma'''\,\partial^2\sigma). \end{cases}$$

Adnotetur, quod gravissimum est, differentialia $\partial^2\varpi$, $\partial^2\varpi'$, etc. eliminari posse ex valore ipsius c advocatis aequationibus

$$(53.)\quad \begin{cases} \varrho''\varrho'''(\varpi'\,\partial^2\varpi - \varpi\,\partial^2\varpi') &= k'\sigma'''\,\partial k\,\partial\sigma'' - k'''\sigma\,\partial k''\,\partial\varrho', \\ \varrho''\varrho'''(\varpi''\,\partial^2\varpi''' - \varpi'''\,\partial^2\varpi'') &= k'\sigma\,\partial k\,\partial\sigma' - k'''\sigma'''\,\partial k''\,\partial\sigma'', \\ \varrho''k'''(\sigma'''\,\partial^2\varpi'' - \varpi''\,\partial^2\sigma''') &= \varpi'''\varrho'''\,\partial\sigma''\,\partial k'' + \varpi k'\,\partial\sigma'\,\partial\varrho, \\ \varrho''k'''(\sigma\,\partial^2\varpi' - \varpi'\,\partial\sigma) &= \varpi'''k'\,\partial\sigma''\,\partial\varrho + \varpi\varrho'''\,\partial\sigma''\,\partial k''. \end{cases}$$

Quamvis hoc ad propositum nostrum satis sit aequationum differentialium, juvat tamen adnotare, posse etiam omnium ordinum inveniri aequationes hujusce-modi $X\partial^n Y - n\,\partial X\partial^{n-1}Y + n_2\partial^2 X\partial^{n-2}Y - n_3\partial^3 X\partial^{n-3}Y +$ etc. $=$ functioni rationali integrae secundi gradus ipsarum P', S', P'', S'', ubi X et Y locum tenent binarum quarumlibet e functionibus P, Q, R, etc. Quod utraque methodo, qua initio hujus capitis usi sumus, demonstrari potest. Immo non datur aequatio differentialis, quin ex talibus composita sit. Eadem illa aequatio valet etiam, si pro X et Y quaelibet functiones integrae homogeneae ipsarum P, Q, R, etc. ejusdem dimensionis substituuntur. Valet denique etiam, si argumenta alterius (X) quibuslibet constantibus augeantur, alterius (Y) *iisdem* constantibus minuantur; ita ut hoc modo audiat

$X(u+\alpha, u'+\alpha')\partial^n Y(u-\alpha, u'-\alpha') - n\,\partial X(u+\alpha, u'+\alpha')\partial^{n-1}Y(u-\alpha, u'-\alpha')$ $+$ etc. $=$ functioni rationali ipsarum P', S', P'', S'', etc. Quam infra ad tertiam speciem functionum quadrupliciter periodicarum facere videbis.

Transformatio aequationum differentialium.

Superest nunc, ut aequationes et finitas et differentiales, quas vidimus inter quatuor quantitates locum habere, paullo accuratius examinemus, ut demonstretur, *functiones nostras ad transcendentes Abelianas primi ordinis pertinere.*

Et quidem prae caeteris hoc unum et memorabile observandum est, quod priores tres aequationes, nimirum (33.) et (49.) quamvis ad determinationem quatuor quantitatem P', S', P'', S'' non sufficiant, tamen quotientes e binis

omni rigore definiunt, scilicet tres quantitates $\frac{S'}{P'}$, $\frac{P''}{P'}$, $\frac{S''}{P'}$, quas functiones quadrupliciter periodicas esse supra comperimus. Qua propter in hoc loco consistimus et reliquam aeqq. (50.) impraesentiarum mittimus.

Aequationes (49.)

$$P'\partial S' - S'\partial P' = \frac{\varrho''\partial k''}{k'''\varrho'''}PS + \frac{k'\partial\varrho'}{k'''\varrho'''}P'''S''',$$

$$P''\partial S'' - S''\partial P'' = \frac{k'\partial\varrho'}{k'''\varrho'''}PS + \frac{\varrho''\partial k''}{k'''\varrho'''}P'''S'''$$

addimus et subtrahimus, unde fit

$$(54.)\quad \begin{cases} \dfrac{(P'\partial S' - S'\partial P') + (P''\partial S'' - S''\partial P'')}{P'''S''' + PS} = \dfrac{k'\partial\varrho' + \varrho''\partial k''}{k'''\varrho'''} = \partial\mu, \\ \dfrac{(P'\partial S' - S'\partial P') - (P''\partial S'' - S''\partial P'')}{P'''S''' - PS} = \dfrac{k'\partial\varrho' - \varrho''\partial k''}{k'''\varrho'''} = \partial\nu, \end{cases}$$

quae posito brevitatis causa

$$(55.)\quad \frac{S'}{P'} = p,\quad \frac{S''}{P''} = q,\quad \frac{P'}{P''} = s,\quad \frac{P'''S''' + PS}{P'P''} = \varphi,\quad \frac{P'''S''' - PS}{P'P''} = \psi,$$

transformantur in hasce:

$$(56.)\quad \frac{s\partial p + \frac{1}{s}\partial q}{\varphi} = \partial\mu,\qquad \frac{k\partial p - \frac{1}{s}\partial q}{\psi} = \partial\nu.$$

Valores ipsarum s, φ, ψ, per quantitates P', S', P'', S'' vel potius p, q expressi, ex aeqq. (33.), (35.), (36.) repetendi sunt. Introductis enim denotationibus sequentibus

$$(57.)\quad \begin{cases} 2E = \dfrac{k'''^4 + \varrho'''^4}{k'''^2\varrho'''^2},\quad 2F = \dfrac{\varpi'^4 + \varpi''^4}{\varpi'^2\varpi''^2},\quad 2C = \dfrac{k'^4 + \varrho''^4}{k'^2\varrho''^2}, \\ 2D = \dfrac{\varpi\sigma\varpi'''\sigma'''(\varpi'^4 - \varpi''^4)^2}{\varpi'^2\varpi''^2k'^2\varrho''^2k'''^2\varrho'''^2}, \\ b = \dfrac{\varpi'''^2\sigma'''^2 + \varpi^2\sigma^2}{\varpi'^2\varpi''^2},\quad c = \dfrac{\varpi\sigma\varpi'''\sigma'''(k'^4 + \varrho''^4)}{\varpi'^2\varpi''^2k'^2\varrho''^2},\quad a = \dfrac{k'''^2\varrho'''^2}{k'^2\varrho''^2}, \\ b_1 = \dfrac{2\varpi\varpi'''\sigma\sigma'''}{\varpi'^2\varpi''^2},\qquad c_1 = \dfrac{\varpi^2\varpi'''^2 + \sigma^2\sigma'''^2}{\varpi'^2\varpi''^2}, \text{ unde} \\ E^2 - 1 = \dfrac{(k'''^4 - \varrho'''^4)^2}{4k'''^4\varrho'''^4} = \dfrac{(\varpi'^4 - \varpi''^4)^2}{4k'''^4\varrho'''^4}; \end{cases}$$

aeqq. (33.) — (36.) mutantur in sequentes:

$$(58.)\quad (1 - 2Ep^2 + p^4)s^4 - 2(F(1 + p^2q^2) - C(p^2 + q^2) + 2Dpq)s^2 + (1 - 2Eq^2 + q^4) = 0,$$

$$(59.)\quad 2\sqrt{(E^2 - 1)}\left(\frac{P'''^2S'''^2 + P^2S^2}{P'^2P''^2}\right) = (1 - 2Ep^2 + p^4)s^2 - (1 - 2Eq^2 + q^4)\frac{1}{s^2},$$

$$(60.)\quad \left(\frac{P'''S'''+PS}{P'P''}\right)^2 = \varphi^2 = (b+b_1)(1+p^2q^2)-a(p^2+q^2)+2(c-c_1)pq,$$

$$(61.)\quad \left(\frac{P'''S'''-PS}{P'P''}\right)^2 = \psi^2 = (b-b_1)(1+p^2q^2)-a(p^2+q^2)+2(c+c_1)pq.$$

Ad solutionem aequationis biquadraticae (58.) observo fieri ex aeqq. (59.) — (61.):

$$(1-2Ep^2+p^4)s^2-(1-2Eq^2+q^4)\frac{1}{s^2} = 2\sqrt{(E^2-1)}\cdot\varphi\psi.$$

At ex ipsa (58.) fit

$$(1-2Ep^2+p^4)s^2+(1-2Eq^2+q^4)\frac{1}{s^2} = 2(F(1+p^2q^2)-C(p^2+q^2)+2Dpq),$$

unde

$$(62.)\quad s^2 = \frac{F(1+p^2q^2)-C(p^2+q^2)+2Dpq+\sqrt{(E^2-1)}\cdot\varphi\psi}{1-2Ep^2+p^4}.$$

$$(63.)\quad \frac{1}{s^2} = \frac{F(1+p^2q^2)-C(p^2+q^2)+2Dpq-\sqrt{(E^2-1)}\cdot\varphi\psi}{1-2Eq^2+q^4}.$$

His itaque valoribus ex aeqq. (60.) — (64.) in aeqq. (56.) substitutis, *determinatio ipsarum p, q reducta est ad integrationem quantitatum algebraicarum irrationalium, a duabus aequationibus secundi gradus pendentium*, earumque mixtarum quidem, utpote quum duae variabiles independentes p et q ingrediantur, tamen ***algebraicarum***. Integratis enim aeqq. (56.) prodeunt sequentes:

$$(64.)\quad \int\frac{s\partial p+\frac{1}{s}\partial q}{\varphi} = \mu, \qquad \int\frac{s\partial p-\frac{1}{s}\partial q}{\psi} = \nu,$$

quarum differentialia $\frac{s\partial p+\frac{1}{s}\partial q}{\varphi}$ et $\frac{s\partial p-\frac{1}{s}\partial q}{\psi}$ manifesto sunt differentialia exacta.

Opera nunc danda est, ut variabiles separentur; hoc est, ut loco ipsarum p et q aliae binae variabiles introducantur, quae integrationem ad simplices quadraturas secundum singulas variabiles perducant. Arduum sane incoeptum, si complicationem formularum, valores ipsarum φ, ψ, s, $\frac{1}{s}$ exprimentium, respicis. Quod tamen feliciter succedit per substitutiones

$$(65.)\quad p = \frac{y\Delta z+z\Delta y}{1-y^2z^2}, \qquad q = \frac{y\Delta z-z\Delta y}{1-y^2z^2},$$

ubi positum est $\Delta y = \sqrt{(1-2Ey^2+y^4)}$, $\Delta z = \sqrt{(1-2Ez^2+z^4)}$. Etenim instituto calculo fit

$$
(66.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\Delta p}=\frac{\partial y}{\Delta y}+\frac{\partial z}{\Delta z},\qquad \frac{\partial q}{\Delta q}=\frac{\partial y}{\Delta y}-\frac{\partial z}{\Delta z},\\
&(1-y^2z^2)^2\varphi^2\\
&=(b+b_1)\Big\{1-2\frac{C-E-D}{F-1}y^2+y^4\Big\}\Big\{1-2\frac{C+E+D}{F+1}z^2+z^4\Big\},\\
&(1-y^2z^2)^2\psi^2\\
&=(b-b_1)\Big\{1-2\frac{C+E-D}{F+1}y^2+y^4\Big\}\Big\{1-2\frac{C-E+D}{F-1}z^2+z^4\Big\},\\
&\tfrac{1}{2}(1-y^2z^2)^2\Big(s\Delta p+\frac{\Delta q}{s}\Big)^2\\
&=(F+1)\Big\{1-2\frac{C+E-D}{F+1}y^2+y^4\Big\}\Big\{1-2\frac{C+E+D}{F+1}z^2+z^4\Big\},\\
&\tfrac{1}{2}(1-y^2z^2)^2\Big(s\Delta p-\frac{\Delta q}{s}\Big)^2\\
&=(F-1)\Big\{1-2\frac{C-E-D}{F-1}y^2+y^4\Big\}\Big\{1-2\frac{C-E+D}{F-1}z^2+z^4\Big\},
\end{aligned}\right.
$$

aequationes (56.) autem sequenti modo repraesentari possunt

$$
(67.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\Big(s\Delta p+\frac{\Delta q}{s}\Big)}{\varphi}\Big(\frac{\partial p}{2\Delta p}+\frac{\partial q}{2\Delta q}\Big)+\frac{\Big(s\Delta p-\frac{\Delta q}{s}\Big)}{\varphi}\Big(\frac{\partial p}{2\Delta p}-\frac{\partial q}{2\Delta q}\Big)=\partial\mu,\\
&\frac{\Big(s\Delta p-\frac{\Delta q}{s}\Big)}{\psi}\Big(\frac{\partial p}{2\Delta p}+\frac{\partial q}{2\Delta q}\Big)+\frac{\Big(s\Delta p+\frac{\Delta q}{s}\Big)}{\psi}\Big(\frac{\partial p}{2\Delta p}-\frac{\partial q}{2\Delta q}\Big)=\partial\nu,
\end{aligned}\right.
$$

unde substitutis valoribus ex aeqq. (66.) et sublatis factoribus communibus in nominatoribus et denominatoribus et posito brevitatis causa

$$
\frac{C-E-D}{F-1}=E_1,\qquad \frac{C+E-D}{F+1}=E_2,
$$
$$
\frac{C+E+D}{F+1}=E_3,\qquad \frac{C-E+D}{F-1}=E_4,
$$

oriuntur aequationes separatae

$$
(68.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sqrt{(2(F+1))}\,\frac{\partial y}{\sqrt{(1-2Ey^2+y^4)}}\sqrt{\frac{1-2E_2y^2+y^4}{1-2E_1y^2+y^4}}\\
&\quad+\sqrt{(2(F-1))}\,\frac{\partial z}{\sqrt{(1-2Ez^2+z^4)}}\sqrt{\frac{1-2E_4z^2+z^4}{1-2E_3z^2+z^4}}=\sqrt{(b+b_1)}\,\partial\mu,\\
&\sqrt{(2(F-1))}\,\frac{\partial y}{\sqrt{(1-2Ey^2+y^4)}}\sqrt{\frac{1-2E_1y^2+y^4}{1-2E_2y^2+y^4}}\\
&\quad+\sqrt{(2(F+1))}\,\frac{\partial z}{\sqrt{(1-2Ez^2+z^4)}}\sqrt{\frac{1-2E_3z^2+z^4}{1-2E_4z^2+z^4}}=\sqrt{(b-b_1)}\,\partial\nu.
\end{aligned}\right.
$$

Attamen quum illa substitutio non ita primo intuitu liqueat, haud inscitum mihi videtur ejus analysin hic apponere; praesertim quum in rebus insolitis, quas nemo hucusque vel e longinquo addigitavit, operae pretium sit, methodos cognovisse, e quibus aliquid utilitatis capi possit.

Separatio variabilium.

Respectis et ***periodicitate quadruplice*** functionum p et q et reductione ad ***bina*** argumenta independentia et forma ***algebraica*** differentialium, facile conjicitur adhibita idonea substitutione factum iri

$$\frac{s\,\partial p+\frac{1}{s}\partial q}{\varphi} = \frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{X}} + \frac{(\alpha+\beta x')\partial x'}{\sqrt{X'}} = \partial\mu,$$

$$\frac{s\,\partial p-\frac{1}{s}\partial q}{\psi} = \frac{(\alpha_1+\beta_1 x)\partial x}{\sqrt{X}} + \frac{(\alpha_1+\beta_1 x')\partial x'}{\sqrt{X'}} = \partial\nu,$$

ubi X et X' functiones rationales integras quinti vel sexti gradus repraesentant, ut est in transcendentibus Abelianis primi ordinis *). E contrario itaque oportet etiam a transcendentibus Abelianis, facta idonea substitutione pro variabilibus x et x', ad nostras aeqq. differentiales perveniri posse. Ipsae autem x et x' spectari possunt, ut radices aequationis quadraticae $Ux^2-2U'x+U''=0$, quarum coëfficientes sunt functiones rationales vel si mavis „uniformes" (transcendentes) binorum argumentorum μ et ν, sive u et u'. Quamobrem

*) Quae D. *Jacobi* de functionibus plurium argumentorum multipliciter periodicis, quas in theoriam transcendentium Abelianarum introducere convenit, acutissime disseruit (cf. commentt. hujus diarii 32^{dam} T. 9 et 2^{dam} T. 13) pro satis et abunde notis habenda sunt. Omittimus itaque hoc loco et ad aliam occasionem, si qua dabitur, relegamus ea, quae nosmet ipsi olim de hisce rebus meditati sumus; quamvis multo latius pateant, quippe quae ex consideratione integralium in universum, neque vero ex singulari casu, ubi radix quadrata e polynomio in factores *reales* resolubili tractatur, depromta sint. — Unum tamen jam nunc adnotare juvat de argumento, quod clarissimus vir ex absurditate periodicitatis triplicis et a fortiori quadruplicis contra considerationem functionum unius solius variabilis petivit. Quod enim omnem functionem tripliciter periodicam dicit habere periodum omni data quantitate minorem idque absurdum esse, priori quidem parti toto animo assentiendum esse existimamus, verum quid huic rei absurditatis insit (cum pace tanti viri dicatur) plane non intelligimus. Quonam deinde loco hujus absurditatis causam positam esse censeamus? Num in elementis, an in notione integralis vel functionis? Quibus omnibus *) bene perpensis, hoc sane loco functio $u=\int\frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\sqrt{X}}$ rejicienda esse videtur, non tamen propter putatam absurditatem, sed quatenus de relationibus *algebraicis* inter ternas $x(u)$, $x(v)$ et $x(u+v)$ disquiritur, talis autem relatio non datur. Quin immo, si quis relationes *transcendentes* inter illas investigare velit (quod vix nostrae aetatis esse videtur), eum amplissimum laboribus campum inventurum esse arbitramur.

*) !? *J.*

licet etiam, eas sicut functiones rationales algebraicas ipsarum p et q et reliquorum quotientium e binis $\left(\frac{Q}{S}, \frac{P}{R}, \text{etc.}\right)$ considerare, quippe qui sunt ipsi functiones uniformes argumentorum u et u'. Huc accedit, quod talis substitutio $Ux^2 - 2U'x + U'' = 0$ bellissime cum nostris aequationibus quadrare videtur, nam quum habeatur $x = \frac{U' + \sqrt{(U'^2 - UU'')}}{U}$ radices $\sqrt{X}$ et $\sqrt{X'}$ manifesto talem formam induunt $\sqrt{\frac{M + N\sqrt{(U'^2 - UU'')}}{L}}$, qualem habet ipsum s (cf. aeq. (62.), ubi productum $\varphi\psi$ radicem quadratam .e functione rationali repraesentat). Verumtamen huic rei unum obstat, quod gravissimum est. Etenim duo radicalia $\sqrt{(U'^2 - UU'')}$ et $\varphi\psi$, quae algebraice commensurabilia esse oportet (scilicet $\frac{\sqrt{(U'^2 - UU'')}}{\varphi\psi}$ = functioni rationali ipsarum p, q, et reliquarum quotientium e binis) naturae valde diversae sunt. Alterum $\varphi\psi$, quod posuimus aequale quantitati $\frac{P'''^2 S'''^2 - P^2 S^2}{P'^2 P'''^2}$, functionem rationalem esse vides, alterum autem $\sqrt{(U'^2 - UU'')}$ sicut functio irrationalis spectandum est, siquidem singulas variabiles x et x' per argumenta u et u' rationaliter exprimi non posse censemus.

Transformandum itaque erit illud s ope formulae

$$\sqrt{(a + \sqrt{b})} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{(a^2 - b)}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{(a^2 - b)}}{2}}$$

in aliam, quae sibi propria est, formam. Quod facillime perficitur, respectis formulis (62.), (63.), unde multiplicando elicitur

$$(69.) \quad \{F'(1 + p^2 q^2) - C(p^2 + q^2) + 2Dpq\}^2 - (E^2 - 1)\varphi^2\psi^2 = \Delta p^2 \Delta q^2.$$

Erit itaque

$$(70.) \quad \begin{cases} s = \frac{\sqrt{(2G + 2\Delta p \Delta q)}}{2\Delta p} + \frac{\sqrt{(2G - 2\Delta p \Delta q)}}{2\Delta p}, \\ \frac{1}{s} = \frac{\sqrt{(2G + 2\Delta p \Delta q)}}{2\Delta q} - \frac{\sqrt{(2G - 2\Delta p \Delta q)}}{2\Delta q}, \end{cases}$$

ubi brevitatis causa positum est

$$G = F'(1 + p^2 q^2) - C(p^2 + q^2) + 2Dpq;$$

quamobrem aequationes differentiales (56.) mutantur in eas quas sub numero (67.) legis:

$$(71.) \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{(2G + 2\Delta p \Delta q)}}{\varphi}\left(\frac{\partial p}{2\Delta p} + \frac{\partial q}{2\Delta q}\right) + \frac{\sqrt{(2G - 2\Delta p \Delta q)}}{\varphi}\left(\frac{\partial p}{2\Delta p} - \frac{\partial q}{2\Delta q}\right) = \partial\mu, \\ \frac{\sqrt{(2G - 2\Delta p \Delta q)}}{\psi}\left(\frac{\partial p}{2\Delta p} + \frac{\partial q}{2\Delta q}\right) + \frac{\sqrt{(2G + 2\Delta p \Delta q)}}{\psi}\left(\frac{\partial p}{2\Delta p} - \frac{\partial q}{2\Delta q}\right) = \partial\nu, \end{cases}$$

quarum forma pulcherrime ad considerationes supra memoratas accommodatur. Quantitas enim $\Delta p \Delta q$, quae sub radicalibus comparuit, revera est irrationalis, id quod ex evolutionibus, a quibus initio profecti sumus, satis liquet. Nunc vero illas considerationes mittimus, quum reliqua sua sponte sese offerant.

Semel enim erutis aeqq. (71.) nihil simplicius, quam differentialibus ellipticis, quae illic conspicienda sunt, hasce substitutiones applicare:

$$(72.) \quad \frac{\partial p}{2\Delta p}+\frac{\partial q}{2\Delta q}=\frac{\partial y}{\Delta y}, \qquad \frac{\partial p}{2\Delta p}-\frac{\partial q}{2\Delta q}=\frac{\partial z}{\Delta z},$$

quae e noto de additione theoremate integralia offerunt, quae sequuntur

$$(73.) \quad p=\frac{y\Delta z+z\Delta y}{1-y^2z^2}, \quad q=\frac{y\Delta z-z\Delta y}{1-y^2z^2}.$$

Hinc prodit

$$(74.) \quad pq=\frac{y^2-z^2}{1-y^2z^2}, \quad p^2+q^2=2\frac{(y^2+z^2)(1+y^2z^2)-4Ey^2z^2}{(1-y^2z^2)^2},$$

$$(75.) \quad \Delta p\Delta q=\frac{(1+y^2z^2)^2-2E(1+y^2z^2)(y^2+z^2)+(y^2+z^2)^2}{(1-y^2z^2)^2},$$

quibus valoribus in expressionibus ipsarum s, $\frac{1}{s}$, φ, ψ (aeqq. 69., 60., 61.) substitutis, facillime pervenitur ad aeqq., quas jam sub numero (66.) dedimus, neque ad resolutionem in factores quicquam aliud opus erit, nisi relationes inter constantes, quas vocavimus C, D, E, F, a, b, c, b_1, c_1 cognovisse. Quem ob finem aut ad aequationes elementares (25.) — (28.) redeundum, aut quod multo simplicius est, aequationis (68.) utrumque membrum evolvendum erit. Instituta comparatione prodeunt aeqq. seqq.

$$(76.) \quad E^2-1=\frac{F^2-1}{b^2-b_1^2}=\frac{D^2-E^2+1}{c^2-c_1^2}=\frac{CF-E}{ab}=\frac{DF}{bc+b_1c_1}=\frac{CD}{ac},$$

nec non ex ipsis (57.)

$$\frac{D}{ab_1}=E^2-1,$$

unde sine labore eliciuntur sequentes:

$$(77.) \quad \begin{cases} a=\dfrac{\sqrt{(C^2-1)}}{\sqrt{(E^2-1)}}, \quad b=\dfrac{CF-E}{\sqrt{(E^2-1)}\sqrt{(C^2-1)}}, \quad c=\dfrac{CD}{\sqrt{(E^2-1)}\sqrt{(C^2-1)}}, \\ b_1=\dfrac{D}{\sqrt{(E^2-1)}\sqrt{(C^2-1)}}, \quad c_1=\dfrac{CE-F}{\sqrt{(E^2-1)}\sqrt{(C^2-1)}}, \\ D^2+1=C^2+E^2+F^2-2CEF. \end{cases}$$

Neque vero mirandum est, tres coëfficientes indeterminatas manere, quum inter ipsas quantitates ϖ, $\varkappa$, ϱ, etc. quatuor algebraice indeterminatae restiterint; namque hae nostrae C, D, etc. sunt functiones quotientium e binis et

aeqq. inter ipsas ϖ, $\varkappa$, ϱ, etc. homogeneae erant. Haec insuper naturae transcendentium Abelianarum omnino consentanea sunt, quippe quae tres modulos habeant. Ceterum ipsum calculum, utpote elementarem, lectoribus relinquimus et ad separationem variabilium, ut est in aeqq. (68.), perventum esse putamus.

Reductio differentialium ad formam symmetricam et consuetam.

Variabiles jam quidem separatae sunt, neque tamen, quod exspectandum erat, locum symmetricum in aequationibus (68.) occupant. Hujus rei causa in eo quaerenda est, quod quum novas variabiles per aequationes differentiales (72.) introduxerimus, constantem integrationis male elegimus; talem nimirum ut evanescentibus y et z etiam ipsa p et q evanescerent. Introducenda erit itaque nova variabilis pro altera illarum ex. gr. pro ipsa z, per aequationem

$$\frac{\partial z}{\Delta z} = \frac{\partial y'}{\Delta y'}$$

unde fit $z = \frac{y'\Delta e + e\Delta y'}{1-e^2y'^2}$, ubi e est constans arbitraria. Hanc autem omnino ita determinare oportet, ut facta substitutione differentialia (68.) in similem sui formam redeant; id quod aperto fieri nequit, nisi ipsum z^2 per y'^2 rationaliter expressum sit. Facimus itaque $\Delta e = 0$, unde posito

$$\Delta e^2 = 1-2Ee^2+e^4 = (1-\alpha^2e^2)(1-\beta^2e^2),$$

fit $e = \alpha$ (sive β). Hinc nanciscimur substitutionem sequentem

$$(78.)\quad \begin{cases} z^2 = \frac{\alpha^2-y'^2}{1-\alpha^2y'^2}, \quad \Delta z = \frac{\beta(\alpha^4-1)y'}{1-\alpha^2y'^2}, \quad \frac{\partial z}{\Delta z} = \frac{\partial y'}{\Delta y'}, \\ \frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right) = \frac{E-2y'^2+Ey'^4}{1-2Ey'^2+y'^4}, \end{cases}$$

quae ad aeqq. (68.) applicata fit

$$\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-E_4 = \frac{(E-F_4)-2(1-EE_4)y'^2+(E-E_4)y'^4}{1-2Ey'^2+y'^4},$$

$$\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-E_3 = \frac{(E-E_3)-2(1-EE_3)y'^2+(E-E_3)y'^4}{1-2Ey'^2+y'^4}.$$

Sed quum introductis ipsarum E_1, E_2, E_3, E_4 valoribus et considerata aequatione (77.) habeatur

$$1-E(E_1+E_3)+E_1E_3 = 0,$$

$$1-E(E_2+E_4)+E_2E_4 = 0,$$

$$\frac{E-E_4}{E-E_3} = \frac{F+1}{F-1},$$

erit

$$\frac{1-2E_4z^2+z^4}{1-2E_3z^2+z^4} = \frac{F+1}{F-1}\cdot\frac{1-2E_2y'^2+y'^4}{1-2E_1y'^2+y'^4},$$

ergo etiam

$$\sqrt{(2(F-1))}\cdot\frac{\partial z}{\Delta z}\sqrt{\frac{1-2E_4z^2+z^4}{1-2E_3z^2+z^4}} = \sqrt{(2(F+1))}\cdot\frac{\partial y'}{\Delta y'}\sqrt{\frac{1-2E_2y'^2+y'^4}{1-2E_1y'^2+y'^4}},$$

quo facto reductio aequationum differentialium ad formam symmetricam respectu variabilium perfecta est, sicut desiderabatur.

Introductis itaque valoribus (78.) in aeqq. (73.) — (75.) nanciscimur substitutiones sequentes, quae nostras aequationes differentiales (56.) ad separationem variabilium symmetricam transformant:

$$(79.)\quad \begin{cases} p = \dfrac{\beta(\alpha^4-1)yy'+\alpha\Delta y\Delta y'}{1+y^2y'^2-\alpha^2(y^2+y'^2)}, \quad q = \dfrac{\beta(\alpha^4-1)yy'-\alpha\Delta y\Delta y'}{1+y^2y'^2-\alpha^2(y^2+y'^2)}; \\ pq = \dfrac{y^2+y'^2-\alpha^2(1+y^2y'^2)}{1+y^2y'^2-\alpha^2(y^2+y'^2)}, \\ p^2+q^2 = 2\alpha^2\dfrac{(1+y^2y'^2)^2+(y^2+y'^2)^2-2E(y^2+y'^2)(1+y^2y'^2)+8(E^2-1)y^2y'^2}{\{1+y^2y'^2-\alpha^2(y^2+y'^2)\}^2}, \\ \Delta p\Delta q = -\dfrac{\beta^2(\alpha^4-1)^2(y^2-y'^2)(1-y^2y'^2)}{\{1+y^2y'^2-\alpha^2(y^2+y'^2)\}^2}, \end{cases}$$

quarum beneficio habebitur

$$(80.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\Delta y}\sqrt{\dfrac{1-2E_2y^2+y^4}{1-2E_1y^2+y^4}}+\dfrac{\partial y'}{\Delta y'}\sqrt{\dfrac{1-2E_2y'^2+y'^4}{1-2E_1y'^2+y'^4}} = \dfrac{\sqrt{(b+b_1)}}{\sqrt{(2(F+1))}}\partial\mu, \\ \dfrac{\partial y}{\Delta y}\sqrt{\dfrac{1-2E_1y^2+y^4}{2-2E_2y^2+y^4}}+\dfrac{\partial y'}{\Delta y'}\sqrt{\dfrac{1-2E_1y'^2+y'^4}{1-2E_2y'^2+y'^4}} = \dfrac{\sqrt{(b-b_1)}}{\sqrt{(2(F-1))}}\partial\nu. \end{cases}$$

Variabiles y et y' hoc modo per p et q exprimuntur. Ex aeqq. (79.) fit

$$p+q = \frac{2\beta(\alpha^4-1)yy'}{N}, \quad 1+\alpha^2pq = \frac{(1-\alpha^4)(1+y^2y'^2)}{N},$$

$$1+\beta^2pq = \frac{(\beta^2-\alpha^2)(y^2+y'^2)}{N},$$

atque hinc

$$\frac{p+q}{1+\alpha^2pq} = \frac{-2\beta yy'}{1+y^2y'^2}, \qquad \frac{p+q}{1+\beta^2pq} = \frac{-2\alpha yy'}{y^2+y'^2},$$

unde

$$\frac{(1+\alpha p)(1+\alpha q)}{(1-\alpha p)(1-\alpha q)} = \left(\frac{1-yy'}{1+yy'}\right)^2 = f, \qquad \frac{(1+\beta p)(1+\beta q)}{(1-\beta p)(1-\beta q)} = \left(\frac{y-y'}{y+y'}\right)^2 = g.$$

Extractis itaque radicibus invenitur

$$yy' = \frac{1-\sqrt{f}}{1+\sqrt{f}}, \qquad \frac{y}{y'} = \frac{1+\sqrt{g}}{1-\sqrt{g}},$$

unde

$$(81.)\quad y^2 = \frac{1-\sqrt{f}}{1+\sqrt{f}}\cdot\frac{1+\sqrt{g}}{1-\sqrt{g}}, \qquad y'^2 = \frac{1-\sqrt{f}}{1+\sqrt{f}}\cdot\frac{1-\sqrt{g}}{1+\sqrt{g}}.$$

Hinc elucet, aequationem, cujus radices sunt y et y', ad octavum gradum ascendere. Id quod vel per se jam satis indicat, functiones aliquas illarum sicut novas variabiles introducendas esse, quae ab aequatione secundi tantum gradus pendeant. Ipsae etiam aeqq. (80.) talem substitutionem suppeditant, quippe quae positis $y^2+\frac{1}{y^2}=x$, $y'^2+\frac{1}{y'^2}=x'$ valde simplificantur. Eadem fere ex aeqq. (81.) petitur, namque invenimus

$$\frac{1-y^2}{1+y^2} = \frac{\sqrt{f}-\sqrt{g}}{1-\sqrt{(fg)}}, \qquad \frac{1-y'^2}{1+y'^2} = \frac{\sqrt{f}+\sqrt{g}}{1+\sqrt{(fg)}},$$

quarum quadrata unam tantum radicem $\sqrt{(fg)}$ continent:

$$\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2 = \frac{f+g-2\sqrt{(fg)}}{1+fg-2\sqrt{(fg)}}, \qquad \left(\frac{1-y'^2}{1+y'^2}\right)^2 = \frac{f+g+2\sqrt{(fg)}}{1+fg+2\sqrt{(fg)}}.$$

Introductis itaque variabilibus x et x' per substitutiones

$$(82.)\quad x = \left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2, \qquad x' = \left(\frac{1-y'^2}{1+y'^2}\right)^2,$$

et advocatis valoribus ipsarum f et g, inveniuntur formulae sequentes:

$$(83.)\quad x = \frac{E(1+p^2q^2)-(p^2+q^2)+\Delta p\,\Delta q}{(E+1)(1+pq)^2}, \qquad x' = \frac{E(1+p^2q^2)-(p^2+q^2)-\Delta p\,\Delta q}{(E+1)(1+pq)^2}$$

et propter

$$\frac{\partial y}{\Delta y} = \frac{1}{2\sqrt{(2(1-E))}}\cdot\frac{\partial x}{\sqrt{x}\sqrt{(1-x)}\sqrt{\left(1-\frac{E+1}{E-1}x\right)}},$$

aequationes differentiales:

$$(84.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\sqrt{x}\sqrt{(1-x)}\sqrt{(1-mx)}}\cdot\dfrac{\sqrt{(1-m_2x)}}{\sqrt{(1-m_1x)}} + \dfrac{\partial x'}{\sqrt{x'}\sqrt{(1-x')}\sqrt{(1-mx')}}\cdot\dfrac{\sqrt{(1-m_2x')}}{\sqrt{(1-m_1x')}} \\ \qquad = 2\sqrt{(b+b_1)}\sqrt{\dfrac{(1-E)(1-E_1)}{(1+F)(1-E_2)}}\,\partial\mu, \\ \dfrac{\partial x}{\sqrt{x}\sqrt{(1-x)}\sqrt{(1-mx)}}\cdot\dfrac{\sqrt{(1-m_1x)}}{\sqrt{(1-m_2x)}} + \dfrac{\partial x'}{\sqrt{x'}\sqrt{(1-x')}\sqrt{(1-mx')}}\cdot\dfrac{\sqrt{(1-m_1x')}}{\sqrt{(1-m_2x')}} \\ \qquad = 2\sqrt{(b-b_1)}\sqrt{\left(\dfrac{(1-E)(1-E_2)}{(F-1)(1-E_1)}\right.}\,\partial\nu, \end{cases}$$

siquidem ponitur

$$(85.)\quad m = \frac{E+1}{E-1}, \quad m_1 = \frac{E_1+1}{E_1-1} = \frac{EC-F+D}{C+1\cdot E-1}, \quad m_2 = \frac{E_2+1}{E_2-1} = \frac{EC-F+D}{C-1\cdot E-1}.$$

Praeter aeqq. (83), quae nexum inter variabiles primitivas p, q et derivatas x, x' exprimunt, notentur etiam sequentes:

(86.)
$$\begin{cases}
\sqrt{x}+\sqrt{x'} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{(E+1)}}\cdot\frac{\sqrt{((1-\beta^2p^2)(1-\beta^2q^2))}}{1+pq}, \\
\sqrt{x}-\sqrt{x'} = \frac{\beta\sqrt{2}}{\sqrt{(E+1)}}\cdot\frac{\sqrt{((1-\alpha^2p^2)(1-\alpha^2q^2))}}{1+pq}, \\
\sqrt{(1-x)}+\sqrt{(1-x')} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(E+1)}}\cdot\frac{\sqrt{((1+\alpha p)(1+\alpha q)(1+\beta p)(1+\beta q))}}{1+pq}, \\
\sqrt{(1-x)}-\sqrt{(1-x')} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(E+1)}}\cdot\frac{\sqrt{((1-\alpha p)(1-\alpha q)(1-\beta p)(1-\beta q))}}{1+pq}, \\
\sqrt{(1-mx)}+\sqrt{(1-mx')} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(E-1)}}\cdot\frac{\sqrt{(-(1-\alpha p)(1+\alpha q)(1+\beta p)(1-\beta q))}}{1+pq}, \\
\sqrt{(1-mx)}-\sqrt{(1-mx')} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(E-1)}}\cdot\frac{\sqrt{(-(1+\alpha p)(1-\alpha q)(1-\beta p)(1+\beta q))}}{1+pq}, \\
\sqrt{(x(1-x)(1-mx))}+\sqrt{(x'(1-x')(1-mx'))} \\
\qquad = 2\sqrt{2}\,\frac{q^3-p-Eq(1-pq)}{(E+1)\sqrt{(1-E)}(1+pq)^3}\Delta p, \\
\sqrt{(x(1-x)(1-mx))}-\sqrt{(x'(1-x')(1-mx'))} \\
\qquad = 2\sqrt{2}\,\frac{p^3-q-Ep(1-pq)}{(E+1)\sqrt{(1-E)}(1+pq)^3}\Delta q, \\
\sqrt{\frac{1-m_2x}{1-m_1x}}+\sqrt{\frac{1-m_2x'}{1-m_1x'}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{(b+b_1)(E_1-1)}{(F+1)(E_2-1)}}\cdot\frac{s\Delta p}{\varphi}, \\
\sqrt{\frac{1-m_2x}{1-m_1x}}-\sqrt{\frac{1-m_2x'}{1-m_1x'}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{(b+b_1)(E_1-1)}{(F+1)(E_2-1)}}\cdot\frac{\Delta q}{s\varphi}, \\
\sqrt{\frac{1-m_1x}{1-m_2x}}+\sqrt{\frac{1-m_1x'}{1-m_2x'}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{(b-b_1)(E_2-1)}{(F-1)(E_1-1)}}\cdot\frac{s\Delta p}{\psi}, \\
\sqrt{\frac{1-m_1x}{1-m_2x}}+\sqrt{\frac{1-m_1x'}{1-m_2x'}} = -\sqrt{2}\sqrt{\frac{(b-b_1)(E_2-1)}{(F-1)(E_1-1)}}\cdot\frac{\Delta q}{s\psi}.
\end{cases}$$

Limites integrationis.

Reducto problemate de functionibus quadrupliciter periodicis ad integrationem radicis quadraticae e quantitate algebraica quinti gradus, plenior determinatio considerationem limitum postulat.

Quem ad finem observo primum, mutato u in $u+A+B$ vel in $u+K+L$, quantitates p et q (quas ipsis $\frac{S'}{P'}$, $\frac{S''}{P''}$ aequales posuimus) vel in se invicem mutari vel in valores reciprocos $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$; unde etiam elucet, mutato u in

$u+A+B+K+L$, mutari p in $\frac{1}{q}$, q in $\frac{1}{p}$. Hinc fit, ut variabiles x et x', quae per aeqq. (83.) exprimuntur, factis illis mutationibus sive immutatae maneant, sive in se invicem abeant. Secundum est, quod applicatis ad argumentum u semiperiodis $2A$, $2B$, $2(A+B)$, etc. quantitates p et q aut non mutantur aut oppositos valores $-p$, $-q$ induunt, quod e tabula (7.) cognoscitur. Unde quum ipsis x et x' nulla mutatio ingruat, sequitur in universum, variabiles x et x' mutato u in

$$u+n_1(A+B)+n_2(A-B)+n_3(K+L)+n_4(K-L),$$

vel in se ipsas vel invicem abire, siquidem literis n_1, n_2, n_3, n_4 numeri integri denotantur. Si itaque argumento u valores A, B, K, L, etc. ex ordine tribuuntur, quaterni ad eosdem valores ipsarum x et x' perducunt, ita ut in quatuor classes distribui possint, quarum prima amplectitur valores 0, $A+B$, $K+L$, $A+B+K+L$; secunda quadrantes A, B, $A+K+L$, $B+K+L$; tertia quadrantes K, L, $A+B+K$, $A+B+L$; quarta quadrantes $A+K$, $B+K$, $A+L$, $B+L$. Et in universum, si valor multiplex $n_1(A+B)+n_2(A-B)+n_3(K+L)+n_4(K-L)$ brevitatis gratia per H designatur, omnis summa quotlibet quadrantium ad unam aliquam formarum H, $A+H$, $K+H$, $A+K+H$ revocari potest; quarum singulae ad eosdem valores variabilium x, x' perducunt.

Determinatio valorum ipsarum x et x', qui ad singulas classes pertinent, commodissime ope tabulae (8.) perficitur. Namque invenitur

1) pro $u=0$, $p=0$, $q=0$;
2) pro $u=A$, $p=\frac{\sigma}{\varpi}$, $q=\frac{\sigma'''}{\varpi'''}$;
3) pro $u=K$, $p=0$, $q=\infty$;
4) pro $u=A+K$, p indeterminatum, $q=\frac{S'''}{k'''}$, unde $\Delta q=0$,

quibus valoribus in aeqq. (83.) substitutis et respectis formulis (25.) — (28.). (57.) et (85.), nanciscimur valores sequentes:

1) pro $u=H$, $x=1$, $x'=\frac{1}{m}$;
2) pro $u=A+H$, $x=\frac{1}{m_1}$, $x'=\frac{1}{m_2}$;
3) pro $u=K+H$, $x=0$, $x'=\infty$;
4) pro $u=A+K+H$, $x=x'$ arbitrariam;

quorum utroslibet pro limitibus integrationis correspondentibus eligere licet.

Sumantur itaque ex. causa valores $u=0$, $x=1$, $x'=\frac{1}{m}$ pro limitibus inferioribus. Unde, quum differentialia $\partial\varrho'$, $\partial k''$, ideoque etiam $\partial\mu$ et $\partial\nu$ habeant formam $g\,\partial u+g'\,\partial u'$ et $h\,\partial u+h'\,\partial u'$, sicut supra adnotavimus, fit

$$(87.)\quad \begin{cases} \int_{x\div 1}\frac{(1-m_2x)\partial x}{\sqrt{X}}+\int_{x'\div\frac{1}{m}}\frac{(1-m_2x')\partial x'}{\sqrt{X'}}=gu+g'u', \\ \int_{x\div 1}\frac{(1-m_1x)\partial x}{\sqrt{X}}+\int_{x'\div\frac{1}{m}}\frac{(1-m_1x')\partial x'}{\sqrt{X'}}=hu+h'u', \end{cases}$$

ubi positum est

$$X = x(1-x)(1-mx)(1-m_1x)(1-m_2x),$$
$$X' = x'(1-x')(1-mx')(1-m_1x')(1-m_2x');$$

ita ut variabiles x, x', ergo etiam p et q, ab omni parte determinatae sint.

Priusquam ad sequentia pergitur, haud abs re esse videtur, objectionem aliquam praecidere, quae ex applicatione limitum ad quartam classem pertinentium oriri potest. Sumto enim valore $u=A+K$ pro limite inferiori, et designata per f quantitate arbitraria, inveniuntur aequationes

$$(88.)\quad \begin{cases} \int_{x\div f}\frac{(1-m_2x)\partial x}{\sqrt{X}}+\int_{x'\div f}\frac{(1-m_2x')\partial x'}{\sqrt{X'}}=g(u-A-K)+g'(u'-A'-K'), \\ \int_{x\div f}\frac{(1-m_1x)\partial x}{\sqrt{X}}+\int_{x'\div f}\frac{(1-m_1x')\partial x'}{\sqrt{X'}}=h(u-A-K)+h'(u'-A'-K'), \end{cases}$$

quae profecto propter limitem arbitrarium aliquid absurdi habere videntur. Animadvertendum est autem, pro $u=A+K$ fieri quidem $x=x'$, non tamen $\sqrt{X}=\sqrt{X'}$, sed $\sqrt{X}=-\sqrt{X'}$. Namque ex aeqq. (86.) sequitur, propter $\Delta q=0$, primum

$$\sqrt{(x(1-x)(1-mx))}-\sqrt{(x'(1-x')(1-mx'))}=0$$

deinde propter $s=\frac{P'}{P''}=0$,

$$\sqrt{\frac{1-m_1x}{1-m_2x}}+\sqrt{\frac{1-m_1x'}{1-m_2x'}}=0$$

unde $\sqrt{X}=-\sqrt{X'}$. Hinc manifesto habetur

$$\int_{f\div g}\frac{(1-m_2x)dx}{\sqrt{X}}+\int_{f\div g}\frac{(1-m_2x')dx'}{\sqrt{X'}}=0,$$

qua aequatione ad aeqq. (88.) addita, manifestum fit mutato f in g summam duorum integralium, quae sunt in aeq. (88.), omnino non mutari. Quae consideratio solutionem paradoxi praebet.

Solutio problematis inversi de transcendentibus Abelianis.

Venimus nunc ad problema inversum, quale vulgo proponi solebat: Datis aequationibus differentialibus

$$\int \frac{(\alpha+\beta y)\,\partial y}{\sqrt{Y}} + \int \frac{(\alpha+\beta y')\,\partial y'}{\sqrt{Y'}} = v,$$

$$\int \frac{(\alpha'+\beta' y)\,\partial y}{\sqrt{Y}} + \int \frac{(\alpha'+\beta' y')\,\partial y'}{\sqrt{Y'}} = v',$$

ubi Y *et* Y' significant expressiones integras variabilium y et y' quinti vel sexti gradus, invenire ipsas y et y'. Cujus solutio ex antecedentibus facile derivatur.

Redigantur enim primum differentialia ope substitutionis idoneae ad formam (87.), quod cum elementare sit hoc loco fusius non exsequendum est, et ponatur

$$\int \frac{1-m_2 x}{\sqrt{X}}\,\partial x + \int \frac{1-m_2 x'}{\sqrt{X'}}\,\partial x' = gu+g'u',$$

$$\int \frac{1-m_1 x}{\sqrt{X}}\,\partial x + \int \frac{1-m_1 x'}{\sqrt{X'}}\,\partial x = hu+h'u'.$$

E quibus aequationibus postquam constantes g, h, g', h', et quadrantes K, L, K', L', A, B, A', B' inventae fuerint, tota res peracta erit.

Hunc ad finem instituatur integratio inter limites in capite praecedente traditos et invenietur

$$\int_{0\div-1} \frac{1-m_2 x}{\sqrt{X}}\,\partial x + \int_{\infty\div\frac{1}{m}} \frac{1-m_2 x'}{\sqrt{X'}}\,\partial x' = (gK+g'K')+(gH+g'H'),$$

$$\int_{0\div-1} \frac{1-m_1 x}{\sqrt{X}}\,\partial x + \int_{\infty\div\frac{1}{m}} \frac{1-m_1 x'}{\sqrt{X'}}\,\partial x' = (hK+h'K')+(hH+h'H'),$$

$$\int_{\frac{1}{m_1}\div-1} \frac{1-m_2 x}{\sqrt{X}}\,\partial x + \int_{\frac{1}{m_2}\div\frac{1}{m}} \frac{1-m_2 x'}{\sqrt{X'}}\,\partial x' = (gA+g'A')+(gH+g'H'),$$

$$\int_{\frac{1}{m_1}\div-1} \frac{1-m_1 x}{\sqrt{X}}\,\partial x + \int_{\frac{1}{m_2}\div\frac{1}{m}} \frac{1-m_1 x'}{\sqrt{X'}}\,\partial x' = (hA+h'A')+(hH+h'H'),$$

unde elucet, integralia nostra habere valores multiplices, quales per H designavimus (id quod pro casu speciali jam notum erat *)). Hos itaque valores a calculo integrali postulamus, et facta comparatione valores expressionum $gK+g'K'$,

*) ! *J.*

$hK+h'K'$, $gA+g'A'$, $hA+h'A'$, nec non reliquarum, e quibus $gH+g'H'$ et $hH+h'H'$ conflantur, videlicet $gL+g'L'$, $hL+h'L'$, $gB+g'B'$, $hB+h'B'$, inventos esse putamus. Sed quum propter $AK'-A'K=BL'-B'L$ (cf. aeqq. (6.)) habeatur identice

$$\begin{aligned}&(gA+g'A')(hK+h'K')-(hA+h'A')(gK+g'K')\\=\;&(gB+g'B')(hL+h'L')-(hB+h'B')(gL+g'L'),\end{aligned}$$

alteruter e septem reliquis sponte sequitur; quapropter ad determinationem duodecim quantitatum $g, h, g', h', A, B, K, L,$ etc. septem tantum aequationes relinquuntur, quibus accedunt binae illae ex aeqq. (6.) derivatae $AK'=BL'$ et $A'K=B'L$. Tres itaque qnantitatum illarum indeterminatae manent, quod *mirum* videri posset, nisi e sequente consideratione eluceret eas omnino arbitrarias esse.

Nam quum ab expressionibus hujusmodi profecti simus

$$e^{ru^2+r'u'^2}P''' = Se^{r(u+2aK+2bL)^2+r'(u'+2aK'+2bL')^2},$$

quae sex constantes continent, facile demonstratur, tres earum salvo valore ipsius P''' ad arbitrium assumi posse. Fit enim

$$P''' = Se^{4a(rKu+r'K'u')+4b(rLu+r'L'u')+4a^2(rK^2+r'K'^2)+8ab(rKL+r'K'L')+4b^2(rL^2+r'L'^2)}$$

quare selectis sex aliis constantibus $r_1, K_1, L_1, r_1', K_1', L_1'$ talibus ut sit

$$\begin{aligned}r_1K_1^2+r_1'K_1'^2&=rK^2+r'K'^2,\\r_1K_1L_1+r_1'K_1'L_1'&=rKL+r'K'L',\\r_1L_1^2+r_1'L_1'^2&=rL^2+r'L^2,\end{aligned}$$

et introductis insuper variabilibus u_1 et u_1', per aequationes

$$\begin{aligned}r_1K_1u_1+r_1'K_1'u_1'&=rKu+r'K'u',\\r_1L_1u_1+r_1'L_1'u_1'&=rLu+r'L'u',\end{aligned}$$

expressio ipsius P''' in se ipsa redit. Inter sex quantitates $r_1, K_1, L_1, r_1', K_1', L_1'$ autem, quum tres tantum aequationes habeantur, tres arbitrariae sunt.

Rite jam determinatis quadrantibus $A, B, K,$ etc., formentur quantitates $P, P', P'',$ etc. sicut praescriptum est in aeqq. (4.); quo facto aequationes (83.) solutionem completam problematis praebent.

14.
Notiz über A. Göpel.

Herr *Adolph Göpel*, Doctor der Philosophie und einer der Beamten der hiesigen Königlichen Bibliothek, ist wenige Wochen, nachdem er im März d. J. die wichtige Abhandlung „*Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis*" zum Druck übergeben, einer kurzen aber schmerzlichen Krankheit erlegen. In den Stunden, welche ihm sein Amt frei liefs, widmete er sich tiefen mathematischen Speculationen. Die einzige Erholung von diesen fand er in der Musik, in welcher er es bis zu einer bedeutenden Fertigkeit gebracht hatte. In stiller Zurückgezogenheit scheint er selbst den Umgang mit den Gelehrten seines Faches vermieden zu haben, die erst nach seinem Tode erfuhren, welch' ein bedeutendes Talent unter ihnen gelebt hatte. Ich habe ihn nie gesehen.

Seine Jugenderlebnisse erzählt *Göpel* selbst in dem seiner Doctoraldissertation angehängten Curriculum Vitae. Sein Vater, aus Sachsen gebürtig, war Musiklehrer in Rostock, wo er im September 1812 geboren wurde. Ein mütterlicher Oheim, der englischer Consul in Corsika war, nahm ihn in seinem zehnten Jahre mit sich nach Italien. Dort während eines wechselnden Aufenthaltes in mehreren Städten machte es sich dieser Oheim zum angelegentlichen Geschäft, seinen jungen Verwandten in den Anfangsgründen der Wissenschaften selbst zu unterrichten. Einen längeren Aufenthalt in Pisa während der beiden Winter von 1825 und 1826 benutzte der junge *Göpel*, um an der dortigen Universität den Vorlesungen der Professoren *Pieraccioli, Poletti, Gerbi* und *Gatteschi* über Algebra und Differentialrechnung, Statik und analytische Mechanik, theoretische und Experimentalphysik beizuwohnen. Im J. 1827 kehrte er nach seiner Vaterstadt Rostock zurück, und besuchte hierauf noch zwei Jahre die erste Classe des dortigen Gymnasiums, von wo er die Berliner Universität bezog. Er ergriff mit Eifer die ihm hier gebotene Gelegenheit einer mannichfachen Ausbildung, und hörte aufser mathematischen, physikalischen und chemischen auch noch philosophische, philologische, historische und ästhetische Vorlesungen. Tiefern mathematischen Studien wandte er sich erst nach Beendigung seiner Universitätszeit zu, und wurde, wie viele von denen, welche zur rein mathematischen Speculation berufen sind, zunächst von der höhern Zahlenlehre

angezogen. In seiner zur Erwerbung des Doctorgrades an der Berliner Universität im März 1835 vertheidigten Dissertation „***De aequationibus secundi gradus indeterminatis***," welche etwa $1\frac{1}{2}$ Bogen umfafst, legte er eine Probe dieser arithmetischen Studien ab, welche von grofsem Scharfsinn zeugte und seine Fähigkeit zu tiefen Forschungen bekundete. Da diese merkwürdige Dissertation nicht in den Handelsverkehr gekommen ist, will ich hier einige der hauptsächlichsten darin enthaltenen Resultate mittheilen.

Wenn man die Quadratwurzel einer Primzahl A von der Form $4n+1$ in einen Kettenbruch verwandelt, so enthält, wie bekannt, die symmetrische Periode der Nenner zwei gleiche mittlere Terme. Sind die diesen entsprechenden vollständigen Quotienten

$$\frac{\sqrt{A}+I}{D}, \quad \frac{\sqrt{A}+I'}{D'},$$

so hat ***Legendre*** gezeigt, dafs

$$D = D', \qquad A = I'I' + DD,$$

und dafs man daher auf diese Weise durch die Verwandlung der Quadratwurzel der Primzahl A in einen Kettenbruch ihre Zerfällung in zwei Quadrate erhält. Dieses schöne Resultat war bisher einzig in seiner Art geblieben. Durch tiefer eingehende Betrachtungen zeigt nun hier ***Göpel,*** wie man auch, wenn A eine Primzahl von der Form $4n+3$ oder ihr Doppeltes ist, die Zerfällung von A in die Form $\varphi^2 \pm 2\psi^2$ durch die Entwicklung von $\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch findet. ***Ist nämlich A eine Primzahl von der Form*** $8n+3$ ***oder ihr Doppeltes, so kommt man bei der Entwicklung von*** $\sqrt{A}$ ***in einen Kettenbruch immer auf drei auf einander folgende vollständige Quotienten***

$$\frac{\sqrt{A}+I^0}{D^0}, \quad \frac{\sqrt{A}+I}{D}, \quad \frac{\sqrt{A}+I'}{D'},$$

in welchen D ***entweder*** $= \frac{1}{2}D^0$ ***oder*** $\frac{1}{2}D'$ ***oder*** $\frac{1}{2}(D^0+D')$ ***ist, und es wird in den beiden ersten Fällen***

$$A = I^2 + 2D^2,$$

im dritten

$$A = \tfrac{1}{4}(I-I')^2 + 2D^2 = \tfrac{1}{16}(D^0-D')^2 + 2D^2,$$

wo $I-I'$ ***immer durch*** 2, D^0-D' ***durch*** 4 ***aufgeht. Wenn dagegen A eine Primzahl von der Form*** $8n+7$ ***oder ihr Doppeltes ist, so wird man bei der Verwandlung von*** $\sqrt{A}$ ***in einen Kettenbruch immer auf zwei aufeinander folgende vollständige Quotienten***

$$\frac{\sqrt{A}+I^0}{D^0}, \quad \frac{\sqrt{A}+I}{D}$$

kommen, für welche

$$D + D^0 = 2I$$

ist, und diese ergeben

$$A = 2I^2 - \tfrac{1}{4}(D - D^0)^2,$$

wo $D - D^0$ *immer gerade ist.*

Ich habe mit Hülfe der ***Degenschen*** Tafel die folgende Tabelle angefertigt, welche anzeigt, für welche Primzahlen von der Form $8n+3$ oder Doppelte von solchen die drei von ***Göpel*** unterschiedenen Fälle,

$$D = \tfrac{1}{2}D^0, \quad D = \tfrac{1}{2}D', \quad D = \tfrac{1}{2}(D^0 + D')$$

eintreten.

$D = \frac{1}{2}D^0$: 3. 6. 11. 22. 38. 43. 59. 83. 131. 139. 179. 211. 214. 227. 262. 278. 283. 326. 379. 419. 443. 467. 491. 502. 547. 619. 659. 683. 694. 739. 787. 811. 827. 838. 971. 998.

$D = \frac{1}{2}D'$: 67. 86. 118. 307. 331. 358. 422. 523. 563. 566. 571. 614. 643. 662. 691. 859. 934. 947.

$D = \frac{1}{2}(D^0 + D')$: 19. 107. 134. 163. 166. 251. 347. 454. 499. 587. 758. 883. 886. 907. 982.

Es ist hierbei zu bemerken, dafs wenigstens in den hier betrachteten Zahlen unter 1000 der erste Fall bedeutend überwiegt, indem unter den 69 Zahlen 36 dem ersten, 18 dem zweiten, 15 dem dritten Falle angehören. Für die Primzahlen von der Form $8n+7$ und ihre Doppelten sind in ähnlicher Art die Fälle zu unterscheiden, in welchen $D^0 > D$ oder $D > D^0$.

Nach dieser ersten Arbeit hat ***Göpel*** in einem Zeitraume von 12 Jahren nichts veröffentlicht, aufser in den Jahren 1843—45 mehrere kleine, mit Geist verfafste, wenn gleich weniger bedeutende Aufsätze, welche er bei Gelegenheit der Correctur einer in Greifswalde von ***Grunert*** herausgegebenen mathematischen Zeitschrift niederschrieb. In einer derselben beweist er, *dafs wenn in einer Gleichung* $\left(\frac{x+\sqrt{y}}{p}\right)^n = P + \sqrt{Q}$, *wo* x, y, p, n, P, Q *ganze Zahlen bedeuten, der Nenner* p *von* 1 *verschieden ist, und* x, y, p *keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, immer* $p = 2$, $n = 3$ *oder ein Vielfaches von* 3, x *ungerade und* y *von der Form* $8n+5$ *sein mufs.* Mit der Handhabung der synthetischen Methoden ***Steiners*** zeigt er sich in mehreren dieser Aufsätze vollkommen vertraut. Es ist zu vermuthen, dafs sich noch andere gröfsere unpublicirte mehr oder minder ausgearbeitete Abhandlungen in seinem Nachlafs finden werden. Die von ihm kurz vor seinem Tode beendigte oben

angeführte Abhandlung behandelt einen hohen und abstracten Theil der Analysis, und giebt die Lösung eines der bedeutendsten Probleme, welches sich die gegenwärtige Mathematik gestellt hat, die umgekehrten Functionen der ersten Classe der *Abel*schen Integrale wirklich darzustellen. Durch eine glückliche Divination verallgemeinert er auf naturgemäfse Art die einfachen Reihen Θ, auf welche ich die elliptischen Functionen zurückgeführt habe, und findet, dafs diese verallgemeinerten Reihen die Coëfficienten der quadratischen Gleichung geben, deren beide Wurzeln in meiner Theorie der hyperelliptischen Functionen die simultanen Umkehrungsfunctionen zweier Integralsummen sind. Das einfache Mittel, dessen er sich hiezu bedient, ist die Multiplication zweier von den verallgemeinerten Reihen, wie ich ein ähnliches Verfahren für die Functionen Θ selbst im 3ten Bande des mathematischen Journals S. 305 angegeben habe. Meisterhaft ist die Art, wie er die Differentialgleichungen, welche er findet, ungeschreckt von ihrer Complication, durch eine passende Substitution in die verlangte Form der von mir aufgestellten Systeme der hyperelliptischen Differentialgleichungen bringt, und hierdurch das gestellte Problem vollständig erledigt. Aber *Göpel* war nicht der einzige, welcher sich mit Glück mit diesem schönen Probleme beschäftigt hat. Eine andere, umfangreichere Arbeit, welche, wie ich glaube, seit dem October v. J. einer berühmten Akademie vorliegt, und deren wesentlicher Inhalt mir von ihrem Verfasser und von mir auch einigen geehrten Freunden seit 3 Jahren bereits mitgetheilt worden ist, geht von derselben glücklichen Divination aus, und führt, wenn auch auf verschiednem, vielleicht leichterm Wege zu denselben Resultaten.

Ich bemerke noch, dafs die von *Göpel* angestellten Betrachtungen über die zweiten Differentiale seiner Functionen, welche für den jetzigen Zweck der Ahhandlung überflüssig sind, so wie seine ausdrücklichen Worte S. 297 „quas ad secundam speciem nostrarum functionum facere *infra* videbis" und S. 298 „Quam *infra* ad tertiam speciem functionum quadrupliciter periodicarum pertinere videbis" auf weitere noch in der Abhandlung selbst auszuführende Untersuchungen deuten, die man aber in derselben mit Bedauern vermifst. Vielleicht finden sich dieselben in des Autors Papieren, die vielleicht auch das gewagt scheinende Wort rechtfertigen, dafs eine ähnliche Methode sich auf alle Transcendenten erstrecke, welche aus der Integration algebraischer Gröfsen entstehen. Auch dürfte schon nicht so ganz unbedenklich, wie der Verfasser meint, die Ausdehnung auf die Integrale erscheinen, in denen die unter dem Quadratwurzelzeichen befindliche Function den *sechsten* Grad übersteigt, da bei ihnen

die Anzahl der in den Reihen enthaltenen Constanten nicht mehr, wie bei den elliptischen und den *Abel*schen Integralen der ersten Classe, mit der Anzahl der Moduln übereinstimmt.

Wenn auch nicht in der ersten Jugendblüthe, wie *Galois* und *Abel*, so hat doch auch hier viel zu früh und mitten in der Arbeit der Tod ein bedeutendes Talent hinweggerafft. Freuen wir uns, dafs uns von demselben wenigstens ein schönes und dauerndes Denkmal hinterblieben ist. Bei der Gewohnheit der Deutschen, ihre Arbeiten überreif werden zu lassen, und ihrer Scheu, mit ihren besten Gedanken hervorzutreten, wären wir leicht um die Früchte der Arbeit *Göpels* gekommen, wenn ihn nicht ein von Hrn. *Hermite* an mich gerichteter Brief, wie in der Einleitung der Abhandlung angedeutet ist, zu ihrer Bekanntmachung bewogen hätte; oder es hat ein dunkles Vorgefühl, das uns aus den Worten „quum magis quam optabam festinandum fuisset" anspricht, ihn zur Eile ermahnt.

Berlin, d. 22. Sept. 1847.

C. G. J. Jacobi.

Der Herausgeber dieses Journals bemerkt noch, dafs der Herr Dr. *Göpel*, als er ihm das Manuscript zu der nunmehr hier gedruckten Abhandlung übergab, dabei auf Befragen äufserte, er habe nicht die Absicht gehabt, an der Bewerbung um den von der Pariser Akademie ausgesetzten Preis Theil zu nehmen; es genüge ihm, wie er hinzufügte, die Freude, welche er an der Beschäftigung mit der Mathematik finde. Dafs diese letzte Bemerkung ernst gemeint war, davon ist der offenbarste Beweis der, dafs, wie es die vorstehende Notiz berichtet, der Herr Dr. *Göpel*, in den 12 Jahren seit seiner Doctor-Dissertation bis auf die gegenwärtige Abhandlung leider! nur Weniges weiter öffentlich bekannt gemacht hat, und dafs sogar die übrigen Früchte seiner Beschäftigung mit der Mathematik andern hiesigen Mathematikern unbekannt geblieben waren. Als daher der Herausgeber dieses Journals dem Herrn Dr. *Göpel*, indem er ihm den besten Dank für den schönen Beitrag zum Journale sagte, bemerklich machen mufste, dafs er wegen der grofsen Menge schon vorliegender, ebenfalls wichtiger Beiträge, mit dem besten Willen nicht im Stande sei, den Druck seiner Abhandlung im Journal *unverzüglich* geschehen zu lassen, oder ihn auch nur in dem Maafse zu beschleunigen, wie er es wohl wünschte, hatte der Herr Dr. *Göpel* gegen den Aufschub nichts einzuwenden. Der Herausgeber des Journals war nun bemüht, die Abhandlung so schnell als möglich in das Journal zu bringen; aber so eben, als darauf bald wirklich der Raum dazu sich ergab, hörte er die Nachricht von dem fast plötzlichen

Dahinscheiden des Herrn Verfassers. Wäre es auch nur entfernt zu ahnden gewesen, dafs dieses traurige Ereignifs so nahe bevorstehe, so würde der Herausgeber *alles* Andre unbedingt aufgeschoben und die Abhandlung des Herrn Dr. *Göpel* sofort zum Druck befördert haben. Allein dies war durchaus nicht der Fall. Herr *Göpel* stand noch im ersten Mannes-Alter und schien nichts weniger als kränklich. Dem Herausgeber ist es indessen bei dem Allem wahrhaft schmerzlich, dafs er nicht dennoch die Abhandlung vor allem Anderem drucken liefs, und dafs es nicht noch *vor* dem Hinscheiden des Verfassers geschehen ist.

Der Herausgeber hat den Herrn Dr. *Göpel* nur einmal, etwa eine Stunde lang, gesehen und gesprochen; aber er wird sich dessen stets mit einer wehmüthigen Freude erinnern; denn er fand in ihm nicht allein einen unverkennbar wahren Gelehrten, sondern auch eine, durch Bescheidenheit, Offenheit, durch die feinste Bildung und die angenehmsten geselligen Formen liebenswürdige Persönlichkeit, in einem Maafse, wie es nur selten vorkommt. Von seinen Mitarbeitern in der Bibliothek ist er stets hochgeachtet und geliebt worden; so wie von Allen, die ihn sonst kannten. Und Gelehrter war er nicht blofs in der Mathematik, von einem Range, wie er sich in seinen Abhandlungen zu erkennen giebt, sondern, wie der Herausgeber gehört hat, auch in andern Wissenschaften. In der Musik war sein theoretisches Wissen und seine practische Übung, wie dem Herausgeber einer seiner Bekannten gesagt hat, der den Herrn *Göpel* lange und genau kannte, und der ein urtheilsberechtigter Kenner ist, sehr bedeutend. Der Herr Dr. *Göpel* war daher in mehr als einem Betracht ein höchst ausgezeichneter Mann, dessen so früher Hintritt als ein wahrer Verlust für die Wissenschaft und die Kunst zu betrachten sein dürfte.

Der Herausgeber hat einige Hoffnung, noch andre fertige mathematische Arbeiten des Herrn Dr. *Göpel* für das Journal aus dessen Nachlafs zu erhalten, und er wird sich, wenn diese Hoffnung erfüllt werden sollte, beeilen, diese Arbeiten dem mathematischen Publicum mitzutheilen. Zur Aufnahme der Dissertation in das Journal, von welcher der Herr Prof. *Jacobi* vorstehend eine so schöne Übersicht giebt, hat er schon die Erlaubnifs erlangt, und es wird daher diese Dissertation jedenfalls und sobald als möglich in dem Journale gedruckt werden. Auch glaubt er, wegen der Ausgezeichnetheit des Mannes, nicht zu fehlen, wenn er, wie es geschehen soll, nach den noch vorräthigen, schon gedruckten und vertheilten Fac-simile's, einem der folgenden Hefte ein Fac-simile der Handschrift des Herrn *Göpel* beifügt.

Berlin, den 25. Septbr. 1847.

A. L. Crelle.

15.

Zur Theorie der complexen Zahlen.

(Von dem Herrn Prof. *Kummer* in Breslau.)

(Auszug aus den Berichten der Königl. Akad. der Wiss. zu Berlin vom März 1845.)

Es ist mir gelungen, die Theorie derjenigen complexen Zahlen, welche aus höheren Wurzeln der Einheit gebildet sind und welche bekanntlich in der Kreistheilung, in der Lehre von den Potenzresten und den Formen höherer Grade eine wichtige Rolle spielen, zu vervollständigen und zu vereinfachen; und zwar durch Einführung einer eigenthümlichen Art imaginärer Divisoren, welche ich *ideale complexe Zahlen* nenne; worüber eine kurze Mittheilung zu machen ich mir erlaube.

Wenn α eine imaginäre Wurzel der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$, λ eine Primzahl ist und a, a_1, a_2, etc. ganze Zahlen sind, so ist $f(\alpha) = a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$ eine complexe ganze Zahl. Eine solche complexe Zahl kann entweder in Factoren derselben Art zerlegt werden; oder auch nicht. Im ersten Fall ist sie eine zusammengesetzte Zahl: im andern Fall ist sie bisher eine complexe Primzahl genannt worden. Ich habe nun aber bemerkt, dafs, wenn auch $f(\alpha)$ auf keine Weise in complexe Factoren zerlegt werden kann, sie deshalb noch nicht die wahre Natur einer complexen Primzahl hat, weil sie schon gewöhnlich der ersten und wichtigsten Eigenschaft der Primzahlen ermangelt: nämlich, dafs das Product zweier Primzahlen durch keine von ihnen verschiedene Primzahl theilbar ist. Es haben vielmehr solche Zahlen $f(\alpha)$, wenn gleich sie nicht in complexe Factoren zerlegbar sind, dennoch die Natur der zusammengesetzten Zahlen; die Factoren aber sind alsdann nicht wirkliche, sondern *ideale complexe Zahlen*. Der Einführung solcher idealen complexen Zahlen liegt derselbe einfache Gedanke zu Grunde, wie der Einführung der imaginären Formeln in die Algebra und Analysis; namentlich bei der Zerfällung der ganzen rationalen Functionen in ihre einfachsten Factoren, die linearen. Ferner ist es auch dasselbe Bedürfnifs, durch welches genöthigt, *Gaufs* bei den Untersuchungen über die biquadratischen Reste (weil hier alle Primfactoren von der Form $4m+1$ die Natur zusammengesetzter Zahlen zeigen) die complexen Zahlen von der Form $a+b\sqrt{-1}$ zuerst einführte.

Um nun zu einer festen Definition der wahren (gewöhnlich idealen) Primfactoren der complexen Zahlen zu gelangen, war es nöthig, die unter allen Umständen bleibenden Eigenschaften der Primfactoren complexer Zahlen zu ermitteln, welche von der Zufälligkeit, ob die wirkliche Zerlegung Statt habe, oder nicht, ganz unabhängig wären: ungefähr eben so, wie man, wenn in der Geometrie von der gemeinschaftlichen Sehne zweier Kreise gesprochen wird, auch dann, wenn die Kreise sich nicht schneiden, eine wirkliche Definition dieser idealen gemeinschaftlichen Sehne sucht, welche für alle Lagen der Kreise pafst. Dergleichen bleibende Eigenschaften der complexen Zahlen, welche geschickt sind, als Definitionen der idealen Primfactoren benutzt zu werden, giebt es mehrere, welche im Grunde immer auf dasselbe Resultat führen und von denen ich eine als die einfachste und allgemeinste gewählt habe.

Ist p eine Primzahl von der Form $m\lambda+1$, so läfst sie sich in vielen Fällen als Product von folgenden $\lambda-1$ complexen Factoren darstellen: $p = f(\alpha).f(\alpha^2).f(\alpha^3)....f(\alpha^{\lambda-1})$; wo aber eine Zerlegung in wirkliche complexe Primfactoren nicht möglich ist: dann sollen die idealen Primfactoren eintreten, um dieselbe zu leisten. Ist $f(\alpha)$ eine wirkliche complexe Zahl und ein Primfactor von p, so hat sie die Eigenschaft, dafs, wenn statt der Wurzel der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ eine bestimmte Congruenzwurzel von $\xi^\lambda \equiv 1$, mod. p, substituirt wird, $f(\xi) \equiv 0$, mod. p, ist. Also auch, wenn in einer complexen Zahl $\Phi(\alpha)$ der Primfactor $f(\alpha)$ enthalten ist, wird $\Phi(\xi) \equiv 0$, mod. p; und umgekehrt: wenn $\Phi(\xi) \equiv 0$, mod. p, und p in $\lambda-1$ complexe Primfactoren zerlegbar ist, enthält $\Phi(\alpha)$ den Primfactor $f(\alpha)$. Die Eigenschaft $\Phi(\xi) \equiv 0$, mod. p ist nun eine solche, welche für sich selbst von der Zerlegbarkeit der Zahl p in $\lambda-1$ Primfactoren gar nicht abhangt; sie kann demnach als Definition benutzt werden, indem bestimmt wird, dafs die complexe Zahl $\Phi(\alpha)$ den idealen Primfactor von p enthält, welcher zu $\alpha = \xi$ gehört, wenn $\Phi(\xi) \equiv 0$, mod. p, ist. Jeder der $\lambda-1$ complexen Primfactoren von p wird so durch eine Congruenzbedingung ersetzt. Dies reicht hin, um zu zeigen, dafs die complexen Primfactoren, sie seien wirklich, oder nur ideal vorhanden, den complexen Zahlen denselben bestimmten Character ertheilen. In der hier gegebenen Weise aber gebrauchen wir die Congruenzbedingungen nicht als Definitionen der idealen Primfactoren, weil diese nicht hinreichend sein würden, mehrere gleiche, in einer complexen Zahl vorkommende ideale Primfactoren vorzustellen, und weil sie, zu beschränkt, nur ideale Primfactoren der realen Primzahlen von der Form $m\lambda-1$ geben würden.

Jeder Primfactor einer complexen Zahl ist immer zugleich auch Primfactor irgend einer realen Primzahl q, und die Beschaffenheit der idealen Primfactoren ist besonders von dem Exponenten abhängig, zu welchem q gehört, für den Modul λ. Derselbe sei f, so dafs $q^f \equiv 1$, mod. λ, und $\lambda - 1 = e \cdot f$. Eine solche Primzahl q läfst sich niemals in mehr als e complexe Primfactoren zerlegen, welche, wenn diese Zerlegung wirklich ausführbar ist, sich als lineare Functionen der e Perioden von je f Gliedern darstellen. Diese Perioden der Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ bezeichne ich durch $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{e-1}$; und zwar in der Ordnung, dafs jede in die folgende übergeht, wenn α in α^γ verwandelt wird, wo γ eine primitive Wurzel von λ ist. Bekanntlich sind die Perioden die e Wurzeln einer Gleichung vom $e$ten Grade; und diese, als Congruenz betrachtet, für den Modul q, hat immer e reale Congruenzwurzeln, welche ich durch $u, u_1, u_2, \ldots u_{e-1}$ bezeichne und in einer entsprechenden Reihenfolge nehme, wie die Perioden, für welche, aufser der Congruenz vom $e$ten Grade, noch andere leicht zu findende Congruenzen gebraucht werden. Wird nun die aus Perioden gebildete complexe Zahl $c'\eta + c_1'\eta_1 + c_2'\eta_2 + \ldots + c_{e-1}'\eta_{e-1}$ kurz durch $\Phi(\eta)$ bezeichnet, so giebt es unter den Primzahlen q, welche zum Exponenten f gehören, immer solche, die sich auf die Form

$$q = \Phi(\eta)\Phi(\eta_1)\Phi(\eta_2)\ldots\Phi(\eta_{e-1})$$

bringen lassen, in welcher auch die e Factoren niemals eine weitere Zerlegung gestatten. Setzt man statt der Perioden ihre entsprechenden Congruenzwurzeln, wobei sich eine Periode beliebig festsetzen läfst, welche einer bestimmten Congruenzwurzel entsprechen soll, so wird immer einer der e Primfactoren congruent Null, für den Modul q. Enthält nun irgend eine complexe Zahl $f(\alpha)$ den Primfactor $\Phi(\eta)$, so wird sie die Eigenschaft haben, für $\eta = u_k$, $\eta_1 = u_{k+1}$, $\eta_2 = u_{k+2}$, etc. congruent Null zu werden, für den Modul q. Diese Eigenschaft nun (welche eigentlich f besondere Congruenzbedingungen in sich schliefst, deren Entwicklung zu weit führen würde) ist eine bleibende; auch für diejenigen Primzahlen q, welche eine Zerlegung in die e wirklichen complexen Primfactoren nicht gestatten. Sie könnte daher als Definition der complexen Primfactoren benutzt werden, würde aber den Mangel haben, dafs sie die in einer complexen Zahl vorhandenen gleichen idealen Primfactoren nicht ausdrückte.

Die von mir gewählte Definition der idealen complexen Primfactoren, welche im Wesentlichen zwar mit der hier angedeuteten übereinstimmt, aber einfacher und allgemeiner ist, beruht darauf, dafs sich, wie ich besonders beweise, immer eine aus Perioden gebildete complexe Zahl $\psi(\eta)$ finden läfst,

von der Art, dafs $\psi(\eta)\psi(\eta_1)\psi(\eta_2)\ldots\psi(\eta_{e-1})$ (welches eine ganze Zahl ist) durch q theilbar sei, aber nicht durch q^2. Diese complexe Zahl $\psi(\eta)$ hat alsdann immer die obige Eigenschaft, dafs sie congruent Null wird, modulo q, wenn statt der Perioden die entsprechenden Congruenzwurzeln gesetzt werden, also $\psi(\eta)\equiv 0$, mod. q, für $\eta = u$, $\eta_1 = u_1$, $\eta_2 = u_2$, etc. Ich setze nun $\psi(\eta_1)\psi(\eta_2)\ldots\psi(\eta_{e-1}) = \Psi(\eta)$ und definire die idealen Primzahlen folgendermaafsen:

Wenn $f(\alpha)$ die Eigenschaft hat, dafs das Product $f(\alpha).\Psi(\eta_r)$ durch q theilbar ist, so soll dies so ausgedrückt werden: Es enthält $f(\alpha)$ den idealen Primfactor von q, welcher zu $u = \eta_r$ gehört. Ferner, wenn $f(\alpha)$ die Eigenschaft hat, dafs $f(\alpha)(\Psi(\eta_r))^\mu$ durch q^μ theilbar ist, aber $f(\alpha)(\Psi(\eta_r))^{\mu+1}$ nicht theilbar durch $q^{\mu+1}$, so soll dies heifsen: Es enthält $f(\alpha)$ den zu $u = \eta_r$ gehörigen idealen Primfactor von q genau μ mal.

Es würde hier zu weit führen, wenn ich den Zusammenhang und die Übereinstimmung dieser Definition mit den oben angedeuteten, welche durch Congruenzbedingungen gegeben werden, entwickeln wollte; ich bemerke nur, dafs die Bedingung: $f(\alpha)\Psi(\eta_r)$ sei durch q theilbar, f verschiedenen Congruenzbedingungen vollkommen gleichbedeutend ist, und dafs die Bedingung: $f(\alpha)(\Psi(\eta_r))^\mu$ sei durch q^μ theilbar, sich allemal durch $\mu.f$ Congruenzbedingungen vollständig ersetzen läfst. Die ganze von mir bereits fertig ausgearbeitete Theorie der idealen complexen Zahlen, deren Hauptsätze ich hier mittheilen will, ist eine Rechtfertigung sowohl der gegebenen Definition, als auch der gewählten Benennung. Diese Hauptsätze sind folgende:

Das Product zweier oder mehrerer complexen Zahlen hat genau dieselben idealen Primfactoren, wie die Factoren zusammengenommen.

Wenn eine complexe Zahl (welche als Product von Factoren auftritt) alle e Primfactoren von q enthält, so ist sie auch durch q selbst theilbar; enthält sie aber irgend einen dieser idealen Primfactoren nicht, so ist sie nicht durch q theilbar.

Wenn eine complexe Zahl (in Form eines Products) alle e idealen Primfactoren von q enthält, und zwar jeden wenigstens μ mal, so ist sie durch q^μ theilbar.

Wenn $f(\alpha)$ genau m ideale Primfactoren von q enthält, sie mögen verschieden, oder zum Theil, oder sämmtlich gleich sein, so enthält die Norm $Nf(\alpha) = f(\alpha)f(\alpha^2)\ldots f(\alpha^{\lambda-1})$ genau den Factor q^{mf}.

Jede complexe Zahl enthält nur eine endliche, bestimmte Anzahl idealer Primfatoren.

Zwei complexe Zahlen, welche genau dieselben idealen Primfactoren enthalten, unterscheiden sich nur durch eine complexe Einheit, welche als Factor hinzutreten kann.

Eine complexe Zahl ist durch eine andere theilbar, wenn alle idealen Primfactoren des Divisors auch in dem Dividendus enthalten sind; und der Quotient enthält genau den Überschufs der idealen Primfactoren des Dividendus über die des Divisors.

Aus diesen Sätzen geht hervor, dafs die Rechnung mit complexen Zahlen durch Einführung der idealen Primfactoren ganz dieselbe geworden ist, wie die Rechnung mit den ganzen Zahlen und den ganzzahligen realen Primfactoren derselben. Es erledigt sich somit die Klage, welche ich in dem Breslauer Programm zur Jubelfeier der Universität Königsberg S. 18 aussprach: ***Maxime dolendum videtur, quod haec numerorum realium virtus, ut in factores primos dissolvi possint, qui pro eodem numero semper iidem sint, non eadem est numerorum complexorum, quae si esset tota haec doctrina, quae magnis adhuc difficultatibus laborat, facile absolvi et ad finem perduci posset. etc.*** Auch sieht man, dafs die idealen Primfactoren die innere Natur der complexen Zahlen aufschliefsen, sie gleichsam durchsichtig machen und das innere crystallinische Gefüge derselben zeigen. Ist nämlich eine complexe Zahl nur unter der Form $a+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots+a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$ gegeben, so läfst sich vorläufig wenig über dieselbe aussagen, bis man durch die idealen Primfactoren derselben (welche hier immer durch directe Methoden vollständig gefunden werden können) ihre einfachsten qualitativen Bestimmungen gefunden hat, welche als Grundlagen aller ferneren zahlentheoretischen Untersuchungen dienen.

Die idealen Factoren der complexen Zahlen treten, wie gezeigt, als Factoren von wirklichen complexen Zahlen auf: es müssen deshalb ideale Factoren, mit andern passenden multiplicirt, immer wirkliche complexe Zahlen zu Producten geben. Diese Frage nun, über die Zusammensetzung der idealen Factoren zu wirklichen complexen Zahlen, ist, wie ich an den bereits von mir gefundenen Resultaten zeigen werde, von grofsem Interesse, weil sie mit den wichtigsten Abschnitten der Zahlentheorie in innigem Zusammenhange steht. Die beiden wichtigsten Resultate über diese Frage sind folgende:

Es giebt immer eine endliche, bestimmte Anzahl idealer complexer Multiplicatoren, welche nöthig und hinreichend sind, um alle möglichen idealen complexen Zahlen zu wirklichen zu machen *).

Jede ***ideale*** complexe Zahl hat die Eigenschaft, dafs eine bestimmte ganze Potenz derselben zu einer ***wirklichen*** complexen Zahl wird.

Ich gehe in einige nähere Entwickelungen dieser beiden Sätze ein. Zwei ideale complexe Zahlen, welche, mit einer und derselben idealen Zahl multiplicirt, beide zu wirklichen complexen Zahlen machen, nenne ich ***äquivalent*** oder derselben Classe angehörig, weil diese Untersuchung über die wirklichen und die idealen complexen Zahlen vollständig identisch ist mit der Classification gewisser zusammengehöriger Formen vom $\lambda-1$ten Grade mit $\lambda-1$ Variabeln, über welche ***Dirichlet*** die Hauptresultate gefunden, aber noch nicht veröffentlicht hat, so dafs ich nicht genau weifs, ob sein Princip der Classification mit diesem, aus der Theorie der complexen Zahlen sich ergebenden genau übereinstimmt. Als besonderer Fall ist die Theorie der Formen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln, jedoch nur wenn die Determinante eine Primzahl λ ist, mit in diesen Untersuchungen begriffen, und es stimmt hier unsere Classification mit der ***Gaufs***ischen, aber nicht mit der von ***Legendre*** überein. Auch wirft dieselbe ein helleres Licht auf die ***Gaufs***ische Classification der Formen vom zweiten Grade, und auf den wahren Grund der Unterscheidung von ***Aequivalentia propria et impropria,*** welche, wie nicht zu läugnen, so, wie sie in den ***Disquisitiones arihmeticae*** auftritt, immer einen Schein des Unpassenden behält. Wenn nämlich dort zwei Formen, wie $ax^2+2bxy+cy^2$ und $ax^2-2bxy+cy^2$, oder $ax^2+2bxy+cy^2$ und $cx^2+2bxy+ay^2$, als verschiedenen Classen angehörend betrachtet werden, während in Wahrheit ein wesentlicher Unterschied derselben nicht aufzufinden ist, und wenn andererseits die ***Gaufs***ische Classification dennoch als die der Natur der Sache am meisten entsprechende anerkannt werden mufs: so wird man genöthigt, die sich wirklich nur ganz äufserlich von einander unterscheidenden Formen, wie $ax^2+2bxy+cy^2$ und $ax^2-2bxy+cy^2$, blofs als die Repräsentanten zweier andern, aber wesentlich verschiedenen Begriffe der Zahlentheorie aufzufassen. Diese aber sind in Wahrheit nichts anderes als zwei verschiedene ideale Factoren, welche einer und derselben Zahl angehören. Die ganze Theorie der

*) Ein Beweis dieses wichtigen Satzes, wenn gleich in weit geringerer Allgemeinheit und in ganz anderer Form, findet sich in der Dissertation: ***De unitatibus complexis*** von ***L. Kronecker,*** Berlin 1845.

Formen vom zweiten Grade, mit zwei Variabeln, kann nämlich als Theorie der complexen Zahlen von der Form $x+y\sqrt{D}$ aufgefafst werden, und führt dann nothwendig zu idealen complexen Zahlen derselben Art. Diese classificiren sich aber eben so nach den idealen Multiplicatoren, welche nöthig und hinreichend sind, um sie zu wirklichen complexen Zahlen von der Form $x+y\sqrt{D}$ zu machen. Mit der *Gaufs*ischen Classification übereinstimmend, erschliefsen diese so den wahren Grund derselben.

Die allgemeine Untersuchung über die idealen complexen Zahlen hat die gröfste Analogie mit dem bei *Gaufs* sehr schwierig behandelten Abschnitte: *De compositione formarum,* und die Hauptresultate, welche *Gaufs* für die quadratischen Formen pag. 337 sqq. bewiesen hat, finden auch für die Zusammensetzung der allgemeinen idealen complexen Zahlen Statt. Es gehört hier zu jeder Classe idealer Zahlen eine andere Classe, welche, mit dieser multiplicirt, wirkliche complexe Zahlen hervorbringt (die wirklichen complexen Zahlen bilden hier das Analogon der *Classis principalis*). Es sind hier auch Classen, welche, mit sich selbst multiplicirt, wirkliche complexe Zahlen (die *Classis principalis*) geben, also *ancipites;* namentlich ist die *Classis principalis* selbst stets eine *Classis anceps.* Nimmt man eine ideale complexe Zahl $f(\alpha)$ und erhebt sie zu Potenzen, so gelangt man, nach dem zweiten der obigen Sätze, immer zu einer Potenz, welche eine wirkliche complexe Zahl ist; wenn h die kleinste Zahl ist, für welche $(f(\alpha))^h$ eine wirkliche complexe Zahl ist, so gehören $f(\alpha)$, $(f(\alpha))^2$, $(f(\alpha))^3$, ... $f(\alpha)^h$ alle verschiedenen Classen an. Es kann nun geschehen, dafs diese, namentlich bei passender Wahl des $f(\alpha)$, alle vorhandenen Classen erschöpfen: ist es nicht der Fall, so wird leicht bewiesen, dafs die Anzahl aller Classen wenigstens immer ein Vielfaches von h ist. Ich bin vorläufig noch nicht tiefer in dieses Gebiet der Theorie der complexen Zahlen eingedrungen; namentlich habe ich eine Untersuchung der wahren Anzahl der Classen noch nicht unternommen, weil, wie ich durch mündliche Mittheilungen erfahren habe, *Dirichlet,* nach ähnlichen Principien, wie in seinen berühmten Abhandlungen über die quadratischen Formen, diese Anzahl bereits gefunden hat. Ich bemerke nur noch dies Eine über den Character der idealen complexen Zahlen, dafs sie, nach dem zweiten der obigen Sätze, als bestimmte Wurzeln aus wirklichen complexen Zahlen überall angesehen und dargestellt werden können, oder dafs sie immer die Form $\sqrt[h]{(\Phi(\alpha))}$ annehmen, wo $\Phi(\alpha)$ eine wirkliche complexe Zahl ist, und h eine ganze Zahl.

Aus den verschiedenen Anwendungen, welche ich von dieser Theorie der complexen Zahlen schon gemacht habe, hebe ich nur die Anwendung auf die Kreistheilung hervor; als Vervollständigung Dessen, was ich in dem erwähnten Programm bereits mittheilte. Setzt man

$$(\alpha, x) = x + \alpha x^g + \alpha^2 x^{g^2} + \ldots + \alpha^{p-2} x^{g^{p-2}},$$

wo $\alpha^\lambda = 1$, $x^p = 1$, $p = m\lambda + 1$, und g eine primitive Wurzel der Primzahl p ist, so ist bekanntlich $(\alpha, x)^\lambda$ eine von x unabhängige, aus den Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ gebildete complexe Zahl. Für diese habe ich in dem erwähnten Programm, unter der Voraussetzung, dafs p sich in $\lambda - 1$ wirkliche complexe Primfactoren zerlegen läfst, deren einer $f(\alpha)$ sei, folgenden Ausdruck gefunden:

$$(\alpha, x)^\lambda = \pm \alpha^h f(\alpha)^{m_1} . f(\alpha^2)^{m_2} . f(\alpha^3)^{m_3} \ldots . f(\alpha^{\lambda-1})^{m_{\lambda-1}},$$

in welchem die Potenz-Exponenten m_1, m_2, m_3, etc. so bestimmt sind, dafs allgemein m_k positiv kleiner als λ und $k . m_k \equiv 1$, mod. λ ist. Genau derselbe einfache Ausdruck gilt nun, wie sich leicht beweisen läfst, ganz allgemein, auch wenn $f(\alpha)$, der Primfactor von p, nicht ein wirklicher, sondern nur ein idealer ist. Um aber in letzterem Falle den Ausdruck des $(\alpha, x)^\lambda$ in Form einer wirklichen complexen Zahl zu haben, darf man nur das ideale $f(\alpha)$ als Wurzel aus einer wirklichen complexen Zahl darstellen, oder eine der (wenn auch indirecten) Methoden anwenden, welche dazu dienen, eine wirkliche complexe Zahl herzustellen, deren ideale Primfactoren gegeben sind.

16.

Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihre Primfactoren.

(Von Herrn Dr. *E. E. Kummer,* Professor in Breslau.)

In dem vorstehenden Aufsatze, welchen ich als Einleitung zu dem hier folgenden anzusehen bitte, habe ich vor einiger Zeit die Resultate meiner Untersuchungen über die Zerlegung der complexen Zahlen niedergelegt. Die Entwickelung und Begründung derselben soll nun der Gegenstand der gegenwärtigen Abhandlung sein.

§. 1.

Es sei λ eine Primzahl und α eine imaginäre Wurzel der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$, so ist die allgemeinste Form der complexen Zahlen, welche wir hier untersuchen:

$$\varphi(\alpha) = a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1};$$

in welchem Ausdruck die Coëfficienten a_1, a_2, a_3, etc. *ganze* Zahlen sind. In besonderen Fällen können alle diejenigen Coëfficienten der complexen Zahl, welche mit den zu denselben Perioden gehörenden Wurzeln der Einheit multiplicirt sind, einander gleich werden; so dafs die complexe Zahl zu einer linearen Function der Perioden wird. Die Untersuchung dieser besondern Art complexer Zahlen, welche andrerseits, da die Perioden auch eingliedrig sein können, die allgemeine complexe Zahl als besondern Fall in sich schliefst, bildet die Grundlage für die Auffindung der Primfactoren aller aus den Wurzeln der Einheit geformten complexen Zahlen; weshalb wir zunächst nur von diesen zu handeln haben.

Besteht die Zahl $\lambda-1$ aus den beiden Factoren e und f, so dafs $\lambda-1 = e\cdot f$, und bezeichnet γ eine primitive Wurzel von λ, so kann man die imaginären Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ folgendermafsen in e Perioden von je f Gliedern zusammenordnen:

$$\begin{aligned}
\eta &= \alpha + \alpha^{\gamma^e} + \alpha^{\gamma^{2e}} + \ldots + \alpha^{\gamma^{(f-1)e}},\\
\eta_1 &= \alpha^\gamma + \alpha^{\gamma^{e+1}} + \alpha^{\gamma^{2e+1}} + \ldots + \alpha^{\gamma^{(f-1)e+1}},\\
\eta_2 &= \alpha^{\gamma^2} + \alpha^{\gamma^{e+2}} + \alpha^{\gamma^{2e+2}} + \ldots + \alpha^{\gamma^{(f-1)e+2}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\eta_{e-1} &= \alpha^{\gamma^{e-1}} + \alpha^{\gamma^{2e-1}} + \alpha^{\gamma^{3e-1}} + \ldots + \alpha^{\gamma^{fe-1}}.
\end{aligned}$$

Das Product zweier Perioden läfst sich bekanntlich als lineare Function der ähnlichen Perioden mit ganzzahligen Coëfficienten darstellen; deshalb sei

$$(1.) \qquad \eta.\eta_k = \overset{k}{\mu} f + \overset{k}{m}\eta + \overset{k}{m_1}\eta_1 + \overset{k}{m_2}\eta_2 + \ldots. + \overset{k}{m}_{e-1}\eta_{e-1},$$

woraus auch die scheinbar allgemeinere Gleichung folgt:

$$(2.) \qquad \eta_r\eta_{r+k} = \overset{k}{\mu} f + \overset{k}{m}\eta_r + \overset{k}{m_1}\eta_{r+1} + \overset{k}{m_2}\eta_{r+2} + \ldots. + \overset{k}{m}_{e-1}\eta_{r+e-1}.$$

Der Coëfficient $\overset{k}{\mu}$ ist immer gleich Null, aufser wenn f gerade und $k = 0$, oder f ungerade und zugleich $k = \frac{1}{2}e$ ist; in welchen beiden Fällen $\overset{k}{\mu} = 1$ ist. Die übrigen Coëfficienten $\overset{k}{m}_h$ haben sehr einfache Beziehungen zu einander, welche wir kurz entwickeln wollen. Multiplicirt man zwei Perioden von f Gliedern mit einander, so ist die Anzahl aller Glieder des entwickelten Products gleich ff; deshalb mufs, wenn in der Gleichung (1.) die Perioden als Summen von je f Wurzeln aufgefafst werden, die Summe aller Coëfficienten gleich ff, also

$$ff = \overset{k}{\mu} f + \overset{k}{m} f + \overset{k}{m_1} f + \overset{k}{m_2} f + \ldots. + \overset{k}{m}_{e-1} f,$$

mithin

$$(3.) \qquad f = \overset{k}{\mu} + \overset{k}{m} + \overset{k}{m_1} + \overset{k}{m_2} + \ldots. + \overset{k}{m}_{e-1}$$

sein. Setzt man ferner in der Gleichung (2.) nach einander $r = 0, 1, 2, \ldots. e-1$ und nimmt die Summe, so erhält man

$$\sum_0^{e-1} \eta_r\eta_{r+k} = ef\overset{k}{\mu} - \overset{k}{m} - \overset{k}{m_1} - \overset{k}{m_2} - \ldots. - \overset{k}{m}_{e-1};$$

also, vermöge (1.), und weil $ef = \lambda - 1$ ist:

$$(4.) \qquad \sum_0^{e-1} \eta_r\eta_{r+k} = \overset{k}{\mu}\lambda - f.$$

Berücksichtigt man noch den oben angegebenen Werth von $\overset{k}{\mu}$, so zeigt sich, dafs diese Summe immer gleich $-f$ ist; mit Ausnahme der beiden Fälle: erstens, wo f gerade und $k = 0$, und zweitens, wo f ungerade und $k = \frac{1}{2}e$ ist; in welchen Fällen diese Summe gleich $\lambda - f$ ist.

Verwandelt man ferner in der Gleichung (2.) k in $e-k$, so wird

$$\eta_r\eta_{r-k} = \overset{e-k}{\mu} f + \overset{e-k}{m}\eta_r + \overset{e-k}{m_1}\eta_{r+1} + \overset{e-k}{m_2}\eta_{r+2} + \ldots. + \overset{e-k}{m}_{e-1}\eta_{r+e-1}.$$

Setzt man aber in derselben Gleichung (2.) $r-k$ statt r, so ist

$$\eta_r\eta_{r-k} = \overset{k}{\mu} f + \overset{k}{m}\eta_{r-k} + \overset{k}{m_1}\eta_{r-k+1} + \overset{k}{m_2}\eta_{r-k+2} + \ldots. + \overset{k}{m}_{e-1}\eta_{r-k+e-1}.$$

Durch Vergleichung dieser beiden Ausdrücke erhält man allgemein

$$(5.) \qquad \overset{k}{m}_h = \overset{e-k}{m}_{h-k}.$$

Multiplicirt man endlich die Gleichung (2.) mit η_{h+r} und nimmt die Summe für $r = 0, 1, 2, \ldots e-1$, so erhält man vermittels der Formel (4.):

$$\sum_0^{e-1} {}_r \eta_r \eta_{k+r} \eta_{h+r} = -ff + \lambda \overset{k}{m}_h, \text{ wenn } f \text{ gerade ist und}$$

$$\sum_0^{e-1} {}_r \eta_r \eta_{k+r} \eta_{h+r} = -ff + \lambda \overset{k}{m}_{h+\frac{1}{2}e}, \text{ wenn } f \text{ ungerade ist;}$$

und weil sich in den Summen zur Linken h und k vertauschen lassen, so folgt

$$(6.) \qquad \begin{cases} \overset{k}{m}_h = \overset{h}{m}_k, \text{ wenn } f \text{ gerade und} \\ \overset{k}{m}_{h+\frac{1}{2}e} = \overset{h}{m}_{k+\frac{1}{2}e}, \text{ wenn } f \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Die Gleichung (1.), welche die Grundlage jeder Rechnung mit den Perioden ist, drückt eigentlich ein System von e verschiedenen Gleichungen für $k = 0, 1, 2, \ldots e-1$ aus. Diese zusammen reichen auch gerade hin, um aus ihnen die e Perioden selbst zu finden. Eliminirt man nämlich alle Perioden, aufser der ersten η, so erhält man für η eine Gleichung vom $e$ten Grade; und zwar genau jene bekannte Gleichung, deren Wurzeln alle e Perioden sind. Läfst man ferner irgend eine der e Gleichungen, welche in (1.) enthalten sind, weg, und betrachtet die erste Periode η als bekannt, die übrigen $e-1$ Perioden als unbekannt, so erhält man ein System von $e-1$ Gleichungen mit $e-1$ Unbekannten; und zwar ein lineares System, aus welchem sich $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{e-1}$ alle rational durch η ausdrücken lassen. Man erhält so die Ausdrücke der Perioden als rationale Functionen der ersten (d. h. einer beliebigen andern); welche Ausdrücke *Gaufs* auf andere Weise herleitet.

Wir fassen jetzt das System der in (1.) enthaltenen Gleichungen als ein System von Congruenzen auf, für den Modul q; wo q eine Primzahl sein soll, welche der Bedingung $q^f \equiv 1 \bmod. \lambda$ genügt. Anstatt der Perioden $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{e-1}$ setzen wir die unbestimmten ganzen Zahlen $u, u_1, u_2, \ldots u_{e-1}$. Dies giebt folgendes System von Congruenzen:

$$(7.) \qquad u u_k \equiv \overset{k}{\mu} f + \overset{k}{m} u + \overset{k}{m}_1 u_1 + \overset{k}{m}_2 u_2 + \ldots + \overset{k}{m}_{e-1} u_{e-1}, \bmod. q,$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots e-1$. Es giebt nun immer e wirkliche ganze Zahlen $u, u_1, u_2, \ldots u_{e-1}$, welche diesem Systeme von Congruenzen genugthun: denn eliminirt man auch hier alle Unbekannten, die erste u ausgenommen,

so erhält man eine Congruenz vom $e$ten Grade für u, welche mit der Gleichung für η, welche alle Perioden zu Wurzeln hat, genau übereinstimmt.

Diese Gleichung sei

$$(8.) \quad y^e + A_1 y^{e-1} + A_2 y^{e-2} + \ldots + A_e = Y = 0:$$

so hat die Congruenz $Y \equiv 0$ mod. q (wie ich in der Abhandlung über die Divisoren gewisser Formen der Zahlen, welche aus der Theorie der Kreistheilung entstehen, in diesem Journal Bd. 30. S. 107 bewiesen habe) immer e reale Wurzeln; falls nämlich, wie vorausgesetzt worden, q eine Primzahl von der Art ist, dafs $q^f \equiv 1$, mod. λ. Wenn nun u aus der Congruenz $Y \equiv 0$, mod. q, bestimmt ist, so werden $u_1, u_2, u_3, \ldots u_{e-1}$ mittels der in (7.) enthaltenen Gleichungen nur noch linear bestimmt; eine Unmöglichkeit kann demnach nirgends eintreten, da überdies der Modul eine Primzahl ist. Man würde auch mit der einzigen Congruenz $Y \equiv 0$ mod. q ausreichen, um alle Zahlen $u, u_1, u_2, \ldots u_{e-1}$ zu bestimmen, weil sie alle auf gleiche Weise Wurzeln dieser Congruenz sind; aber man würde so nicht finden können, in welcher Ordnung die Wurzeln dieser Congruenz zu nehmen sind, damit sie auch den in (7.) enthaltenen Congruenzen genügen.

Da man jede beliebige der e Congruenzwurzeln von $Y \equiv 0$ mod. q als erste ansehen kann (wonach sich dann nur die Reihenfolge der übrigen zu richten hat, welche cyklisch immer dieselbe bleibt), so folgt, dafs die den Congruenzen, welche in (7.) enthalten sind, genügenden Zahlen $u, u_1, u_2, \ldots u_{e-1}$, ebenso auch der scheinbar allgemeineren, der Gleichung (2.) entsprechenden Congruenz

$$(9.) \quad u_r u_{r+k} \equiv \overset{k}{\mu} f + \overset{k}{m} u_r + \overset{k+1}{m_1} u_{r+1} + \overset{k}{m_2} u_{r+2} + \ldots + \overset{k}{m_{e-1}} u_{r-1}, \text{ mod. } q,$$

genügen; für alle Werthe der Zahlen r und k. Jeder der e Perioden $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{e-1}$ entspricht also eine der Congruenzwurzeln $u, u_1, u_2, \ldots u_{e-1}$, in der Art, dafs, wenn man statt der Perioden in den Gleichungen (2.) ihre analogen Congruenzwurzeln setzt, diese Gleichungen zu richtigen Congruenzen für den Modul q werden.

§. 2.

Die Congruenzwurzeln $u, u_1, u_2, \ldots u_{e-1}$ befolgen, wie wir im vorigen Paragraphen gezeigt haben, in ihrer Multiplication, genau dieselben Gesetze wie die Perioden; und da ohnedies die Addition und Subtraction für die Congruenzwurzeln dieselbe ist wie für die Perioden, so folgt der wichtige Satz: ***Dafs zu jeder Gleichung, unter den Perioden, welche nur Additio-***

nen, Subtractionen und Multiplicationen derselben enthalten, stets eine entsprechende Congruenz sein mufs, welche man dadurch erhält, dafs man nur anstatt der Perioden ihre entsprechenden Congruenzwurzeln setzt. Es gehören ferner zu einer einzigen solchen rationalen Gleichung immer noch $e-1$ conjugirte, welche aus ihr durch Vertauschung der Perioden, mit Beibehaltung der cyklischen Ordnung derselben, gebildet werden, oder, was dasselbe ist, durch gleiche Vergröfserung aller Indices der Perioden; wobei von den Indices, welche gröfser als $e-1$ werden, e, oder Vielfache von e, abzuziehen sind. Dafs nämlich eine solche Veränderung jeder rationalen Gleichung, unter den Perioden, die man auch nur als eine Änderung der Wurzel α der Gleichung $\frac{\alpha^\lambda-1}{\alpha-1}=0$ ansehen kann, stets gestattet ist, folgt sehr leicht aus der Irreductibilität dieser Gleichung. Ebenso gehören auch eigentlich zu einer solchen Gleichung unter den Perioden nicht nur eine, sondern stets e Congruenzen, weil man die Congruenzwurzeln, mit Beibehaltung ihrer cyklischen Ordnung, auf e verschiedene Arten den Perioden zuordnen kann.

Hiernach folgt z. B. aus der Gleichung $\eta+\eta_1+\eta_2+\ldots.+\eta_{e-1}=-1$ die Congruenz

$$(1.)\qquad u+u_1+u_2+\ldots.+u_{e-1}\equiv -1 \bmod. q;$$

ferner aus der Gleichung (4.) §. 1. die Congruenz

$$(2.)\qquad \sum_0^{e-1} u_r u_{r+k}\equiv -f \bmod. q;$$

mit Ausnahme der beiden Fälle: erstens, wo f gerade und $k=0$, und zweitens, wo f ungerade und $k=\frac{1}{2}e$ ist; in welchen Fällen diese Summe congruent $\lambda-f$ ist.

Bezeichnet ferner $F(\eta)$ irgend eine ganze rationale Function der Perioden η, η_1, η_2, ... η_{e-1} mit ganzzahligen Coëfficienten, welche irgend wie als Product von Factoren, oder als Summe solcher Producte erscheinen mag: so kann man dieselbe bekanntlich immer auf die Form

$$(3.)\qquad F(\eta)=a\eta+a_1\eta_1+a_2\eta_2+\ldots.+a_{e-1}\eta_{e-1}$$

bringen. Setzt man nun statt der Perioden die Congruenzwurzeln, und zwar so, dafs u_r statt η, u_{r+1} statt η_1, u_{r+2} statt η_2, u. s. w. gesetzt wird, in welchem Falle wir die ganze Zahl, in welche $F(\eta)$ übergeht, durch $F(u_r)$ bezeichnen, so ist

$$(4.)\qquad F(u_r)\equiv au_r+a_1u_{r+1}+a_2u_{r+2}+\ldots.+a_{e-1}u_{r-1} \bmod. q,$$

für jeden beliebigen Werth von r. Enthält $F(\eta)$ den realen Factor q, so

müssen, nachdem diese complexe Zahl auf die einfache Grundform (3.) gebracht ist, alle Coëfficienten a, a_1, a_2, ... a_{e-1} einzeln durch q theilbar sein; und in diesem Falle mufs deshalb auch $F(u_r) \equiv 0 \bmod. q$ sein, für jeden Werth von r. Stellt man sich ferner nicht nur die complexe Zahl $F(\eta)$, sondern auch alle ihre conjugirten, welche durch cyklische Veränderung der Perioden entstehen, auf die einfache Grundform gebracht vor, so erhält man

$$(5.)\quad \begin{cases} F(\eta) &= a\eta + a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_{e-1}\eta_{e-1}, \\ F(\eta_1) &= a\eta_1 + a_1\eta_2 + a_2\eta_3 + \ldots + a_{e-1}\eta, \\ F(\eta_2) &= a\eta_2 + a_1\eta_3 + a_2\eta_4 + \ldots + a_{e-1}\eta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(\eta_{e-1}) &= a\eta_{e-1} + a_1\eta + a_2\eta_1 + \ldots + a_{e-1}\eta_{e-2}. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit η_k, η_{k+1}, η_{k+2}, ... u. s. w. und addirt, so erhält man, vermöge der Gleichung (4. §. 1.), wenn f *gerade* ist:

$$(6.)\quad \eta_k F(\eta) + \eta_{k+1} F(\eta_1) + \eta_{k+2} F(\eta_2) + \ldots + \eta_{k-1} F(\eta_{e-1}) = a_k \lambda - (a + a_1 + \ldots + a_{e-1}) f;$$

und da die Addition aller Gleichungen (5.)

$$(7.)\quad F(\eta) + F(\eta_1) + F(\eta_2) + \ldots + F(\eta_{e-1}) = -(a + a_1 + \ldots + a_{e-1})$$

giebt, so erhält man:

$$(8.)\quad (\eta_k - f) F(\eta) + (\eta_{k+1} - f) F(\eta_1) + \ldots + (\eta_{k-1} - f) F(\eta_{e-1}) = a_k . \lambda.$$

Wenn f ***ungerade*** ist, modificirt sich dieses Resultat nur insofern, dafs anstatt $a_k . \lambda$ alsdann $a_{k+\frac{1}{2}e} . \lambda$ herauskommt. Setzt man nun statt der Perioden die Congruenzwurzeln, so ergiebt sich

$$(u_k - f) F(u) + (u_{k+1} - f) F(u_1) + \ldots + (u_{k-1} - f) F(u_{e-1}) \equiv a_k . \lambda, \bmod. q,$$

oder congruent $a_{k+\frac{1}{2}e} . \lambda$, wenn f ***ungerade*** ist. Wenn nun $F(u_r) \equiv 0 \bmod. q$ ist, für jeden Werth von r, so folgt aus dieser Congruenz, dafs sämmtliche Coëfficienten a, a_1, a_2, ... a_{e-1} durch q theilbar sind, dafs also auch die complexe Zahl $F(\eta)$ den realen Factor q hat. Es sind demnach folgende zwei Sätze bewiesen worden, von welchen einer der umgekehrte des andern ist:

> ***Wenn eine ganze rationale Function der Perioden mit ganzzahligen Coëfficienten durch den realen Factor q theilbar ist, so sind auch alle diejenigen ganzen Zahlen durch q theilbar, welche entstehen, wenn man statt der Perioden ihre entsprechenden Congruenzwurzeln für den Modul q setzt;***

und umgekehrt:

Wenn alle die e ganzen Zahlen, welche aus einer ganzen rationalen Function der Perioden entstehen, indem statt der Perioden die Congruenzwurzeln für den Modul q gesetzt werden, durch q theilbar sind, so ist diese Function der Perioden selbst durch q theilbar.

Ist $\varphi(\eta)$ irgend eine aus den Perioden gebildete complexe Zahl, so nennen wir das Product aller conjugirten complexen Zahlen, welches immer eine ganze Zahl ist, *die Norm* der complexen Zahl $\varphi(\eta)$ und bezeichnen dasselbe durch

$$N\varphi(\eta) = \varphi(\eta)\varphi(\eta_1)\varphi(\eta_2)\ldots\ldots\varphi(\eta_{e-1}).$$

Wendet man nun die sieben gefundenen Sätze auf diese Norm an, so ergiebt sich, *dafs: **Wenn die Norm** $N\varphi(\eta)$ **durch q theilbar ist, stets auch eine der ganzen Zahlen** $\varphi(u)$, $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\ldots\ldots$ $\varphi(u_{e-1})$ **durch q theilbar sein mufs; und umgekehrt, dafs, wenn eine dieser Zahlen durch q theilbar ist, auch die Norm durch q theilbar sein mufs.***

§. 3.

Für die Untersuchung der Primfactoren jeder gegebenen complexen Zahl ist es noch sehr wichtig, zu beweisen, dafs es stets solche complexe, aus Perioden gebildete Zahlen giebt, deren Norm durch q theilbar ist, aber nicht durch q^2; und zugleich zu zeigen, wie diese complexen Zahlen gefunden werden können. Im allgemeinen wird es schon unter den complexen Zahlen $u-\eta$, $u_1-\eta$, $u_2-\eta$, $\ldots\ldots$ $u_{e-1}-\eta$, deren Normen alle durch q theilbar sind, einige geben, welche die verlangte Eigenschaft haben; ja es ist leicht zu beweisen, dafs immer wenigstens eine dieser complexen Zahlen genügt, sobald es unter den Congruenzwurzeln u, u_1, u_2, $\ldots\ldots$ u_{e-1} nur noch eine giebt, welche keiner andern gleich ist. Da dies aber wirklich, namentlich für sehr kleine Werthe von q und grofse Werthe von e, nicht immer der Fall ist, so wenden wir, um diese verlangten complexen Zahlen zu finden, folgende Methode an, welche stets sicher zum Ziele führt.

Wir suchen zunächst eine complexe Zahl $\varphi(\eta)$ von der Art, dafs das Product $\varphi(\eta_r)\varphi(\eta_s)$ durch q theilbar sei, sobald r und s ***verschieden*** sind; aber nicht durch q theilbar, sobald r und s einander ***gleich*** sind. Eine solche Zahl ist immer die folgende:

$$(1.)\qquad \varphi(\eta) = f + u\eta + u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + \ldots\ldots + u_{e-1}\eta_{e-1}.$$

Es ist nämlich

$$\varphi(u_r) \equiv f + uu_r + u_1u_{r+1} + u_2u_{r+2} + \ldots + u_{e-1}u_{r-1}, \text{ mod. } q,$$

also, vermöge der Congruenz (2. §. 2.),

$$\varphi(u_r) \equiv 0, \text{ mod. } q,$$

mit Ausnahme der beiden Fälle: erstens, wo f ***gerade*** und $r = 0$, und zweitens, wo f ***ungerade*** und $r = \frac{1}{2}e$ ist; in welchen Fällen $\varphi(u_r) \equiv \lambda$ ist. Eben so ist $\varphi(u_s) \equiv 0$, oder $\equiv \lambda$, unter denselben Bedingungen. Demnach ist das Product

$$(2.) \qquad \varphi(u_r)\varphi(u_s) \equiv 0, \text{ mod. } q,$$

für jeden Werth von r und s; mit Ausnahme der beiden Fälle: erstens, wo $r = s = 0$ und f ***gerade***, und zweitens, wo $r = s = \frac{1}{2}e$ und f ***ungerade*** ist. Läfst man nun die Congruenzwurzeln alle möglichen Werthe durchlaufen, mit Beibehaltung der cyklischen Ordnung, so enthält diese eine Congruenz (2.) eigentlich e Congruenzen, aus welchen mittels des zweiten Lehrsatzes im vorigen Paragraphen sogleich folgt, dafs

$$\varphi(\eta_r)\varphi(\eta_s) \equiv 0, \text{ mod. } q,$$

ist; mit alleiniger Ausnahme des Falles $r = s$; wie es verlangt wurde.

Ich untersuche nun weiter von der complexen Zahl $\lambda - \varphi(\eta) = \psi(\eta)$ die Norm

$$N\psi(\eta) = (\lambda - \varphi(\eta))(\lambda - \varphi(\eta_1))(\lambda - \varphi(\eta_2)) \ldots (\lambda - \varphi(\eta_{e-1})).$$

Entwickelt man das Product rechts, und läfst dabei alle durch q theilbaren Theile weg, so erhält man mittels der Congruenz $\varphi(\eta_r)\varphi(\eta_s) \equiv 0$, mod. q, folgende Congruenz:

$$N\psi(\eta) \equiv \lambda^e - \lambda^{e-1}(\varphi(\eta) + \varphi(\eta_1) + \varphi(\eta_2) + \ldots + \varphi(\eta_{e-1})), \text{ mod. } q,$$

und da

$$\varphi(\eta) + \varphi(\eta_1) + \varphi(\eta_2) + \ldots + \varphi(\eta_{e-1}) \equiv \lambda, \text{ mod. } q,$$

ist, so ist

$$N\psi(\eta) \equiv 0, \text{ mod. } q.$$

Eben so soll jetzt die Theilbarkeit durch q der complexen Zahl

$$\Psi(\eta) = \psi(\eta_1)\psi(\eta_2) \ldots \psi(\eta_{e-1}) \text{ oder}$$
$$\Psi(\eta) = (\lambda - \varphi(\eta_1))(\lambda - \varphi(\eta_2)) \ldots (\lambda - \varphi(\eta_{e-1}))$$

untersucht werden, welche, mit Ausnahme des ersten Factors, alle Factoren der Norm von $\psi(\eta)$ enthält. Durch Entwicklung und Vernachläfsigung aller durch q theilbaren Theile erhält man hier:

$$\Psi(\eta) \equiv \lambda^{e-1} - \lambda^{e-2}(\varphi(\eta_1) + \varphi(\eta_2) + \ldots + \varphi(\eta_{e-1})), \text{ mod. } q,$$

und da

$$\varphi(\eta_1)+\varphi(\eta_2)+\ldots.+\varphi(\eta_{e-1}) \equiv \lambda-\varphi(\eta)$$

ist, so ist

$$\Psi(\eta) \equiv \lambda^{e-1}-\lambda^{e-2}(\lambda-\varphi(\eta)) \equiv \lambda^{e-2}\varphi(\eta), \text{ mod. } q;$$

also ist $\Psi(\eta)$ nicht durch q theilbar. Ich behaupte nun, dafs immer $\psi(\eta)$, oder doch $\psi(\eta)+q$, eine der verlangten complexen Zahlen ist, deren Norm den Factor q einmal enthält, aber nicht mehrmals. Um dies zu beweisen, entwickle ich $N(\psi(\eta)+q)$ nach dem Modul q^2, was

$$N(\psi(\eta)+q) \equiv N\psi(\eta)+q(\Psi(\eta)+\Psi(\eta_1)+\ldots.+\Psi(\eta_{e-1})), \text{ mod. } q^2,$$

giebt. Wenn also wirklich $\psi(\eta)$ nicht eine der verlangten Zahlen, sondern, aufser durch q, auch durch q^2 theilbar ist, so ist

$$N(\psi(\eta)+q) \equiv q(\Psi(\eta)+\Psi(\eta_1)+\ldots.+\Psi(\eta_{e-1})), \text{ mod. } q^2.$$

Multiplicirt man mit $\Psi(\eta)$ und beachtet, dafs $\Psi(\eta)\Psi(\eta_r)$ immer den Factor q enthält, aufser wenn $r=0$, so erhält man

$$\Psi(\eta)N(\psi(\eta)+q) \equiv q(\Psi(\eta))^2, \text{ mod. } q^2;$$

und da $(\Psi(\eta))^2$ nicht mit q aufgeht, so folgt, dafs $N(\psi(\eta)+q)$ nicht durch q^2 theilbar ist. Es giebt also stets complexe Zahlen, deren Normen einen bestimmten realen Primfactor q ***nur einmal*** enthalten.

§. 4.

Wir wenden uns jetzt zu den allgemeineren complexen Zahlen, welche nicht aus den Perioden, sondern irgend wie aus den Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda=1$ gebildet sind und welche also auf die Form

$$f(\alpha) = a_1\alpha+a_2\alpha^2+a_3\alpha^3+\ldots.+a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$$

gebracht werden können. Jede complexe Zahl ist ein Factor irgend einer realen ganzen Zahl; namentlich ist sie stets ein Factor der Norm: deshalb ist auch jeder Primfactor einer complexen Zahl zugleich Primfactor einer realen ganzen Zahl; und zwar immer Primfactor der Norm. Aus diesem Grunde haben wir zunächst die Bedingungen zu suchen, unter welchen die Norm einer complexen Zahl einen gegebenen realen Primfactor q enthält. Alle nicht durch λ theilbaren Zahlen können nun bekanntlich nach den verschiedenen Exponenten eingetheilt werden, zu welchen sie gehören, für den Modul λ (S. *Gauſs* Disquisitiones arithm. §. 52.); und diese Eintheilung begründet auch die wesentlich verschiedenen Characteре der Divisoren der Norm.

Es sei demnach q eine Primzahl, welche zum Exponenten von f (einem Divisor von $\lambda-1$) gehört, so dafs $q^f \equiv 1$, mod. λ, aber so, dafs keine niederere

Potenz von q der Eins congruent sei: so ist (Vergl. die Abhandlung über die Divisoren etc. in diesem Journal Bd. XXX. S. 115)

$$(1.) \quad (f(\alpha))^q \equiv f(\alpha^q), \text{ mod. } q:$$

also, wenn man wiederholt zur $q$ten Potenz erhebt:

$$(2.) \quad (f(\alpha))^{q^h} \equiv f(\alpha^{q^h}), \text{ mod. } q,$$

und folglich, wenn $h = 0, 1, 2, \ldots f-1$ gesetzt und multiplicirt wird:

$$(3.) \quad (f(\alpha))^{1+q+q^2+\ldots+q^{f-1}} \equiv f(\alpha)f(\alpha^q)f(\alpha^{q^2})\ldots f(\alpha^{p^{f-1}}), \text{ mod. } q.$$

Setzt man nun α^{γ^m} statt α, und für q, wo es als Exponent des α vorkommt, seinen congruenten Werth, als Potenz einer primitiven Wurzel γ, welche, da $q^f \equiv 1$, mod. λ eine e^{te} Potenz, also $p \equiv \gamma^{re}$, mod. λ, sein mufs: so erhält man

$$(4.) \quad (f(\alpha^{\gamma^m}))^{1+q+q^2+\ldots+q^{f-1}} \equiv f(\alpha^{\gamma^m})f(\alpha^{\gamma^{re+m}})f(\alpha^{\gamma^{2re+m}})\ldots f(\alpha^{\gamma^{(f-1)re+m}}), \text{ mod. } q.$$

Es hat r keinen gemeinschaftlichen Factor mit f, weil q nach der Voraussetzung so zum Exponenten f gehört, dafs q^f, aber keine niedrigere Potenz von q, der Eins congruent wird für den Modul λ. Giebt man also dem m nach einander e Werthe, welche alle nach dem Modul e incongruent sind, so erhält man durch Multiplication dieser Congruenzen rechts das Product aller conjugirten complexen Zahlen, d. h. die Norm der complexen Zahl $f(\alpha)$, folglich

$$(5.) \quad (\Pi f(\alpha^{\gamma^m}))^{1+q+q^2+\ldots+q^{f-1}} \equiv Nf(\alpha), \text{ mod. } q;$$

wo das Productzeichen Π sich auf die e verschiedenen Werthe des m bezieht, welche nur der einen Bedingung unterworfen sind, dafs sie alle incongruent sein müssen, für den Modul e. Wenn nun die Norm $Nf(\alpha)$ durch q theilbar ist, so ist auch

$$(\Pi f(\alpha^{g^m}))^{1+q+q^2+\ldots+q^{f-1}} \equiv 0, \text{ mod. } q;$$

woraus nothwendig folgt:

$$(6.) \quad \Pi f(\alpha^{g^m}) \equiv 0, \text{ mod. } q.$$

Wir haben also folgenden Satz:

Wenn $Nf(\alpha)$ durch q theilbar ist, wo q eine zum Exponenten f gehörende Primzahl bezeichnet, so müssen von den $\lambda-1$ conjugirten complexen Zahlen $f(\alpha)$, $f(\alpha^g)$, $f(\alpha^{g^2})$, etc. je e, deren Wurzeln nur verschiedenen von den e Perioden, zu je f Gliedern, angehören, immer ein Product geben, welches durch q theilbar ist.

Aufserdem folgt noch als Zusatz:

Wenn die Norm $Nf(\alpha)$ durch den zum Exponenten f gehörenden

Primfactor q theilbar ist, so mufs sie immer f mal den Factor q enthalten, oder durch q^f theilbar sein.

Um nun weiter die Congruenzbedingungen zu finden, welchen die Coëfficienten der complexen Zahl $f(\alpha)$ genügen müssen, damit die Norm derselben durch q theilbar sei, werden wir dieser complexen Zahl eine Form geben, in welcher statt der einfachen Wurzeln α, α^2, α^3, etc., insoweit es möglich ist, die Perioden von je f Gliedern auftreten. Nach *Gaufs* Disqu. arithm. §. 348, sind alle Wurzeln, welche in einer Periode von f Gliedern vorkommen, zugleich Wurzeln einer Gleichung vom $f$ten Grade von der Form

$$\alpha^f + \boldsymbol{P}_1\alpha^{f-1} + \boldsymbol{P}_2\alpha^{f-2} + \ldots + \boldsymbol{P}_f = 0,$$

deren Coëfficienten ganze und ganzzahlige Functionen der Perioden von je f Gliedern sind. Mittels dieser Gleichung kann man aus dem Ausdrucke

$$f(\alpha) = a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$$

alle Potenzen des α, von $\alpha^{\lambda-1}$ bis zu α^f hinab, eliminiren, und erhält dadurch einen Ausdruck von folgender Form:

$$(7.) \quad f(\alpha) = \varphi(\eta) + \alpha\varphi_1(\eta) + \alpha^2\varphi_2(\eta) + \ldots + \alpha^{f-1}\varphi_{f-1}(\eta),$$

wo $\varphi(\eta)$, $\varphi_1(\eta)$, $\varphi_2(\eta)$, etc. aus den Perioden von je f Gliedern gebildete complexe ganze Zahlen sind. Es läfst sich auch eine bestimmte complexe Zahl $f(\alpha)$ nur auf eine einzige Weise auf diese Form bringen.

Der gefundene Satz über die Theilbarkeit der Norm durch den Primfactor q läfst sich nun folgendermafsen ausdrücken:

Wenn $\boldsymbol{N}f(\alpha)$ durch den zum Exponenten f gehörenden Primfactor q theilbar ist, so mufs das Product der e Factoren

$$(8.) \quad \begin{cases} \left(\boldsymbol{c}f(\alpha) + \boldsymbol{c}_1 f(\alpha^{\gamma^e}) + \boldsymbol{c}_2 f(\alpha^{\gamma^{2e}}) + \ldots + \boldsymbol{c}_{f-1} f(\alpha^{\gamma^{(f-1)e}})\right), \\ \left(\overset{1}{\boldsymbol{c}} f(\alpha^\gamma) + \overset{1}{\boldsymbol{c}}_1 f(\alpha^{\gamma^{e+1}}) + \overset{1}{\boldsymbol{c}}_2 f(\alpha^{\gamma^{2e+1}}) + \ldots + \overset{1}{\boldsymbol{c}}_{f-1} f(\alpha^{\gamma^{(f-1)e+1}})\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(\overset{e-1}{\boldsymbol{c}} f(\alpha^{\gamma^{e-1}}) + \overset{e-1}{\boldsymbol{c}}_1 f(\alpha^{\gamma^{2e-1}}) + \overset{e-1}{\boldsymbol{c}}_2 f(\alpha^{\gamma^{3e-1}}) + \ldots + \overset{e-1}{\boldsymbol{c}}_{f-1} f(\alpha^{\gamma^{fe-1}})\right) \end{cases}$$

stets durch q theilbar sein, für alle beliebigen Werthe der durch $\boldsymbol{c}$ bezeichneten $\lambda-1$ Coëfficienten: denn alle einzelnen Theile dieses entwickelten Products sind dem obigen Satze zufolge durch q theilbar; ganz abgesehen von den Coëfficienten. Setzen wir nun für $f(\alpha)$ den gefundenen Ausdruck:

$$f(\alpha) = \varphi(\eta) + \alpha\varphi_1(\eta) + \alpha^2\varphi_2(\eta) + \ldots + \alpha^{f-1}\varphi_{g-1}(\eta)$$

und der Kürze wegen

$$(9.)\quad \begin{cases} \overset{k}{c} + \overset{k}{c_1} + \overset{k}{c_2} + \ldots + \overset{k}{c_{f-1}} = \overset{k}{C}, \\ \alpha\overset{k}{c} + \alpha^{\gamma^e}\overset{k}{c_1} + \alpha^{\gamma^{2e}}\overset{k}{c_2} + \ldots + \alpha^{\gamma^{(f-1)e}}\overset{k}{c_{f-1}} = \overset{k}{C_1}, \\ \alpha^2\overset{k}{c} + \alpha^{2\gamma^e}\overset{k}{c_1} + \alpha^{2\gamma^{2e}}\overset{k}{c_2} + \ldots + \alpha^{2\gamma^{(f-1)e}}\overset{k}{c_{f-1}} = \overset{k}{C_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha^{f-1}\overset{k}{c} + \alpha^{(f-1)\gamma^e}\overset{k}{c_1} + \alpha^{(f-1)\gamma^{2e}}\overset{k}{c_2} + \ldots + \alpha^{(f-1)\gamma^{(f-1)e}}\overset{k}{c_{f-1}} = \overset{k}{C_{f-1}}, \end{cases}$$

so verwandelt sich dieses Product in folgendes:

$$(10.)\quad \begin{cases} \left(C\varphi(\eta) + C_1\varphi_1(\eta) + C_2\varphi_2(\eta) + \ldots + C_{f-1}\varphi_{f-1}(\eta)\right) \\ \times \left(\overset{1}{C}\varphi(\eta_1) + \overset{1}{C_1}\varphi_1(\eta_1) + \overset{1}{C_2}\varphi_2(\eta_1) + \ldots + \overset{1}{C_{f-1}}\varphi_{f-1}(\eta_1)\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times \left(\overset{e-1}{C}\varphi(\eta_{e-1}) + \overset{e-1}{C_1}\varphi_1(\eta_{e-1}) + \overset{e-1}{C_1}\varphi_2(\eta_{e-1}) + \ldots + \overset{e-1}{C_{f-1}}\varphi_{f-1}\varphi_{f-1}(\eta_{e-1})\right); \end{cases}$$

welches also ebenfalls durch q theilbar sein mufs, und zwar für alle beliebigen Werthe der $\lambda-1$ Gröfsen C: denn da die mit c bezeichneten Gröfsen völlig beliebig waren, so folgt vermöge der Gleichungen (9.) das Gleiche für die Coëfficienten C. Nimmt man diese Coëfficienten unabhängig von α an, und setzt allgemein $\overset{k}{C_h} = C_h$, so geht das Product (10.) in die Norm der nur aus Perioden gebildeten complexen Zahl

$$C\varphi(\eta) + C_1\varphi_1(\eta) + C_2\varphi_2(\eta) + \ldots + C_{f-1}\varphi_{(f-1)}(\eta)$$

über; und damit dieselbe den Factor q habe, mufs nach (§. 2.), wenn statt der Perioden die zugehörigen Congruenzwurzeln gesetzt werden,

$$(11.)\quad C\varphi(u_r) + C_1\varphi_1(u_r) + C_2\varphi_2(u_r) + \ldots + C_{f-1}\varphi_{f-1}(u_r) \equiv 0, \text{ mod. } q,$$

sein, für irgend einen Werth von r. Diese Congruenz aber kann, da die Coëfficienten noch völlig beliebig sind, nicht bestehen, ohne dafs die einzelnen Glieder der Null congruent sind, also nicht ohne dafs

$$\varphi(u_r) \equiv 0, \quad \varphi_1(u_r) \equiv 0, \quad \varphi_2(u_r) \equiv 0, \quad \ldots \quad \varphi_{f-1}(u_r) \equiv 0, \text{ mod. } q,$$

ist. Umgekehrt: wenn diese f Congruenzen erfüllt werden, so ist auch

$$f(\alpha)f(\alpha^\gamma)f(\alpha^{\gamma^2})\ldots f(\alpha^{\gamma^{e-1}}) \equiv 0, \text{ mod. } q,$$

also $Nf(\alpha)$ durch q^f theilbar. Diese Resultate lassen sich durch folgenden Satz aussprechen:

Wenn $Nf(\alpha)$ durch die Primzahl q theilbar ist, welche zum Exponenten f gehört, für den Modul λ: so müssen die f Congruenzbedingungen

$$\varphi(u_r) \equiv 0, \quad \varphi_1(u_r) \equiv 0, \quad \varphi_2(u_r) \equiv 0, \quad \ldots \quad \varphi_{f-1}(u_r) \equiv 0, \text{ mod. } q,$$

erfüllt werden, für irgend einen Werth von r; welche Congruenzen man dadurch erhält, dafs man $f(\alpha)$ ***auf die Form***

$$f(\alpha) = \varphi(\eta) + \alpha\varphi_1(\eta) + \alpha^2\varphi_2(\eta) + \ldots + \alpha^{f-1}\varphi_{f-1}(\eta)$$

bringt und statt der Perioden in $\varphi(\eta)$, $\varphi(\eta_1)$, $\varphi(\eta_2)$, ... ***die entsprechenden Congruenzwurzeln setzt. Umgekehrt: wenn die*** f ***Congruenzbedingungen erfüllt werden, so ist auch*** $Nf(\alpha)$ ***durch*** q, ***(also auch durch*** q^f***) theilbar.***

Es giebt noch eine andere, aber weniger brauchbare Art, die Bedingung auszudrücken, dafs $Nf(\alpha)$ durch q theilbar sein soll. Bildet man nämlich das Product

$$f(\alpha)f(\alpha^{r^e})f(\alpha^{r^{2e}}) \ldots . f(\alpha^{r^{(f-1)e}}) = F(\eta),$$

welches, als symmetrische Function der in einer Periode enthaltenen Wurzeln, eine Function der Perioden von je f Gliedern ist, so erhält man

$$Nf(\alpha) = F(\eta)F(\eta_1)F(\eta_2) \ldots . F(\eta_{e-1}).$$

Damit nun $Nf(\alpha)$ durch q theilbar sei, ist es nothwendig und hinreichend, dafs $F(u_r) \equiv 0$, mod. q, sei, für irgend einen Werth von r. Es ist bemerkenswerth, dafs hier nur eine einzige Congruenzbedingung gefunden wurde, und zwar, in Beziehung auf die Coëfficienten von $f(\alpha)$, vom $f$ten Grade, während sich oben f Congruenzbedingungen vom ersten Grade für die Theilbarkeit der Norm $Nf(\alpha)$ durch die Primzahl q ergaben; und da beide in gleicher Weise hinreichend und nothwendig sind, so ist zu schliefsen, dafs die eine Congruenz vom $f$ten Grade $F(u_r) \equiv 0$, mod. q, genau Dasselbe ausdrückt, wie die f linearen Congruenzen $\varphi(u_r) \equiv 0$, $\varphi_1(u_r) \equiv 0$, ... $\varphi_{f-1}(u_r) \equiv 0$, mod. q, oder dafs jene eine Congruenz nicht erfüllt werden kann, ohne dafs diese f Congruenzen zugleich erfüllt werden.

§. 5.

Wenn für eine complexe Zahl $f(\alpha)$, welche auf die Form

$$f(\alpha) = \varphi(\eta) + \alpha\varphi_1(\eta) + \alpha^2\varphi_2(\eta) + \ldots + \alpha^{f-1}\varphi_{f-1}(\eta)$$

gebracht ist, die f Congruenzbedingungen

$$\varphi(u_r) \equiv 0, \quad \varphi_1(u_r) \equiv 0, \quad \varphi_2(u_r) \equiv 0, \quad \ldots . \quad + \varphi_{f-1}(u_r) \equiv 0, \text{ mod. } q,$$

erfüllt werden, so wollen wir dies künftig kurz so ausdrücken: es sei $f(\alpha) \equiv 0$, mod. q, für $\eta = u_r$. Durch Festsetzung einer einzigen Congruenzwurzel, welche einer Periode entsprechen soll, ist, da die cyklische Ordnung bei beiden stets unverändert bleibt, zugleich für jede Periode die entsprechende Congruenz-

wurzel bestimmt; oder in der einen Bestimmung für $\eta = u_r$ liegen zugleich die folgenden: $\eta_1 = u_{r+1}$, $\eta_2 = u_{r+2}$, etc.; auch $\eta_{e-r} = u$.

Hiernach ist leicht einzusehen, dafs, wenn $f(\alpha)$ als ein Product von Factoren auftritt, und einer derselben hat die Eigenschaft, congruent Null zu werden für $\eta = u_r$: dafs dann auch das entwickelte Product dieselbe Eigenschaft haben mufs. Ist nämlich

$$(1.) \qquad f(\alpha)g(\alpha) = h(\alpha)$$

und $f(\alpha) \equiv 0$, mod. q, für $\eta = u_r$ und man bringt $f(\alpha)$ auf die Form

$$f(\alpha) = \varphi(\eta) + \alpha\varphi_1(\eta) + \alpha^2\varphi_2(\eta) + \ldots + \alpha^{f-1}\varphi_{f-1}(\eta),$$

so sind alle Glieder des Products $f(\alpha)g(\alpha)$ mit einer der complexen Zahlen $\varphi(\eta)$, $\varphi_1(\eta)$, $\varphi_2(\eta)$, etc. multiplicirt; sie werden also alle durch q theilbar, für $\eta = u_r$. Um aber den umgekehrten Satz zu beweisen, nämlich, dafs, wenn $h(\alpha) \equiv 0$, mod. q, für $\eta = u_r$, und $g(\alpha)$ nicht congruent Null ist, für $\eta = u_r$, nothwendig $f(\alpha) \equiv 0$, mod. q, für $\eta = u_r$ sein mufs, setze ich

$$f(\alpha)f(\alpha^{\gamma^e})f(\alpha^{\gamma^{2e}}) \ldots f(\alpha^{\gamma^{(f-1)e}}) = F(\eta),$$
$$g(\alpha)g(\alpha^{\gamma^e})g(\alpha^{\gamma^{2e}}) \ldots g(\alpha^{\gamma^{(f-1)e}}) = G(\eta),$$
$$h(\alpha)h(\alpha^{\gamma^e})h(\alpha^{\gamma^{2e}}) \ldots h(\alpha^{\gamma^{(f-1)e}}) = H(\eta).$$

Dann erhält man aus der Gleichung $f(\alpha)g(\alpha) = h(\alpha)$:

$$(2.) \qquad F(\eta)G(\eta) = H(\eta).$$

Wenn nun $h(\alpha) \equiv 0$, mod. q, für $\eta = u_r$ ist, so ist auch $H(\eta) \equiv 0$, mod. q, für $\eta = u_r$, oder (wie wir dies bisher immer kurz bezeichneten) $H(u_r) \equiv 0$, mod. q: also mufs, wenn in (2.) u_r statt η gesetzt wird, auch eine der beiden ganzen Zahlen $F(u_r)$ oder $G(u_r)$ durch q theilbar sein; und wenn nach der Voraussetzung $g(\alpha)$ nicht $\equiv 0$, mod. q, für $\eta = u_r$ ist, so ist auch $G(u_r)$ nicht congruent Null, also $F(u_r) \equiv 0$, mod. q. Die Bedingung $F(u_r) \equiv 0$, mod. q, ist aber, wie zu Ende des vorigen Paragraphen gezeigt wurde, identisch mit der Bedingung $\varphi(u_r) \equiv 0$, $\varphi_1(u_r) \equiv 0$, $\varphi_2(u_r) \equiv 0$, ... $\varphi_{f-1}(u_r) \equiv 0$, mod. q, also auch identisch mit der Bedingung $f(\alpha) \equiv 0$, mod. q, für $\eta = u_r$.

Da nun bewiesen ist, dafs die Bedingung $f(\alpha) \equiv 0$, mod. q, für $\eta = u_r$ stets dieselbe bleibt, es mag $f(\alpha)$ in entwickelter Form auftreten, oder in Form eines Products aus zweien, und folglich auch aus mehreren complexen Zahlen: so folgt von selbst der Satz:

> ***Wenn eine aus Factoren bestehende complexe Zahl durch q theilbar ist, so müssen für alle Werthe*** $\eta = u$, $\eta = u_1$, $\eta = u_2$, ... $\eta = u_{e-1}$ ***irgend einige ihrer Factoren congruent Null werden, mod. q.***

und umgekehrt:

Wenn für jeden der Werthe $\eta = u$, $\eta = u_1$, $\eta = u_2$, ... $\eta = u_{e-1}$ ***irgend einer der Factoren einer complexen Zahl congruent Null wird, mod.*** q***: so enthält dieselbe den realen Factor*** q.

Die f Congruenzbedingungen, welche wir in dem Ausdrucke $f(\alpha) \equiv 0$, mod. q, für $\eta = u_r$ zusammenfassen, lassen sich noch auf eine andere Weise sehr einfach ausdrücken. Ist nämlich $\psi(\eta)$ eine complexe Zahl von der Art, wie wir sie in (§. 3.) fanden, nemlich, dafs die Norm derselben oder das Product $\psi(\eta)\psi(\eta_1)\psi(\eta_2)\ldots\psi(\eta_{e-1})$ durch q theilbar sei, nicht aber durch q^2: so mufs, wie oben gezeigt, $\psi(u_r) \equiv 0$, mod. q, sein, für irgend einen bestimmten Werth von r. Wird nun, wie in (§. 3.),

$$\Psi(\eta) = \psi(\eta_1)\psi(\eta_2)\ldots\psi(\eta_{e-1})$$

gesetzt, so behaupte ich, ***dafs die Bedingung*** $f(\alpha) \equiv 0$, mod. q, für $u = \eta_r$ ***identisch ist mit der Bedingung*** $f(\alpha)\Psi(\eta) \equiv 0$, mod. q. Es ist nämlich $\Psi(\eta)$, weil es die $e-1$ Factoren $\psi(\eta_1)$, $\psi(\eta_2)$, ... $\psi(\eta_{e-1})$ enthält, für alle Werthe $\eta = u$, u_1, u_2, ... u_{e-1}, mit Ausnahme des Werths $\eta = u_r$, durch q theilbar: wenn also $f(\alpha) \equiv 0$, mod. q ist, für $\eta = u_r$, so ist das Product $f(\alpha)\Psi(\eta)$ für alle Werthe $\eta = u$, u_1, u_2, ... u_{e-1}, ohne Ausnahme, congruent Null, mod. q, und enthält also den realen Factor q. Wenn ferner, umgekehrt, $f(\alpha)\Psi(\eta)$ durch q theilbar ist, so müssen die beiden Factoren zusammen für alle Werthe $\eta = u$, u_1, u_2, ... u_{e-1} durch q theilbar sein, und da $\Psi(\eta)$ für $\eta = u_r$ nicht durch q theilbar ist, so mufs nothwendig der andere Factor $f(\alpha) = 0$, mod. q, für $\eta = u_r$ es sein.

§. 6.

Die Coëfficienten einer complexen Zahl von der Form

$$\varphi(\eta) = a\eta + a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_{e-1}\eta_{e-1}$$

lassen sich, wie in (§. 2.) gezeigt, auf unendlich viele verschiedene Arten so bestimmen, dafs die Norm $N\varphi(\eta)$ durch die zum Exponenten f gehörende Primzahl q theilbar, also ein Vielfaches von q wird. In vielen Fällen, aber nicht immer, gelingt es sogar, complexe Zahlen zu finden, deren Norm die reale Primzahl q selbst ist, so dafs $q = \varphi(\eta)\varphi(\eta_1)\varphi(\eta_2)\ldots\varphi(\eta_{e-1})$; die complexe Zahl $\varphi(\eta)$ mufs alsdann, wenn statt der Perioden die entsprechenden Congruenzwurzeln gesetzt werden, durch q theilbar werden, so dafs $\varphi(u_r) \equiv 0$, mod. q, ist, für irgend einen bestimmten Werth von r. Wenn nun die Norm von $\varphi(\eta)$ gleich q ist, so ist $\varphi(\eta)$ ein nicht weiter in Factoren zerlegbarer

Primfactor der realen Zahl q. Wäre nämlich $\varphi(\eta)$ in zwei complexe Factoren zerlegbar, so dafs $\varphi(\eta) = f(\alpha)$ wäre, so müfste zunächst, weil $\varphi(\eta) \equiv 0$, mod. q, für $\eta = u_r$ ist, auch einer der beiden Factoren, zu welchen ich $f(\alpha)$ nehme, congruent Null sein, mod. q, für $\eta = u_r$. Aus $\varphi(\eta) = f(\alpha)g(\alpha)$ folgt aber weiter, wenn man α in α^γ, α^{γ^2}, ... $\alpha^{\gamma^{e-1}}$ verwandelt und die Gleichungen multiplicirt:

$$\varphi(\eta)\varphi(\eta_1)\varphi(\eta_2)\ldots.\varphi(\eta_{e-1})$$
$$= f(\alpha)f(\alpha^\gamma)f(\alpha^{\gamma^2})\ldots.f(\alpha^{\gamma^{e-1}})g(\alpha)g(\alpha^\gamma)g(\alpha^{\gamma^2})\ldots.g(\alpha^{\gamma^{e-1}}).$$

Da nun $f(\alpha) \equiv 0$, für $\eta = u_r$ ist, so ist das Product $f(\alpha)f(\alpha^\gamma)f(\alpha^{\gamma^2})\ldots.f(\alpha^{\gamma^{e-1}})$ durch q theilbar, also gleich $qF(\alpha)$; und da $\varphi(\eta)\varphi(\eta_1)\varphi(\eta_2)\ldots.\varphi(\eta_{e-1}) = q$ ist, so erhält man, nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors q:

$$1 = F(\alpha)g(\alpha)g(\alpha^\gamma)g(\alpha^{\gamma^2})\ldots.g(\alpha^{\gamma^{e-1}}):$$

es müssen also alle Factoren rechts nur complexe Einheiten und mithin mufs namentlich $g(\alpha)$ eine complexe Einheit sein. Wenn man demnach die Zahl $\varphi(\eta)$, deren Norm die Primzahl q ist, auf irgend eine Weise in zwei Factoren zerlegt, so ist einer derselben stets nur eine complexe Einheit, und $\varphi(\eta)$ ist also wirklich eine complexe ***Primzahl***. Wenn nun irgend eine complexe Zahl $f(\alpha)$ diesen Primfactor $\varphi(\eta)$ der realen Primzahl q als Factor enthält, so dafs $f(\alpha) = \varphi(\eta)g(\alpha)$ ist, so mufs $f(\alpha) \equiv 0$, mod. q, für $\eta = u_r$ sein, weil $\varphi(u_r) \equiv 0$, mod. q, ist. Eine Umkehrung dieses Satzes läfst sich nicht ohne Weiteres aufstellen; denn in vielen Fällen existirt ein solcher Primfactor von q nicht, während die Congruenzbedingung $f(\alpha) \equiv 0$, mod. q, für $\eta = u_r$ wirklich erfüllt wird. Diese Congruenzbedingung aber, als die bleibende und jener Zufälligkeit, ob q sich als Product von e conjugirten complexen Zahlen darstellen lasse, nicht unterworfene Eigenschaft einer complexen Zahl, soll nun als Definition der complexen Primfactoren benutzt werden, welche selbst sodann entweder als wirkliche complexe Zahlen für sich darstellbar sein können, oder auch nicht; in welchem letzteren Falle sie *ideale* Primfactoren genannt werden sollen. Anstatt der Congruenzbedingung selbst aber werden wir den Ausdruck derselben am Ende des vorigen Paragraphen wählen, weil dieser sich am leichtesten auch auf den Fall ausdehnen läfst, wo einer und derselbe Primfactor mehrmals in einer complexen Zahl enthalten ist.

Die allgemeine Definition der realen oder idealen Primfactoren einer gegebenen complexen Zahl ist also folgende:

Es sei $\psi(\eta)$ ***eine aus den*** e ***Perioden von je*** f ***Gliedern gebildete complexe Zahl, von der Art, dafs die Norm*** $\psi(\eta)\psi(\eta_1)\psi(\eta_2)\ldots.\psi(\eta_{e-1})$

durch die zum Exponenten f gehörende reale Primzahl q theilbar ist, nicht aber durch q^2, so wie, dafs $\psi(u) \equiv 0$, mod. q: dann setze man

$$\Psi(\eta) = \psi(\eta_1)\psi(\eta_2)\ldots\ldots\psi(\eta_{e-1}).$$

Wenn nun irgend eine complexe Zahl $f(\alpha)$ die Eigenschaft hat, dafs das Product $f(\alpha)\Psi(\eta_r)$ durch q theilbar ist, so soll dies so ausgedrückt werden: es enthalte $f(\alpha)$ den zu $\eta_r = u$ gehörenden Primfactor von q. Wenn ferner $f(\alpha)$ die Eigenschaft hat, dafs $f(\alpha)(\Psi(\eta_r))^\mu$ durch q^μ theilbar ist, aber $f(\alpha)(\Psi(\eta_r))^{\mu+1}$ nicht theilbar durch $q^{\mu+1}$, so soll dies heifsen: es enthalte $f(\alpha)$ den zu $\eta_r = u$ gehörenden Primfactor von q genau μ mal.

Die Zweckmäfsigkeit dieser Definition kann sich erst aus der auf dieselbe gegründeten Theorie ergeben; in welcher wir zeigen werden, dafs man mit den Eigenschaften der complexen Zahlen, welche wir so eben als Primfactoren derselben definirten, und welche in vielen Fällen auch *wirkliche* Primfactoren derselben geben, genau eben so rechnen kann, wie mit den ganzzahligen Primfactoren der zusammengesetzten ganzen Zahlen. Zunächst aber ist hier noch nachzuweisen, dafs diese Primfactoren von den *besondern* Eigenschaften der zu ihrer Auffindung zu benutzenden complexen Zahl $\Psi(\eta)$ ganz unabhängig sind, oder dafs man immer genau dieselben Primfactoren erhält, auch wenn man statt der complexen Zahl $\Psi(\eta)$ eine andere Zahl von denselben oben angegebenen *allgemeinen* Eigenschaften anwendet.

Es sei also $\Psi'(\eta)$ eine andere complexe Zahl, von der Art, dafs $\Psi'(\eta)\Psi'(\eta_1)\Psi'(\eta_2)\ldots\ldots\Psi'(\eta_{e-1})$ durch q, aber nicht durch q^2 theilbar ist, und $\Psi'(u) \equiv 0$, mod. q; auch sei $\Psi'(\eta) = \psi(\eta_1)\psi(\eta_2)\ldots\ldots\psi(\eta_{e-1})$: so wird behauptet, dafs, wenn $f(\alpha)(\Psi(\eta_r))^\mu$ durch q^μ theilbar ist, nicht aber $f(\alpha)(\Psi(\eta_r))^{\mu+1}$ durch $q^{\mu+1}$, auch $f(\alpha)(\Psi'(\eta_r))^\mu$ durch q^μ theilbar sein mufs, aber $f(\alpha)(\Psi'(\eta_r))^{\mu+1}$ nicht theilbar durch $q^{\mu+1}$. Der Voraussetzung zufolge hat man

$$f(\alpha)(\Psi(\eta_r))^\mu = q^\mu Q(\alpha),$$

und $Q(\alpha)\Psi(\eta_r)$ ist nicht theilbar durch q, oder, was Dasselbe ist: $Q(\alpha)$ ist nicht congruent Null, mod. q, für $\eta_r = u$. Multiplicirt man nun mit $(\psi(\eta_r))^\mu(\Psi'(\eta_r))^\mu$, so ergiebt sich

$$f(\alpha)(\psi(\eta_r))^\mu(\Psi(\eta_r))^\mu(\Psi'(\eta_r))^\mu = q^\mu Q(\alpha)(\psi(\eta_r))^\mu(\Psi'(\eta_r))^\mu.$$

Nun ist $\psi(\eta_r)\Psi(\eta_r)$, die Norm von $\psi(\eta)$, gleich qP; wo P eine nicht durch q theilbare ganze Zahl ist; ferner ist $\psi(\eta_r)\Psi'(\eta_r) = qR(\eta_r)$, d. h. eine durch q theilbare complexe Zahl. Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung, und

läfst den gemeinschaftlichen Factor q^μ weg, so erhält man

$$f(\alpha)\,\Psi'(\eta_r))^\mu\,\boldsymbol{P}^\mu = q^\mu\,\boldsymbol{Q}(\alpha)(\boldsymbol{R}(\eta_r))^\mu;$$

und da $\boldsymbol{P}$ nicht durch q theilbar ist, so folgt, dafs $f(\alpha)(\Psi(\eta_r))^\mu$ durch q^μ theilbar sein mufs. Multiplicirt man nun noch einmal mit $\Psi'(\eta_r)$, so erhält man

$$f(\alpha)(\Psi'(\eta_r))^{\mu+1}\,\boldsymbol{P}^\mu = q^\mu\,\boldsymbol{Q}(\alpha)(\boldsymbol{R}(\eta_r))^\mu\,\Psi'(\eta_r).$$

Es ist aber $\boldsymbol{Q}(\alpha)(\boldsymbol{R}(\eta_r))^\mu\,\Psi'(\eta_r)$ nicht theilbar durch q, weil keiner der drei Factoren für $\eta_r = \boldsymbol{u}$ mit q aufgeht: also ist auch $f(\alpha)(\Psi'(\eta_r))^{\mu+1}$ nicht theilbar durch $q^{\mu+1}$. Es ist daher in der That Dasselbe, ob man die complexe Zahl $\Psi'(\eta)$, oder $\Psi'(\eta)$, zur Untersuchung des in $f(\alpha)$ enthaltenen Primfactors anwendet.

Da wir die Bedingung, dafs $f(\alpha)$ den zu $\eta_r = \boldsymbol{u}$ gehörenden Primfactor von q einmal enthalte, durch f Congruenzen ausgedrückt haben, welchen die Coëfficienten der complexen Zahl $f(\alpha)$ genügen müssen, so wollen wir hier auch zeigen, wie die Bedingung, dafs $f(\alpha)$ einen solchen Primfactor mehreremale enthalte, durch Congruenzen auszudrücken sei. Bringt man $f(\alpha)$ wieder auf die Form

$$f(\alpha) = \varphi(\eta) + \alpha\varphi_1(\eta) + \alpha^2\varphi_2(\eta) + \ldots + \alpha^{f-1}\varphi_{f-1}(\eta),$$

so ergiebt sich

$$f(\alpha)\,\Psi(\eta_r) = \varphi(\eta)\,\Psi(\eta_r) + \alpha\varphi_1(\eta)\,\Psi(\eta_r) + \ldots + \alpha^{f-1}\varphi_{f-1}(\eta)\,\Psi(\eta_r).$$

Wenn nun $f(\alpha)$ den zu $\eta_r = \boldsymbol{u}$ gehörenden Primfactor der zum Exponenten f gehörenden realen Primzahl q einmal enthält, so dafs $f(\alpha)\,\Psi(\eta_r)$ durch q theilbar ist, so müssen, wie (§. 4.) zeigt, $\varphi(\eta)$, $\varphi_1(\eta)$, $\ldots$. $\varphi_{f-1}(\eta)$ alle denselben idealen Primfactor enthalten: also müssen auch $\varphi(\eta)\,\Psi(\eta_r)$, $\varphi_1(\eta)\Psi(\eta_r)$, $\ldots$. $\varphi_{f-1}(\eta)\Psi(\eta_r)$ alle durch q theilbar sein. Setzt man demnach

$$\varphi(\eta)\,\Psi(\eta_r) = q\varphi'(\eta),\quad \varphi_1(\eta)\,\Psi(\eta_r) = q\varphi_1'(\eta),\quad \ldots.\quad \varphi_{f-1}(\eta)\,\Psi(\eta_r) = q\varphi_{f-1}'(\eta),$$

so erhält man

$$f(\alpha)\,\Psi(\eta_r) = q[\varphi'(\eta) + \alpha\varphi_1'(\eta) + \alpha^2\varphi_2'(\eta) + \ldots + \alpha^{f-1}\varphi_{f-1}'(\eta)].$$

Wenn nun $f(\alpha)$ den zu $\eta_r = \boldsymbol{u}$ gehörenden Primfactor von q zweimal enthält, so ist $f(\alpha)(\Psi(\eta_r))^2$ durch q^2 theilbar; multiplicirt man daher noch einmal mit $\Psi(\eta_r)$, so müssen wieder $\varphi'(\eta)\Psi(\eta_r)$, $\varphi_1'(\eta)\Psi(\eta_r)$, $\ldots$. $\varphi_{f-1}'(\eta)\Psi(\eta_r)$ alle einzeln durch q theilbar sein, folglich $\varphi(\eta)(\Psi(\eta_r))^2$, $\varphi_1(\eta)(\Psi(\eta_r))^2$, $\ldots$. $\varphi_{f-1}(\eta)(\Psi(\eta_r))^2$ alle theilbar durch q^2. So fortfahrend, zeigt sich, dafs, wenn $f(\alpha)(\Psi(\eta_r))^\mu$ durch q^μ theilbar ist, allemal auch $\varphi(\eta)(\Psi(\eta_r))^\mu$, $\varphi_1(\eta)(\Psi(\eta_r))^\mu$, $\ldots$. $\varphi_{f-1}(\eta)(\Psi(\eta_r))^\mu$ einzeln durch q^μ theilbar sein müssen; oder, was Dasselbe ist: wenn $f(\alpha)$ den

zu $\eta_r = u$ gehörenden Primfactor von q μmal enthält, so müssen die complexen, aus den Perioden gebildeten Zahlen $\varphi(\eta)$, $\varphi_1(\eta)$, $\varphi_2(\eta)$, ... $\varphi_{f-1}(\eta)$ den nämlichen Primfactor jede μmal enthalten. Entwickelt man nun das Product $\varphi_k(\eta)(\Psi(\eta_r))^\mu$ in linearer Form, so dafs

$$\varphi_k(\eta)(\Psi(\eta_r))^\mu = C\eta + C_1\eta_1 + C_2\eta_2 + ... + C_{e-1}\eta_{e-1},$$

so folgt sehr leicht, dafs

$$\varphi_k(\eta)(\Psi(\eta_r))^\mu + \varphi_k(\eta_1)(\Psi(\eta_{r+1}))^\mu + ... + \varphi_k(\eta_{e-1})(\Psi(\eta_{r+e-1}))^\mu = -(C + C_1 + C_2 + ... + C_{e-1})$$

ist. Multiplicirt man noch einmal mit $(\Psi(\eta_r))^\mu$ und erwägt, dafs $\Psi(\eta_r)\Psi(\eta_s)$ immer durch q theilbar ist, den einen Fall $r = s$ ausgenommen, so erhält man

$$\varphi_k(\eta)(\Psi(\eta_r))^{2\mu} \equiv -(C + C_1 + C_2 + ... + C_{e-1})(\Psi(\eta_r))^\mu, \text{ mod. } q^\mu.$$

Hieraus folgt, dafs die Bedingung: $\varphi(\eta_r)(\Psi(\eta_r))^\mu$ sei durch q^μ theilbar, identisch ist mit der Bedingung $C + C_1 + C_2 + ... + C_{e-1} \equiv 0$, mod. q^μ. Also die Bedingung, dafs $f(\alpha)$ den zu $\eta_r = u$ gehörenden (idealen) Primfactor von q μmal enthalte, wird durch f Congruenzen für den Modul q^n ausgedrückt, welche unter den Coëfficienten der complexen Zahl $f(\alpha)$ Statt finden müssen. Wir bemerken noch ausdrücklich, dafs diese Congruenzen in Beziehung auf die Coëfficienten von $f(\alpha)$ nur vom ersten Grade sind; denn $\varphi_k(\eta)$ enthält dieselben nur linear, und $(\Psi(\eta_r))^\mu$ enthält sie gar nicht; also enthalten auch C, C_1, C_2, ... C_{e-1} die Coëfficienten nur in linearer Weise.

§. 7.

Wir haben nun dieselben einfachen Sätze, welche für die Rechnung mit den realen ganzen Primfactoren der ganzen Zahlen gelten, für die in dem vorigen Paragraphen definirten idealen oder wirklichen Primfactoren der complexen Zahlen aufzustellen und zu beweisen. Es werde zunächst folgender Satz bewiesen:

Das entwickelte Product zweier oder mehrerer complexen Zahlen hat genau dieselben Primfactoren wie die Factoren des Products zusammengenommen.

Es seien $f(\alpha)$ und $g(\alpha)$ zwei complexe Factoren, $h(\alpha)$ das entwickelte Product derselben, so dafs $f(\alpha)g(\alpha) = h(\alpha)$. Es enthalte $f(\alpha)$ den zu $\eta_r = u$ gehörenden Primfactor von q genau μmal, $g(\alpha)$ denselben Factor genau νmal: so wird behauptet, dafs $h(\alpha)$ denselben genau $\mu + \nu$mal enthält. Nach der Voraussetzung ist $f(\alpha)(\Psi(\eta_r))^\mu = q^\mu Q(\alpha)$ und $g(\alpha)(\Psi(\eta_r))^\nu = q_\nu R(\alpha)$, und

weder $Q(\alpha)\Psi(\eta_r)$ noch $R(\alpha)\Psi(\eta_r)$ ist durch q theilbar, weil sonst $f(\alpha)$ oder $g(\alpha)$ den zu $\eta_r = u$ gehörenden Primfactor von q, $\mu+1$ mal oder $\nu+1$ mal enthalten würden; gegen die Voraussetzung. Hieraus folgt $f(\alpha)g(\alpha)(\Psi(\eta_r))^{\mu+\nu} = q^{\mu+\nu}Q(\alpha)R(\alpha)$, also auch $h(\alpha)(\Psi(\eta_r))^{\mu+\nu} = q^{\mu+\nu}Q(\alpha)R(\alpha)$. Multiplicirt man noch einmal mit $\Psi(\eta_r)$, so ist $h(\alpha)(\Psi(\eta_r)^{\mu+\nu+1}$ auch durch keine höhere Potenz als durch $q^{\mu+\nu}$ theilbar; denn $Q(\alpha)R(\alpha)\Psi(\eta_r)$ ist nicht durch q theilbar, weil für $\eta_r = u$ keiner der drei Factoren dieses Products der Null congruent wird. Was nun hier von einem beliebigen idealen Primfactor bewiesen ist, gilt offenbar für alle; und da man ferner auch jeden der Factoren des Products wieder in Factoren zerfället sich vorstellen kann, so ist klar, dafs der aufgestellte Satz auch eben so für jedes Product beliebig vieler Factoren gilt.

Dafs eine complexe Zahl, welche als Product mehrerer Factoren auftritt, durch q theilbar ist, wenn sie alle e ideale Primfactoren von q enthält, und nicht durch q theilbar, wenn sie irgend einen dieser Primfactoren nicht enthält, ist schon oben in (§. 5.) gezeigt worden; nur ist daselbst noch nicht der Ausdruck *idealer Primfactor*, sondern statt dessen die ihm gleichbedeutende Congruenzbedingung gebraucht worden. Wir erweitern hier den Satz wie folgt:

Wenn eine complexe Zahl $f(\alpha)$ alle idealen Primfactoren von q enthält, und zwar denjenigen, welcher am wenigsten oft darin vorkommt, μ mal, so ist die Zahl durch q^μ theilbar.

Nach der Voraussetzung hat man folgende Congruenzen:

$$f(\alpha)(\Psi(\eta))^\mu \equiv 0,\ f(\alpha)(\Psi(\eta_1)^\mu \equiv 0,\ \ldots.\ f(\alpha)(\Psi(\eta_{e-1})^\mu \equiv 0,\ \text{mod. } q^\mu:$$

also ist auch die Summe.

$$f(\alpha)[(\Psi(\eta))^\mu + (\Psi(\eta_1))^\mu + \ldots. + (\Psi(\eta_{e-1}))^\mu] \equiv 0,\ \text{mod. } q^\mu.$$

Der Ausdruck in den Klammern ist aber eine reale ganze Zahl, welche nicht durch q theilbar ist, weil sie sogar, wie leicht zu zeigen, keinen einzigen idealen Primfactor von q enthält: also mufs $f(\alpha)$ durch q^μ theilbar sein; wie es behauptet wurde.

Wenn die complexe Zahl $f(\alpha)$ genau m ideale Primfactoren der realen, zum Exponenten f gehörenden Primzahl q enthält, sie mögen verschieden, oder zum Theil, oder alle dieselben sein: so enthält die Norm $Nf(\alpha)$ den Factor q^{mf}; aber keine höhere Potenz von q.

Die conjugirten complexen Zahlen $f(\alpha)$, $f(\alpha^\gamma)$, $f(\alpha^{\gamma^2})$, $\ldots.$ $f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}})$ enthalten alle gleich viele, und zwar jede genau m ideale Primfactoren von q.

Ändert man nämlich nur die Benennungen der Primfactoren in $f(\alpha^{\gamma^h})$, jeden um eine Stufe, so erhält man die in $f(\alpha^{\gamma^{h+1}})$ enthaltenen Primfactoren. Das Product aller dieser $\lambda-1$ conjugirten Factoren, welches gleich $Nf(\alpha)$ ist, mufs also genau $(\lambda-1)m$, das heifst $e.f.m$ ideale Primfactoren von q enthalten. Ferner ist leicht zu sehen, dafs in diesem Producte alle e verschiedenen Primfactoren von q gleichvielmal vorkommen, weil sonst $Nf(\alpha)$ gar nicht einmal eine ganze Zahl sein könnte. Es mufs also jeder dieser Primfactoren genau mf mal vorkommen, und folglich mufs $Nf(\alpha)$ genau durch q^{fm} theilbar sein.

Hieraus folgt von selbst der wichtige Satz:

Jede gegebene complexe Zahl enthält nur eine endliche bestimmte Anzahl (idealer) Primfactoren.

Umgekehrt aber ist, wenn die idealen Primfactoren einer complexen Zahl bekannt sind, zu untersuchen, ob dieselben nur einer einzigen bestimmten, oder auch verschiedenen complexen Zahlen angehören können. Sind $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$ zwei complexe Zahlen, welche genau dieselben (idealen) Primfactoren enthalten, so ist zunächst aus dem so eben bewiesenen Satze klar, dafs die Normen derselben gleich sein müssen, also dafs $Nf(\alpha) = N\varphi(\alpha)$ sein mufs. Es mag nun $f(\alpha)$ sowohl, als $\varphi(\alpha)$, m Primfactoren der zum Exponenten f gehörenden Primzahl q enthalten, m' Primfactoren der zum Exponenten f' gehörenden Primzahl q, m'' Primfactoren der zum Exponenten f'' gehörenden Primzahl q'', etc., so ist:

$$Nf(\alpha) = N\varphi(\alpha) = q^{mf}.q'^{m'f'}.q''^{m''f''}\ldots.$$

Da $f(\alpha)$ dieselben (idealen) Primfactoren enthält wie $\varphi(\alpha)$, so mufs auch $f(\alpha)\varphi(\alpha^g)\varphi(\alpha^{g^2})\ldots.\varphi(\alpha^{g^{\lambda-2}})$ genau dieselben enthalten wie $N\varphi(\alpha)$: also mufs es alle (idealen) Primfactoren von q enthalten, jeden mf mal, alle Primfactoren von q', jeden $m'f'$ mal, alle Primfactoren von q'', jeden $m''f''$ mal u. s. w.; mithin mufs, nach einem oben bewiesenen Satze, $f(\alpha)\varphi(\alpha^g)\varphi(\alpha^{g^2})\ldots.\varphi(\alpha^{g^{\lambda-2}})$ durch q^{mf} und eben so durch $q'^{m'f'}$, durch $q''^{m''f''}$ u. s. w. theilbar sein, folglich auch durch das Product davon, das heifst durch $N\varphi(\alpha)$. Es ist demnach

$$\frac{f(\alpha)\varphi(\alpha^g)\varphi(\alpha)^{g^2})\ldots.\varphi(\alpha^{g^{\lambda-2}})}{N\varphi(\alpha)} = \frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = E(\alpha);$$

wo $E(\alpha)$ eine ganze complexe Zahl bedeutet. Hieraus folgt weiter

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha)E(\alpha) \quad \text{und} \quad Nf(\alpha) = N\varphi(\alpha).NE(\alpha),$$

und da $N\varphi(\alpha) = Nf(\alpha)$ ist, so folgt

$$NE(\alpha) = 1;$$

also ist $E(\alpha)$ eine complexe Einheit und wir haben folgenden Satz:

Zwei complexe Zahlen, welche genau dieselben (idealen) Primfactoren haben, unterscheiden sich nur durch eine complexe Einheit, welche als Factor hinzutreten kann.

Es möge jetzt ein Divisor $\varphi(\alpha)$ genau dieselben (idealen) Primfactoren haben, welche wir so eben für diese complexe Zahl annahmen; ein Dividendus $f(\alpha)$ aber möge nicht nur dieselben Factoren haben, sondern aufser diesen noch andere, oder auch die nemlichen mehrmals: dann läfst sich leicht zeigen, dafs $f(\alpha)$ durch $\varphi(\alpha)$ theilbar, d. h. dafs der Quotient eine complexe *ganze* Zahl ist. Bringt man nämlich den Quotienten wieder auf die Form

$$\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \frac{f(\alpha)\varphi(\alpha^g)\varphi(\alpha^{g^2})\ldots.\varphi(\alpha^{g^{\lambda-2}})}{N\varphi(\alpha)},$$

so hat der Zähler $f(\alpha)\varphi(\alpha^g)\varphi(\alpha^{g^2})\ldots.\varphi(\alpha^{g^{\lambda-2}})$ alle (idealen) Primfactoren, welche der Nenner $N\varphi(\alpha)$ enthält; denn $f(\alpha)$ enthält der Voraussetzung nach alle Primfactoren von $\varphi(\alpha)$. Dieser Zähler enthält also alle Primfactoren von q, und zwar jeden m mal; weshalb er denn durch q^{mf} theilbar sein mufs. Ferner enthält er alle Primfactoren von q', und zwar jeden m' mal, weshalb er durch $q'^{m'f'}$ theilbar sein mufs, u. s. w. Der Zähler enthält also die ganze Zahl $q^{mf}q'^{m'f'}q''^{m''f''}\ldots.$ als Factor, welche gleich $N\varphi(\alpha)$ ist: folglich ist

$$\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = Q(\alpha),$$

und $Q(\alpha)$ ist eine complexe ganze Zahl. Hieraus folgt weiter $f(\alpha) = \varphi(\alpha)Q(\alpha)$; und da das Product die idealen Primfactoren der beiden Factoren zusammen enthält, so folgt, dafs $Q(\alpha)$ genau alle diejenigen Primfactoren enthalten mufs, welche den Überschufs der Primfactoren des Dividendus $f(\alpha)$ über die des Divisors $\varphi(\alpha)$ ausmachen. Wir erhalten also folgenden Satz:

Eine complexe Zahl ist durch eine andere theilbar, wenn alle (idealen) Primfactoren des Divisors auch im Dividendus enthalten sind, und der Quotient enthält genau den Überschufs der (idealen) Primfactoren des Dividendus über die des Divisors.

Aufser den hier behandelten Primfactoren derjenigen Primzahlen, welche zu Divisoren von $\lambda-1$ für den Modul λ gehören, müssen noch die Primfactoren von λ selbst, besonders erwähnt werden. Da

$$(x-\alpha)(x-\alpha^2)\ldots.(x-\alpha^{\lambda-1}) = x^{\lambda-1}+x^{\lambda-2}+\ldots.+x+1$$

ist, so erhält man, wenn man $x=1$ setzt:

$$(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)\ldots.(1-\alpha^{\lambda-1}) = \lambda.$$

Es sind demnach $1-\alpha$, $1-\alpha^2$, etc. Factoren von λ, und zwar Primfactoren, weil, wenn $1-\alpha = f(\alpha)\varphi(\alpha)$ gesetzt wird, auch $Nf(\alpha)\cdot N\varphi(\alpha) = \lambda$ sein mufs; woraus folgt, dafs einer der beiden ganzzahligen Factoren $Nf(\alpha)$ oder $N\varphi(\alpha)$ gleich Eins, also dafs eine der beiden complexen Zahlen $f(\alpha)$ oder $\varphi(\alpha)$ eine complexe Einheit sein mufs. Diese Primfactoren von λ haben das Eigenthümliche, dafs sie, wenn man die Einheiten abrechnet, mit welchen sie multiplicirt vorkommen, einander gleich sind; denn es ist $1-\alpha^n = (1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{n-1})$, und $1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{n-1}$ ist eine complexe Einheit. Es ist also hier niemals die Frage, welche Primfactoren von λ in einer complexen Zahl enthalten sind, sondern nur, wie viele derselben es sind. Ist $f(\alpha)$ irgend eine complexe Zahl, so hat man offenbar

$$(f(\alpha))^\lambda = f(1), \text{ mod. } \lambda.$$

Wenn nun $f(\alpha)$ einen Primfactor von λ enthält, so ist $(f(\alpha))^\lambda$, weil es deren λ hat, durch λ theilbar; mithin mufs auch $f(1)$, d. h. die Summe aller Coëfficienten von $f(\alpha)$, durch λ theilbar sein. Wenn aber diese Bedingung erfüllt ist, so kann man durch mehrmalige Addition oder Subtraction der Gleichung $1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\lambda-1}=0$ diese Summe der Coëfficienten gleich Null machen; und alsdann ist die complexe Zahl offenbar durch $1-\alpha$ theilbar; sogar wenn α eine belibige veränderliche Gröfse bezeichnet. Will man daher wissen, wie viele Primfactoren von λ eine complexe Zahl enthalte, so hat man nur zu untersuchen, wie viele mal nach einander sie sich durch $1-\alpha$ dividiren lasse.

§. 8.

Nachdem in dem vohergehenden Paragraphen die einfachen Rechnungsregeln für die Primfactoren der complexen Zahlen gefunden worden, (welche stets dieselben sind, es mögen die Primfactoren für sich als complexe Zahlen darstellbar sein, oder nur ideale) wollen wir jetzt noch über die Wirklichkeit oder Idealität der durch ihre Primfactoren gegebenen complexen Zahlen einige Untersuchungen anstellen, bei welchen alles hauptsächlich nur auf die eine Hauptfrage ankommen wird: ***Welche ideale Primfactoren setzen sich zu wirklichen complexen Zahlen zusammen; und welche nicht?***

Das Product aller conjugirten idealen Primfactoren einer gegebenen realen Primzahl q ist stets eine wirkliche complexe Zahl, und zwar die Zahl q selbst, welche auch noch eine complexe Einheit zum Factor haben kann. Die Zahl q enthält nämlich wirklich nach unserer Definition alle conjugirten Primfactoren von q, deren Anzahl gleich e ist, wenn q zum Exponenten f gehört, mod. λ, und $ef = \lambda - 1$ ist.

Ist ferner $\boldsymbol{I}(\alpha)$ irgend eine (ideale) complexe Zahl, welche beliebige gegebene Primfactoren enthält, so ist immer die Norm

$$\boldsymbol{NI}(\alpha) = \boldsymbol{I}(\alpha).\boldsymbol{I}(\alpha^{\gamma}).\boldsymbol{I}(\alpha^{\gamma^2}) \ldots . \boldsymbol{I}(\alpha^{\gamma^{\lambda-1}})$$

eine ***wirkliche*** Zahl, und zwar: Wenn $\boldsymbol{I}(\alpha)$ den zu $u = \eta_r$ gehörenden Primfactor von q, welcher zum Exponenten f gehört, μ mal enthält, ferner den zu $u' = \eta'_{r'}$ gehörenden Primfactor von q', welcher zum Exponenten f' gehört μ' mal, u. s. w., so ist

$$\boldsymbol{NI}(\alpha) = q^{\mu f} q'^{\mu' f'} \ldots .;$$

denn in der That enthält $q^{\mu f} q'^{\mu' f'} \ldots .$ alle in $\boldsymbol{I}(\alpha)\boldsymbol{I}(\alpha^{\gamma})\boldsymbol{I}(\alpha^{\gamma^2}) \ldots . \boldsymbol{I}(\alpha^{\gamma^{\lambda-1}})$ vorkommenden Primfactoren, jeden genau eben so oft, als er in diesem Producte vorkommt; und aufser diesen keinen. Dies ist aber auch die einzige allgemeine Art der Zusammensetzung idealer complexer Zahlen zu wirklichen, welche sich von selbst darbietet.

Wenn irgend eine ideale complexe Zahl $\boldsymbol{I}(\alpha)$ gegeben ist, so läfst sich die Aufgabe, andere ideale Zahlen zu finden, welche, mit $\boldsymbol{I}(\alpha)$ multiplicirt, ***wirkliche*** complexe Zahlen geben, stets auf unendlich viele verschiedene Arten lösen. Diese Aufgabe kann nämlich auch so ausgedrückt werden: Wirkliche complexe Zahlen zu finden, welche gegebene (ideale) Primfactoren haben, und welche aufser diesen gegebenen noch irgend andere enthalten dürfen. Die Lösung beruht aber nur darauf, einer gewissen Anzahl Congruenzen vom ersten Grade genugzuthun, welche für die Coëfficienten einer wirklichen complexen Zahl Statt haben müssen, und welche sich niemals widersprechen, sondern stets eine unendliche Anzahl verschiedener Lösungen zulassen. Es giebt deshalb auch immer eine unendliche Menge idealer Zahlen, welche, mit einer gegebenen idealen Zahl multiplicirt, eine wirkliche complexe Zahl erzeugen. Wählt man nun unter allen diesen immer nur diejenigen, deren Normen möglichst klein sind, so findet man das sehr bemerkenswerthe Resultat: ***Dafs stets eine endliche bestimmte Zahl idealer Multiplicatoren hinreicht, um alle idealen complexen Zahlen zu wirklichen zu machen.*** Wir wollen jetzt den Beweis dieses ersten Hauptsatzes geben.

Die ideale complexe Zahl $\boldsymbol{I}(\alpha)$ enthalte wieder, wie oben, den zu $u = \eta_r$ gehörenden Primfactor der zum Exponenten f gehörenden Primzahl q, und zwar μ mal; ferner den zu $u' = \eta'_{r'}$ gehörenden Primfactor der zum Exponenten f' gehörenden Primzahl q', μ' mal u. s. w. und es sei

$$\boldsymbol{F}(\alpha) = a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + \ldots . + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$$

eine wirkliche complexe Zahl, welche alle Primfactoren von $\mathfrak{I}(\alpha)$, also auch den idealen Factor $\mathfrak{I}(\alpha)$ selbst enthalten soll. Es sind nun, damit $F(\alpha)$ den zu $u = \eta_r$ gehörenden Primfactor von q μmal enthalte, f Congruenzen für den Modul q^μ zu erfüllen. Dieselben seien

$$\Phi = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad \ldots \quad \Phi_{f-1} = 0, \text{ mod. } q^\mu.$$

Ferner sind, damit $F(\alpha)$ den zu $u' = \eta'_{r'}$ gehörenden Primfactor von q', μ'mal enthalte, weiter f' Congruenzen für den Modul $q'^{\mu'}$ zu erfüllen; sie seien

$$\Phi' = 0, \quad \Phi'_1 = 0, \quad \Phi'_2 = 0, \quad \ldots \quad \Phi'_{f-1} = 0, \text{ mod. } q'^{\mu'};$$

und so fort. Alle diese Congruenzen sind auch, wie gezeigt, in Beziehung auf die zu bestimmenden Coëfficienten $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{\lambda-1}$ nur linear.

Wir geben nun allen den $\lambda - 1$ Coëfficienten der complexen Zahl $F(\alpha)$ alle die Werthe $0, 1, 2, 3, \ldots k-1$, so dafs im Ganzen $k^{\lambda-1}$ Werthcombinationen Statt finden, welche eben so viele verschiedene complexe Zahlen geben. Für diese verschiedenen Werthcombinationen kann jede der Gröfsen $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_{f-1}$ nur q^μ verschiedene Reste lassen, für den Modul q^μ: eben so jede der f' Gröfsen $\Phi', \Phi'_1, \Phi'_2, \ldots \Phi'_{f'-1}$, nur $q'^{\mu'}$ verschiedene Reste, für den Modul $q'^{\mu'}$ etc. Die Anzahl aller verschiedenen Restcombinationen, welche überhaupt Statt haben können, ist also $q^{\mu f} q'^{\mu' f'} \ldots$. Nimmt man nun k so grofs an, dafs $k^{\lambda-1} > q^{\mu f} q'^{\mu' f'} \ldots$, also die Anzahl der Werthcombinationen der Coëfficienten gröfser ist als die Anzahl aller Restcombinationen der durch Φ bezeichneten Gröfsen, so müssen immer gewisse Restcombinationen sich wiederholen. Es mögen für die bestimmten Werthe $a_1 = m_1$, $a_2 = m_2$, $a_3 = m_3$, $\ldots a_{\lambda-1} = m_{\lambda-1}$ die Gröfsen $\Phi, \Phi_1, \ldots \Phi_{f-1}$, modulo q^μ, $\Phi', \Phi_1, \ldots \Phi'_{f'-1}$, modulo $q'^{\mu'}$, etc. alle einzeln dieselben Reste geben, wie für die Werthe $a_1 = n_1$, $a_2 = n_2$, $a_3 = n_3$, $\ldots a_{\lambda-1} = n_{\lambda-1}$: so folgt, dafs die Gröfsen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{\lambda-1}$, weil sie in allen diesen Ausdrücken nur linear vorkommen, alle congruent Null werden müssen, für $a_1 = m_1 - n_1$, $a_2 = m_2 - n_2$, $a_3 = m_3 - n_3$, $\ldots a_{\lambda-1} = m_{\lambda-1} - n_{\lambda-1}$. Alle Congruenzen also, welche nöthig und hinreichend sind, damit $F(\alpha)$ die verlangten idealen Primfactoren habe, lassen sich immer befriedigen, wenn man den Coëfficienten nur positive oder negative Werthe giebt, welche, abgesehen vom Vorzeichen, nicht gröfser sind als $k-1$; wo k nur durch die Bedingung $k^{\lambda-1} > q^{\mu f} q'^{\mu' f'} \ldots$ bestimmt wird.

Da wir nun eine gewisse Grenze der Gröfse gefunden haben, welche die Coëfficienten der complexen Zahl $F(\alpha)$ nicht zu überschreiten brauchen,

um den Bedingungen der Aufgabe zu genügen, so wollen wir jetzt sehen, wie grofs höchstens die Norm einer solchen complexen Zahl werden könne.

Multiplicirt man die beiden reciproken complexen Zahlen $F(\alpha)$ und $F(\alpha^{-1})$ mit einander, verwandelt sodann α in α^2, α^3, ... $\alpha^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}$ und addirt, so erhält man sehr leicht folgende Gleichung:

$$F(\alpha)F(\alpha^{-1})+F(\alpha^2)F(\alpha^{-2})+F(\alpha^3)F(\alpha^{-3})+\ldots.+F(\alpha^{\frac{1}{2}(\lambda-1)})F(\alpha^{\frac{1}{2}(\lambda+1)}$$
$$=\tfrac{1}{2}\lambda(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots.+a_{\lambda-1}^2)-\tfrac{1}{2}(a_1+a_2+a_3+\ldots.+a_{\lambda-1})^2.$$

Sind nun die Coëfficienten a_1, a_2, ... $a_{\lambda-1}$ alle, absolut genommen, nicht gröfser als $k-1$, so folgt hieraus:

$$F(\alpha)F(\alpha^{-1})+F(\alpha^2)F(\alpha^{-2})+\ldots.+F(\alpha^{\frac{1}{2}(\lambda-1)})F(\alpha^{\frac{1}{2}(\lambda+1)})\leqq\tfrac{1}{2}\lambda(\lambda-1)(k-1)^2.$$

Aus dem möglich-gröfsten Werthe, welchen die Summe aller dieser stets positiven Gröfsen haben kann, läfst sich aber sehr leicht auf den möglich-gröfsten Werth des Products derselben, welches die Norm $NF(\alpha)$ ist, schliefsen. Ein solches Product positiver Gröfsen, deren Summe gegeben ist, erhält nämlich seinen möglich-gröfsten Werth, wenn die einzelnen Factoren desselben alle einander gleich angenommen werden: im gegenwärtigen Falle also, wenn jeder der Factoren gleich dem $\frac{1}{2}(\lambda-1)$ten Theile der möglich-gröfsten Summe aller gleichen genommen wird; also gleich $\lambda(k-1)^2$. Hierdurch wird das möglich-gröfste Product aller gleich $\lambda^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}(k-1)^{\lambda-1}$. Man erhält also

$$NF(\alpha)\leqq\lambda^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}(k-1)^{\lambda-1}.$$

Nehmen wir nun die Zahl k so an, dafs, wie es oben verlangt wurde, $k^{\lambda-1}>q^{\mu f}\cdot q'^{\mu' f'}\ldots..$, aber $(k-1)^{\lambda-1}<q^{\mu f}\cdot q'^{\mu' f'}\ldots.$ ist, so ergiebt sich

$$NF(\alpha)<\lambda^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}\cdot q^{\mu f}\cdot q'^{\mu' f'}\ldots.$$

Die wirkliche complexe Zahl $F(\alpha)$ enthält nach der Voraussetzung den idealen Factor $I(\alpha)$. Setzt man daher $F(\alpha)=M(\alpha)\cdot I(\alpha)$, so ist $NF(\alpha)=NM(\alpha)\cdot NI(\alpha)$, und da $NI(\alpha)=q^{\mu f}\cdot q'^{\mu' f'}\ldots.$, so ist

$$NM(\alpha)<\lambda^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}.$$

Die Multiplicatoren also, welche beliebige ideale complexe Zahlen zu wirklichen machen, lassen sich immer so annehmen, dafs die Normen derselben kleiner sind als die bestimmte Zahl $\lambda^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}$; und da die Anzahl solcher idealer Zahlen nur endlich und begrenzt sein kann, so erhalten wir den Beweis folgenden Satzes:

> ***Es giebt immer eine endliche bestimmte Anzahl idealer complexer Multiplicatoren, welche nöthig und hinreichend sind, um alle idealen complexen Zahlen zu wirklichen zu machen.***

§. 9.

Auf den im vorigen Paragraph bewiesenen Hauptsatz gründen wir nun eine Classification der idealen complexen Zahlen, indem wir festsetzen:

Alle diejenigen (idealen) complexen Zahlen, welche durch Multiplication mit einer und derselben (idealen) Zahl zu wirklichen complexen Zahlen werden, sollen äquivalent heifsen und zusammen eine Classe ausmachen.

Eine ***wirkliche*** complexe Zahl, mit einer ***idealen*** multiplicirt, kann immer nur ein ***ideales,*** aber niemals ein wirkliches Product geben. Dies ist eine unmittelbare Folge des in (§. 7.) bewiesenen Satzes, welchem zufolge eine wirkliche complexe Zahl durch eine andere wirkliche theilbar ist, wenn alle idealen Primfactoren des Divisors auch im Dividendus enthalten sind und der Quotient alsdann wieder eine wirkliche complexe Zahl ist. Wenn nämlich eine wirkliche Zahl, mit einer idealen multiplicirt, eine wirkliche Zahl zum Product gäbe, so müfste auch eine wirkliche Zahl, durch eine andere wirkliche dividirt, welche keine andern idealen Primfactoren hat als diese, eine ideale Zahl zum Quotienten geben; was dem angeführten Satze widerspricht.

Es seien nun $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$ zwei ***äquivalente*** ideale Zahlen; und zwar sollen beide, mit derselben idealen Zahl $\boldsymbol{M}(\alpha)$ multiplicirt, zu wirklichen werden. Es werde ferner auch $f(\alpha)$, mit $\psi(\alpha)$ multiplicirt, zu einer wirklichen Zahl: so behaupte ich, dafs auch $\varphi(\alpha)$, mit $\psi(\alpha)$ multiplicirt, eine wirkliche Zahl geben mufs. Da nämlich $\boldsymbol{I}(\alpha)\cdot\boldsymbol{M}(\alpha)$ wirklich ist, so folgt, dafs auch $f(\alpha^2)f(\alpha^3)\ldots.f(\alpha^{\lambda-1})\cdot\boldsymbol{M}(\alpha^2)\cdot\boldsymbol{M}(\alpha^3)\ldots.\boldsymbol{M}(\alpha^{\lambda-1})$ wirklich sein mufs. Wird dies mit der wirklichen Zahl $\varphi(\alpha)\boldsymbol{M}(\alpha)$ multiplicirt, so folgt ferner, dafs $\varphi(\alpha)f(\alpha^2)f(\alpha^3)\ldots.f(\alpha^{\lambda-1})\cdot\boldsymbol{NM}(\alpha)$ eine wirkliche Zahl sein mufs; und da der Factor $\boldsymbol{NM}(\alpha)$ wirklich ist, so mufs auch der andere Factor $\varphi(\alpha)f(\alpha^2)f(\alpha^3)\ldots.f(\alpha^{\lambda-1})$ wirklich sein. Multiplicirt man endlich noch mit der wirklichen Zahl $f(\alpha)\psi(\alpha)$ und erwägt, dafs $\boldsymbol{N}f(\alpha)$ wirklich ist, so folgt, dafs $\varphi(\alpha)\psi(\alpha)$ ebenfalls wirklich sein mufs; wie behauptet; also:

Wenn zwei ideale complexe Zahlen äquivalent sind, so macht jeder Multiplicator, durch welchen die eine zu einer wirklichen Zahl wird, auch die andere zu einer wirklichen Zahl.

Aus diesem Satze folgt unmittelbar auch der folgende:

Wenn zwei ideale Zahlen einer und derselben dritten Zahl äquivalent sind, so sind sie auch unter einander äquivalent.

Es müssen nämlich nach dem vorigen Satze diese Zahlen alle drei einen und denselben Multiplicator haben, welcher sie zu wirklichen complexen Zahlen macht.

Durch diese Sätze erlangt der Begriff der ***Äquivalenz*** idealer complexer Zahlen erst seine wahre Vollkommenheit; indem sich zeigt, dafs die Äquivalenz eine von der zufälligen Wahl der Multiplicatoren unabhängige Beziehung der idealen Zahlen zu einander ist, und dafs auch die Classification nach der Äquivalenz und die endliche Anzahl der verschiedenen Classen nur eine einzige bestimmte ist, für jeden Werth von λ.

In die Classification der idealen complexen Zahlen begreifen wir auch die wirklichen mit ein. Der Ausdruck ***ideale complexe Zahl*** hat nämlich zwei verschiedene Bedeutungen: eine weitere und eine engere; in der weiteren Bedeutung des Idealen ist das Wirkliche nur ein besonderer Fall desselben; in der engeren ist das Wirkliche der Gegensatz des Idealen: es verhält sich hier das Ideale und Wirkliche, wie das Imaginäre und Reale. Die wirklichen complexen Zahlen müssen unter einander alle als äquivalent betrachtet werden; sie machen also eine Classe für sich aus, welche wir als die erste Classe ansehen und ***Hauptclasse*** nennen. Für die Anordnung der übrigen Classen lassen sich nicht eher bestimmte Regeln geben, als bis von der Zusammensetzung der verschiedenen Classen äquivalenter Zahlen gehandelt worden ist; über welche wir Folgendes erwähnen:

Äquivalente Zahlen, mit äquivalenten multiplicirt, geben stets äquivalente Producte.

Es seien nämlich $f(\alpha)$ und $f_1(\alpha)$ zwei äquivalente Zahlen; ein Multiplicator, welcher beide zu wirklichen macht, sei $m(\alpha)$; es seien ferner $\varphi(\alpha)$ und $\varphi_1(\alpha)$ zwei andere äquivalente Zahlen, und $\boldsymbol{M}(\alpha)$ der Multiplicator, welcher beide zu wirklichen macht: so ist offenbar $m(\alpha)\boldsymbol{M}(\alpha)$ ein Multiplicator, der sowohl das Product $f(\alpha)\cdot\varphi(\alpha)$, als auch das Product $f_1(\alpha)\cdot\varphi_1(\alpha)$ zu einer wirklichen complexen Zahl macht; mithin sind $f(\alpha)\cdot\varphi(\alpha)$ und $f_1(\alpha)\cdot\varphi_1(\alpha)$ äquivalent. Dieser Satz läfst sich auch folgendermaafsen ausdrücken:

Wenn man irgend zwei ideale Zahlen mit einander multiplicirt, so ist die Classe, welcher das Product angehört, durch die Classen, welchen die Factoren angehören, vollständig bestimmt.

Multiplicirt man irgend eine ideale Zahl mit einer Zahl aus jeder Classe, so erhält man so viele Producte, als Classen vorhanden sind, und es kann keines derselben irgend einem andern äquivalent sein; oder jedes dieser Producte gehört einer andern Classe an. Unter diesen mufs es also auch immer

ein Product geben, und zwar ***nur*** eins, welches wirklich ist oder der Hauptclasse angehört; also:

Zu jeder Classe idealer Zahlen gehört eine bestimmte Zahl, welche, mit ihr zusammengesetzt, die Hauptclasse giebt.

Es giebt hier auch noch solche Classen, welche, mit sich selbst zusammengesetzt, die Hauptclasse geben (classes ancipites); namentlich ist die Hauptclasse selbst stets eine solche. Aufser dieser existiren aber für besondere Werthe von λ auch noch andere mit dieser Eigenschaft.

Erhebt man irgend eine ideale Zahl $f(\alpha)$ zu Potenzen, so ist klar, dafs die Reihe idealer Zahlen

$$f(\alpha),\ f(\alpha)^2,\ f(\alpha)^3,\ f(\alpha)^4,\ \text{etc.}$$

äquivalente Zahlen enthalten mufs; denn die Anzahl nicht äquivalenter Zahlen ist eine endliche. Es seien nun $f(\alpha)^r$ und $f(\alpha)^s$ äquivalent, und $m(\alpha)$ sei ein Multiplicator, welcher beide zu wirklichen Zahlen macht, so ist $f(\alpha)^r \cdot m(\alpha)$ wirklich, und auch $f(\alpha)^s \cdot m(\alpha)$ ist wirklich. Ist nun $s > r$, so kann man demselben die Form $f(\alpha)^{s-r} \cdot f(\alpha)^r \cdot m(\alpha)$ geben, und da $f(\alpha)^r m(\alpha)$ wirklich ist, so mufs auch der andere Factor $f(\alpha)^{s-r}$ wirklich sein. Wir erhalten hieraus folgenden wichtigen Satz:

Jede ideale complexe Zahl hat die Eigenschaft, dafs gewisse ganze Potenzen derselben wirkliche complexe Zahlen sind. Alle idealen complexen Zahlen lassen sich daher als Wurzeln aus wirklichen complexen Zahlen darstellen

Es sei nun die $h$te Potenz der idealen Zahl $f(\alpha)$ die niedrigste, für welche $f(\alpha)^h$ zu einer wirklichen complexen Zahl wird, so müssen alle die Zahlen

$$1,\ f(\alpha),\ f(\alpha)^2,\ f(\alpha)^3,\ \ldots.\ f(\alpha)^{h-1}$$

verschiedenen Classen angehören; denn wäre $f(\alpha)^r$ äquivalent $f(\alpha)^s$, wo $s > r$ ist, und s und r beide kleiner sind als h, so würde wie oben folgen, dafs $f(\alpha)^{s-r}$ eine wirkliche Zahl sei; gegen die Voraussetzung, da $s - r < h$ ist. Diese h complexen Zahlen können nun entweder alle vorhandenen Classen grade erschöpfen, in welchem Fall die Anzahl aller Classen gleich h ist, oder es können noch andere, nicht äquivalente ideale Zahlen vorhanden sein. Es sei $\varphi(\alpha)$ eine solche ideale Zahl, welche mit keiner der obigen äquivalent ist, so behaupte ich, dafs auch die idealen Zahlen

$$\varphi(\alpha),\ \varphi(\alpha)f(\alpha),\ \varphi(\alpha)f(\alpha)^2,\ \ldots.\ \varphi(\alpha)f(\alpha)^{h-1}$$

alle, sowohl unter sich, als auch mit den obigen, nicht äquivalent sind. Wäre nämlich $\varphi(\alpha)f(\alpha)^r$ äquivalent $\varphi(\alpha)f(\alpha)^s$, wo r und s beide kleiner als h sind, so würde auch $f(\alpha)^r$ äquivalent $f(\alpha)^s$ sein; was unmöglich ist; und wäre $\varphi(\alpha)f(\alpha)^r$ äquivalent $f(\alpha)^s$, so würde durch Multiplication mit $f(\alpha)^{h-r}$ folgen, dafs $\varphi(\alpha)$ äquivalent $f(\alpha)^{s+h-r}$ oder äquivalent $f(\alpha)^{s-r}$ sei; welches ebenfalls der über $\varphi(\alpha)$ gemachten Voraussetzung zuwider ist. Es kann nun geschehen, dafs diese idealen Zahlen, zusammen mit den vorigen, alle nicht äquivalenten Zahlen erschöpfen; in welchem Falle die Anzahl aller Classen gleich $2h$ sein würde: es kann aber auch sein, dafs es aufser diesen noch andere nicht äquivalente Zahlen giebt. In diesem letztern Falle beweiset man eben so, dafs eine mit den obigen nicht äquivalente Zahl $\psi(\alpha)$ stets die ganze Gruppe

$$\psi(\alpha),\ \psi(\alpha)f(\alpha),\ \psi(\alpha)f(\alpha)^2,\ \ldots.\ \psi(\alpha)f(\alpha)^{h-1}$$

nach sich zieht; welche Zahlen sowohl unter sich, als mit den obigen, nicht äquivalent sind. Sämmtliche nicht äquivalente ideale Zahlen ordnen sich so immer in Gruppen von je h Zahlen; woraus folgt, dafs die vollständige Anzahl derselben immer ein Vielfaches von h sein mufs. Wir sprechen dies Resultat folgendermaafsen aus:

Die vollständige Anzahl aller Classen ist immer ein Vielfaches des niedrigsten Exponenten derjenigen Potenz, zu welcher eine ideale Zahl erhoben werden mufs, um zu einer wirklichen zu werden.

Wenn es nun wirklich eine *ideale* Zahl $f(\alpha)$ giebt, von der Art, dafs $f(\alpha)^h$, aber keine niedrigere Potenz von $f(\alpha)$, eine *wirkliche* complexe Zahl ist, und dafs $1, f(\alpha), f(\alpha)^2, f(\alpha)^3, \ldots. f(\alpha)^{h-1}$ alle nicht äquivalenten idealen Zahlen erschöpfen, so erhält man eine passende Anordnung aller Classen, wenn man die wirklichen zur ersten Classe, die Classe, welche $f(\alpha)$ enthält, zur zweiten, die $f(\alpha)^2$ enthaltende zur dritten nimmt u. s. w. Es kann alsdann die Classe, welcher das Product zweier oder mehrerer Factoren angehört, aus den Classen, welchen die Factoren angehören, unmittelbar bestimmt werden, weil alsdann offenbar die Summe der um Eins verminderten Classenzahlen aller Factoren der um Eins verminderten Classenzahl des Products, für den Modul h, congruent ist. Wenn aber eine solche ideale Zahl $f(\alpha)$ nicht existirt, deren Potenzen alle Classen nicht äquivalenter Zahlen erschöpfen, so kann man nach diesem Principe die Classen nur in Gruppen theilen und die den einzelnen Gruppen angehörenden Classen ordnen; für die Ordnung der Gruppen unter einander ist aber dann ein anderes Princip nöthig.

§. 10.

Wir haben schon oben bemerkt, dafs die idealen Primfactoren stets Primfactoren ganzer realer Primzahlen sind, und dafs die Natur derselben vorzüglich von den Exponenten (Divisoren von $\lambda-1$) abhangt, zu welchen diese realen Primzahlen für den Modul λ gehören. Unter allen diesen sind die idealen Primfactoren der zum Exponenten ***Eins*** gehörenden realen Primzahlen, d. h. der Primzahlen von der Form $2m\lambda+1$, als die einfachsten zu betrachten, welche vor den übrigen sich auszeichnen und darum besondere Beachtung verdienen. Von den nur aus solchen idealen Primfactoren zusammengesetzten idealen Zahlen wollen wir nun zeigen, dafs sie auch allein alle oben angegebenen Classen idealer Zahlen erschöpfen, und dafs die übrigen idealen Zahlen, welche noch andere, zu höhern Exponenten gehörige Primfactoren enthalten, für sich keine neuen Classen geben, sondern nur jenen sich einordnen *). Wir beweisen zu diesem Zwecke zunächst folgenden Satz:

> ***Jeder ideale Primfactor, der zu einem Exponenten gehört, welcher gröfser als Eins ist, ist einer idealen Zahl äquivalent, deren ideale Primfactoren alle zu niedrigeren Exponenten gehören.***

Um diesen Satz zu beweisen, gehen wir von der Gleichung aus, deren Wurzeln alle die in einer und derselben Periode von f Gliedern enthaltenen Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda=1$ sind, und von welcher schon oben (§. 4.) Gebrauch gemacht wurde, nemlich von der Gleichung

$$(1.)\qquad \alpha^f+\boldsymbol{P}_1(\eta)\alpha^{f-1}+\boldsymbol{P}_2(\eta)\alpha^{f-2}+\ldots.+\boldsymbol{P}_f(\eta)=0,$$

in welcher die Coëfficienten $\boldsymbol{P}_1(\eta)$, $\boldsymbol{P}_2(\eta)$, etc. aus den Perioden von je f Gliedern gebildete ganze complexe Zahlen sind. Es seien ferner $\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{u})$, etc. diejenigen ganzen Zahlen, welche man erhält, wenn man in jenen statt der Perioden η, η_1, η_2, etc. die entsprechenden Congruenzwurzeln $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, etc. für den Modul q setzt, der zum Exponenten f gehört. Setzt man jetzt

$$(2.)\quad \boldsymbol{F}(\alpha)=\alpha^f+\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{u})\alpha^{f-1}+\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{u})\alpha^{f-2}+\ldots.+\boldsymbol{P}_{f-1}(\boldsymbol{u})\alpha+\boldsymbol{P}_f(\boldsymbol{u})+q,$$

so erhält man, wenn die Gleichung (1.) subtrahirt wird, und wenn man erwägt, dafs $\boldsymbol{P}_f(\eta)=\pm1$, also $\boldsymbol{P}_f(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{P}_f(\eta)$ ist:

$$(3.)\quad \boldsymbol{F}(\alpha)=(\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{P}_1(\eta))\alpha^{f-1}+(\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{P}_2(\eta))\alpha^{f-2}+\ldots.$$
$$\ldots.+(\boldsymbol{P}_{f-1}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{P}_{f-1}(\eta))\alpha+q.$$

---

*) Statt: Idealer Primfactor einer realen, zum Exponenten f gehörigen Primzahl, werden wir hier und im Folgenden kürzer: ***Zum Exponenten f gehöriger idealer Primfactor*** schreiben.

Diese complexe Zahl $F(\alpha)$ hat nun, ***Erstens,*** keinen idealen Primfactor, welcher zu einem höhern Exponenten gehörte, als zum Exponenten f. Wenn nämlich f' ein gröfserer Divisor von $\lambda-1$ ist, als f, so mufs man nach (§. 4.), um zu sehen ob eine wirkliche complexe Zahl einen zum Exponenten f' gehörenden idealen Primfactor haben könne, oder, was Dasselbe ist, ob die Norm derselben durch eine zum Exponenten f' gehörende reale Primzahl theilbar sein könne, aus der zu untersuchenden Zahl mit Hülfe der Gleichung, deren Wurzeln die sämmtlichen, eine Periode von f Gliedern bildenden Wurzeln sind, alle Potenzen von α, welche höher sind als $\alpha^{f'-1}$, eliminiren; worauf dann alle Glieder einzeln diesen idealen Factor haben müssen. Im gegenwärtigen Falle enthält $F(\alpha)$ an sich schon keine höhern Potenzen von α: es hat also bereits die verlangte Form, welche im Allgemeinen durch Elimination der höhern Potenzen von α hervorzubringen ist. Es müfsten demnach in dem Ausdrucke von $F(\alpha)$, welchen die Gleichung (2.) giebt, wenn $F(\alpha)$ einen zum Exponenten f' gehörenden idealen Primfactor haben sollte, alle Coëfficienten der einzelnen Glieder, also auch der erste Coëfficient ***Eins,*** denselben enthalten; was nicht möglich ist.

Zweitens hat $F(\alpha)$ auch keinen idealen Primfactor einer andern, zum Exponenten f gehörenden Primzahl, als der Primzahl q; denn es müfste nach (§. 4.) jeder solcher Primfactor auch ein gemeinschaftlicher Factor aller Glieder der complexen Zahl $F(\alpha)$ in der Form (3.) sein, also namentlich auch ein idealer Primfactor des letzten Gliedes q.

Drittens enthält $F(\alpha)$ auch nur einen einzigen idealen Primfactor von q, nämlich den zu $u=\eta$ gehörenden Factor, und diesen nur einmal. Dafs es den genannten idealen Primfactor wirklich enthält, ist klar, weil $F(\alpha)\equiv 0$, mod. q, ist, für $u=\eta$; und wenn es den Factor mehrmals enthielte, so müfsten in der Form (3.) alle einzelnen Glieder, also auch das letzte Glied q, denselben mehrmals enthalten; welches nicht der Fall ist. Bildet man ferner folgende complexe Zahlen:

$$\begin{aligned}
F(\alpha) &= \alpha^f + P_1(u)\alpha^{f-1} + P_2(u)\alpha^{f-2} + \ldots + P_f(u) + q,\\
F_1(\alpha) &= \alpha^f + P_1(u_1)\alpha^{f-1} + P_2(u_1)\alpha^{f-2} + \ldots + P_f(u_1) + q,\\
F_2(u) &= \alpha^f + P_1(u_2)\alpha^{f-1} + P_2(u_2)\alpha^{f-2} + \ldots + P_f(u_2) + q,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
F_{e-1}(\alpha) &= \alpha^f + P_1(u_{e-1})\alpha^{f-1} + P_2(u_{e-1})\alpha^{f-2} + \ldots + P_f(u_{e-1}) + q,
\end{aligned}$$

so enthält $F(\alpha)$ den zu $u_1=\eta$ gehörenden idealen Primfactor von q, $F_1(\alpha)$ den zu $u_1=\eta$ gehörenden, $F_2(\alpha)$ den zu $u_2=\eta$ gehörenden Factor u. s. w.;

das Product aller dieser complexen Zahlen ist also, weil es alle idealen Primfactoren von q enthält, durch q theilbar. Enthielte nun aber $F(\alpha)$ aufser dem zu $u = \eta$ gehörenden Primfactor noch einen andern, welcher zu $u_r = \eta$ gehören möge, so müfste das Product dieser complexen Zahlen, auch mit Ausschlufs der Zahl $F_r(\alpha)$, durch q theilbar sein, weil es auch schon ohne $F_r(\alpha)$ alle idealen Primfactoren von q enthielte. Dieses Product würde folgende Form haben:

$$\alpha^{(e-1)f} + C_1\alpha^{(e-1)f-1} + C_2\alpha^{(e-1)f-2} + \ldots + C_{(e-1)f};$$

wo C_1, C_2, etc. ganze Zahlen sind. Es müfsten also wieder alle einzelnen Glieder, folglich auch das erste, dessen Coëfficient Eins ist, durch q theilbar sein; was nicht der Fall ist.

Wir schliefsen hieraus, dafs es immer wirkliche complexe Zahlen giebt, die nur einen einzigen, zum Exponenten f gehörenden idealen Primfactor enthalten, deren übrige Primfactoren aber alle zu niedrigeren Exponenten gehören. Dafs der Fall $f = 1$ eine Ausnahme macht, ist klar. Bezeichnet man nun den einen, zum Exponenten f gehörenden idealen Primfactor, welcher in $F(\alpha)$ enthalten ist, durch $f(\alpha)$, und das Product aller übrigen, welche nur zu niedrigeren Exponenten gehören, durch $\varphi(\alpha)$, so dafs $F(\alpha) = f(\alpha)\cdot\varphi(\alpha)$ eine wirkliche complexe Zahl ist: so folgt, dafs $f(\alpha)$ äquivalent ist mit $\varphi(\alpha^2)\varphi(\alpha^3)\ldots\varphi(\alpha^{\lambda-1})$: denn beide, mit $\varphi(\alpha)$ multiplicirt, geben ***wirkliche*** Zahlen. Hiermit ist auch der obige Satz vollständig bewiesen.

Aus dem so eben bewiesenen Satze folgt von selbst der allgemeine Satz:

Jede beliebige ideale Zahl ist einer andern äquivalent, deren ideale Primfactoren alle nur zum Exponenten Eins gehören.

Wenn nämlich in $\varphi(\alpha)$, und folglich auch in $\varphi(\alpha^2)\varphi(\alpha^3)\ldots\varphi(\alpha^{\lambda-1})$, noch Primfactoren vorhanden sind, die nicht zum Exponenten Eins gehören, so kann man sie immer durch äquivalente ideale Zahlen ersetzen, deren Primfactoren zu immer niedrigeren Exponenten gehören; und so fortfahrend gelangt man nothwendig dahin, dafs alle Primfactoren der äquivalenten Zahl nur zum Exponenten ***Eins*** gehören. Wenn ferner alle beliebigen Primfactoren solchen idealen Zahlen äquivalent sind, so folgt das Nemliche für alle beliebigen zusammengesetzten idealen Zahlen von selbst.

Anmerkung. Ich kann nicht umhin, hier, wo ich die allgemeine Theorie der Zerlegung der complexen Zahlen, wenn auch unvollendet, verlasse, um in den folgenden Paragraphen noch einige Anwendungen zu geben, auf die grofse Analogie aufmerksam zu machen, welche diese Theorie mit der ***Chemie***

hat. Der chemischen Verbindung entspricht für die complexen Zahlen die Multiplication; den Elementen, oder eigentlich den Atomgewichten derselben, entsprechen die Primfactoren; und die chemischen Formeln für die Zerlegung der Körper sind genau dieselben, wie die Formeln für die Zerlegung der Zahlen. Auch selbst die idealen Zahlen unserer Theorie finden sich in der Chemie, vielleicht nur allzuoft, als hypothetische Radicale, welche bisher noch nicht dargestellt worden sind, die aber, so wie die idealen Zahlen, in den Zusammensetzungen ihre Wirklichkeit haben. Das Fluor, für sich bisher nicht darstellbar und noch den Elementen zugezählt, kann als Analogon eines idealen Primfactors gelten. Die Idealität in der Chemie verhält sich aber darin wesentlich anders, als die der complexen Zahlen, dafs chemische ideale Stoffe, mit wirklichen verbunden, auch wirkliche Stoffe produciren; was bei den idealen Zahlen nicht der Fall ist. In der Chemie hat man ferner zur Prüfung der in einem unbekannten aufgelöseten Körper enthaltenen Stoffe die Reagentien, welche Niederschläge geben, aus denen die Anwesenheit der verschiedenen Stoffe sich erkennen läfst. Ganz Dasselbe findet für die complexen Zahlen Statt; denn es sind die oben mit $\mathfrak{P}$ bezeichneten complexen Zahlen ebenso die Reagentien für die idealen Primfactoren, und die reale Primzahl q, welche nach der Multiplication mit einer solchen als Factor aus dem Producte heraustritt, ist genau Dasselbe, wie der unlösliche Niederschlag, der nach Anwendung des Reagens zu Boden fällt. Auch der Begriff der Äquivalenz ist in der Chemie fast derselbe, wie in der Theorie der complexen Zahlen. So wie nämlich dort zwei Gewichtsmengen verschiedener Stoffe äquivalent heifsen, wenn sie sich gegenseitig vertreten können, entweder zum Zwecke des Neutralisirens, oder um Isomorphie hervorzubringen: so sind zwei ideale Zahlen äquivalent, wenn sie für den Zweck, eine andere ideale Zahl zu einer wirklichen zu machen, sich gegenseitig vertreten können. — Diese hier angedeuteten Analogieen sind nicht etwa als blofse Spiele des Witzes zu betrachten, sondern haben ihren guten Grund darin, dafs die Chemie, so wie der hier behandelte Theil der Zahlentheorie, beide denselben Grundbegriff, nämlich den der ***Zusammensetzung***, wenn gleich innerhalb verschiedener Sphären des Seins, zu ihrem Principe haben; woraus folgt, dafs auch die diesem verwandten, mit ihm nothwendig gegebenen Begriffe sich in beiden auf ähnliche Weise finden müssen. Die Chemie der natürlichen Stoffe und die hier behandelte Chemie der complexen Zahlen sind beide als Verwirklichungen des Begriffs der Zusammensetzung und der davon abhängigen Begriffs-Sphäre anzusehen: jene

als eine physische, mit den Zufälligkeiten der äufsern Existenz verbundene und deshalb reichere, diese als eine mathematische, in ihrer innern Nothwendigkeit vollkommen reine, aber dafür auch ärmere, als jene.

§. 11.

Die hauptsächlichsten Schwierigkeiten der Lehre von der Kreistheilung liegen bekanntlich in gewissen complexen, in derselben auftretenden Zahlen. Es bleibt von der rein theoretischen Seite eine genauere Einsicht in die Natur dieser complexen Zahlen, von der practischen Seite eine leichtere Methode für die Bildung derselben noch zu wünschen. Diese beiden Mängel dürften nun mittels der hier gegebenen Theorie der complexen Zahlen vollständig gehoben werden können.

Ist p eine Primzahl von der Form $p = \mu\lambda + 1$, g eine primitive Wurzel von p, α eine imaginäre Wurzel der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$, und x eine imaginäre Wurzel der Gleichung $x^p = 1$, so beruht die hauptsächlichste Aufgabe der Kreistheilung in der Bildung der λten Potenz des Ausdrucks

$$(\alpha, x) = x + \alpha x^g + \alpha^2 x^{g^2} + \ldots + \alpha^{p-2} x^{g^{p-2}},$$

welche Potenz, von x unabhängig, eine aus den Wurzeln α, α^2, α^3, etc. gebildete complexe Zahl ist. Diese complexe Zahl setzt ***Jacobi*** (S. Monatsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1837, wieder abgedruckt in diesem Journal Bd. XXX. S. 166) als Product aus complexen, ebenfalls von x unabhängigen Zahlen zusammen, welche durch die Gleichung

$$\psi_k(\alpha) = \frac{(\alpha, x)(\alpha^k, x)}{(\alpha^{k+1}, x)}$$

bestimmt sind. Es ist nämlich

$$(\alpha, x)^\lambda = p\,\psi_1(\alpha)\psi_2(\alpha)\psi_3(\alpha)\ldots\psi_{\lambda-2}(\alpha).$$

Nun weiset auch ***Jacobi*** a. a. O. nach, dafs, wenn r eine primitive Wurzel der Gleichung $r^{p-1} = 1$, und g dieselbe primitive Wurzel der Congruenz $g^{p-1} \equiv 1$ ist, welche auch schon in (α, x) vorkommt, und wenn in dem von x unabhängigen Ausdrucke

$$\psi(r) = \frac{(r^{-m}, x)(r^{-n}, x)}{(r^{-m-n}, x)}$$

anstatt der primitiven Wurzel r, die primitive Congruenzwurzel g gesetzt wird, dafs dann

$$\psi(g) \equiv 0, \mod p,$$

ist, sobald $m + n > p - 1$, aber m und n für sich kleiner als $p - 1$ und positiv

sind. Setzt man nun

$$r^{-m} = \alpha, \quad g^{p-1-m} \equiv u, \text{ mod. } p,$$
$$n \equiv km, \text{ mod. } p-1, \qquad m \equiv h\mu, \text{ mod. } p-1,$$

so ergiebt sich

$$\psi(r) = \psi_k(\alpha^h), \quad \text{also auch} \quad \psi(\alpha) \equiv \psi_k(u^h).$$

Es ist demnach $\psi_k(u^h) \equiv 0$, mod. p, für $m+n > p-1$; welche Bedingung sich nach den festgesetzten Werthen von m und n darauf vereinfacht, dafs die positiven Reste von hk und von h, für den Modul λ, zusammen gröfser sein müssen als λ.

Dieses *Jacobi*sche Resultat giebt unmittelbar die idealen Primfactoren der complexen Zahl $\psi_k(\alpha)$. In unsere Ausdrucksweise übersetzt, heifst es: ***Es enthält*** $\psi_k(\alpha)$ ***den zu*** $\alpha \equiv u^h$ ***gehörenden idealen Primfactor von*** p, ***wenn*** h ***und der positive Rest von*** hk, ***mod.*** λ, ***zusammen gröfser sind als*** λ. Die Anzahl der Werthe von h, welche dieser Bedingung genügen, ist offenbar gleich $\frac{1}{2}(\lambda-1)$; denn von je zwei Werthen von h, deren Summe gleich λ ist, genügt immer einer, und zwar ***nur*** einer von beiden. Es sind also dadurch $\frac{1}{2}(\lambda-1)$ Primfactoren der complexen Zahl $\psi_k(\alpha)$ gegeben, und aufser diesen können keine andern vorhanden sein; denn $\psi_k(\alpha^{-1})$ mufs genau eben so viele Primfactoren enthalten als $\psi_k(\alpha)$, und da $\psi_k(\alpha)\psi_k(\alpha^{-1}) = p$, p aber nur $\lambda-1$ (ideale) Primfactoren enthält, so mufs $\psi_k(\alpha)$ genau $\frac{1}{2}(\lambda-1)$ Primfactoren enthalten, welche die oben gefundenen sind. Bezeichnet $f(\alpha)$ einen idealen Primfactor von p, und zwar den zu $\alpha \equiv u$ gehörenden; bedeutet ferner m^h diejenige positive Zahl, welche kleiner als λ ist und der Congruenz $hm_h \equiv 1$, mod. λ, genügt, so ist

$$\psi_k(\alpha) = \pm\alpha^r \Pi f(\alpha^{m_h});$$

wo das Productzeichen Π sich auf alle diejenigen $\frac{1}{2}(\lambda-1)$ Werthe von h bezieht, für welche h und der positive Rest von hk, mod. λ, zusammen gröfser sind als λ. Nach dem vorletzten Satze in (§. 7.) mufs diesem Producte, welches nur durch seinen idealen Primfactor bestimmt ist, irgend eine complexe Einheit $E(\alpha)$ als Factor beigegeben werden; diese mufs aber vermöge der Gleichung $\psi_k(\alpha)\psi_k(\alpha^{-1}) = p$ so beschaffen sein, dafs $E(\alpha)E(\alpha^{-1}) = 1$ ist; und dieser Gleichung genügt keine andere Einheit, und überhaupt keine andere complexe Zahl als $\pm\alpha^r$, weshalb wir diese Einheit als Factor des Products hinzugefügt haben.

Mit den gefundenen Primfactoren von $\psi_k(\alpha)$ sind nun diejenigen der Potenz $(\alpha, x)^\lambda$ zugleich mit gegeben. Der bestimmte, zu $\alpha \equiv u^h$ gehörige ideale

Primfactor von p kommt nämlich in dem Producte $\psi_1(\alpha)\psi_2(\alpha)\psi_3(\alpha)\ldots\psi_{\lambda-2}(\alpha)$ gerade so viele mal vor, als es Zahlen k giebt, für welche der positive Rest von kh, wenn h hinzu addirt wird, gröfser wird als λ, also für welche der positive Rest von kh, mod. λ, gröfser ist als $\lambda-h$. Nun hat für $k=1, 2, 3, \ldots \lambda-2$ das Product hk alle Reste $1, 2, 3, \ldots \lambda-1$, mit Ausnahme von $\lambda-h$; die Anzahl derer, die gröfser sind als $\lambda-h$, ist also $h-1$; folglich kommt der zu $\alpha=u^h$ gehörende ideale Primfactor von p, welcher nach der obigen Bezeichnung $f(\alpha^{m_h})$ ist, in diesem Producte $h-1$ mal vor. Man erhält folglich

$$\psi_1(\alpha)\psi_2(\alpha)\ldots\psi_{\lambda-2}(\alpha) = \pm\alpha^s f(\alpha^{m_2})^1 \cdot f(\alpha^{m_3})^2 \cdot f(\alpha^{m_4})^3 \ldots f(\alpha^{m_{\lambda-1}})^{\lambda-2},$$

und wenn mit $p=f(\alpha)\cdot f(\alpha^2)\cdot f(\alpha^3)\ldots f(\alpha^{\lambda-1})$, oder, was Dasselbe ist, mit $p=f(\alpha^{m_1})\cdot f(\alpha^{m_2})\cdot f(\alpha^{m_3})\ldots f(\alpha^{m_{\lambda-1}})$ multiplicirt wird:

$$(\alpha, x)^\lambda = \pm\alpha^s f(\alpha^{m_1})^1 \cdot f(\alpha^{m_2})^2 \cdot f(\alpha^{m_3})^3 \ldots f(\alpha^{m_{\lambda-1}})^{\lambda-1};$$

welches nach einer andern Anordnung der Factoren auch so dargestellt werden kann:

$$(\alpha, x)^\lambda = \pm\alpha^s f(\alpha)^{m_1} \cdot f(\alpha^2)^{m_2} \cdot f(\alpha^{\lambda-1})^{m_{\lambda-1}}.$$

(Man vergleiche das Breslauer Programm zur Jubelfeier der Universität Königsberg, in welchem ich diese Darstellung des $(\alpha, x)^\lambda$ zuerst aufgestellt und nach einer andern einfachen Methode bewiesen habe; für den Fall, dafs $f(\alpha)$ ein wirklicher (nicht idealer) complexer Primfactor von p ist.)

Zur Bestimmung des allein noch unbestimmt gebliebenen Factors $\pm\alpha^s$ erwäge man, dafs $(\alpha, x)^\lambda \equiv (1, x^\lambda) \equiv -1$, mod. λ, ist; es mufs also dieser Factor so genommen werden, dafs auch die andere Seite dieser Gleichung congruent -1 werde, für den Modul λ *).

Für die Erkenntnifs der innern Natur dieser complexen Zahlen der Kreistheilung lassen die gegebenen Zerlegungen in die Primfactoren nichts zu wünschen übrig. Was ferner die wirkliche Berechnung derselben für bestimmte Werthe des p und λ betrifft, so reduciren sie die ganze Aufgabe auf den einen Punct: einen complexen Primfactor von p zu finden, welcher immer, entweder als wirkliche complexe Zahl, oder doch als Wurzel aus einer solchen dargestellt werden kann. Im ersten Fall läfst sich ein solcher Primfactor durch indirecte Methoden, welche ich in dem erwähnten Programm ent-

*) Ich verdanke diese Bemerkung einer Privat-Mittheilung des Hrn. Dr. *Eisenstein*. Anm. d. Verf.

wickelt habe, stets sehr leicht finden; ist er ideal, so mufs man zunächst ermitteln, zu welcher Potenz er erhoben werden mufs, um zu einem wirklichen Factor zu werden. Diese Potenz läfst sich alsdann durch dieselben Methoden finden, und die entsprechende Wurzel daraus giebt den gesuchten idealen Factor. In diesem letzten Falle giebt es übrigens noch andere Mittel zur wirklichen Berechnung von $(\alpha, x)^\lambda$; welche ich jedoch hier übergehe. Hätte man eine vollständige Tafel aller complexen Primfactoren der realen Primzahlen (z. B. bis $p = 997$, als so weit der „Canon arithmeticus" von *Jacobi* reicht), nicht blofs für den Fall, dafs λ eine Primzahl ist, sondern auch wenn es eine Potenz einer Primzahl ist: so hätte man für den ganzen Bereich dieser Tafel auch die Lösung aller Kreistheilungen, ohne alle weitere Rechnung. Einen Anfang für eine solche Tafel der complexen Primfactoren habe ich in dem erwähnten Programme gegeben.

§. 12.

Das Product idealer Primfactoren, durch welches wir die in der Kreistheilung vorkommenden, mit $\psi_k(\alpha)$ bezeichneten complexen Zahlen ausgedrückt haben, nämlich

$$\pm\alpha^r \Pi f(\alpha^{m_h}) = \psi_k(\alpha),$$

wo h diejenigen $\frac{1}{2}(\lambda-1)$ Werthe hat, welche der Bedingung genügen, dafs der kleinste positive Rest von kh, mod. λ, um h vermehrt, gröfser als λ ist, und wo m_h eine der Congruenz hm_h, mod. λ, genügende Zahl bedeutet, hat die merkwürdige Eigenschaft, immer eine ***wirkliche*** complexe Zahl zu geben; nicht blofs, wenn, wie im vorigen Paragraph, $f(\alpha)$ ein idealer Primfactor der Primzahl p von der Form $\mu\lambda+1$ ist, sondern auch wenn $f(\alpha)$ irgend eine beliebige ideale complexe Zahl ist. Ist nämlich $f(\alpha)$ irgend eine beliebige ideale Zahl, so ist sie nach (§. 10.) stets solchen idealen Zahlen äquivalent, deren ideale Primfactoren nur zum Exponenten ***Eins*** gehören. Was also in Beziehung auf die Wirklichkeit des obigen Products von einer solchen idealen Zahl gilt, das gilt auch von jeder beliebigen. Ist aber $f(\alpha)$ ein Product aus idealen Primfactoren, welche alle zum Exponenten ***Eins*** gehören, d. h. welche nur ideale Primfactoren realer Primzahlen von der Form $\mu\lambda+1$ sind, so zerfällt das obige Product in ein Product ähnlicher Producte, welche alle einzeln, dem vorigen Paragraphen zufolge, wirkliche complexe Zahlen sind. Es ist demnach in der That $\Pi f(\alpha^{m_h})$ stets eine wirkliche complexe Zahl, wenn $f(\alpha)$ irgend eine beliebige ideale Zahl bedeutet. Dasselbe gilt nun auch

von dem Producte

$$f(\alpha^{m_1})^1 \cdot f(\alpha^{m_2})^2 \cdot f(\alpha^{m_3})^3 \ldots . f(\alpha^{m_{\lambda-1}})^{\lambda-1} = \boldsymbol{P}(\alpha);$$

denn dieses ist, wie im vorigen Paragraph gezeigt, nur aus den obigen Producten zusammengesetzt.

Es soll nun für $f(\alpha)$ eine aus Perioden von je f Gliedern gebildete ideale Zahl genommen werden, d. h. eine solche, welche, durch $\varphi(\eta)$ bezeichnet, der Bedingung genügt, dafs

$$\varphi(\eta)\varphi(\eta_1)\varphi(\eta_2) \ldots . \varphi(\eta_{e-1}) = \boldsymbol{N}\varphi(\eta) = \boldsymbol{M}$$

gleich einer realen ganzen Zahl sei. Nach (§. 7.) gestattet auch jede Zahl $\boldsymbol{M}$, welche die Eigenschaft hat, dafs alle ihre Divisoren, zur f^{ten} Potenz erhoben, congruent ***Eins*** sind, für den Modul λ, eine solche ideale Zerlegung in complexe Factoren. Es sei ferner γ eine primitive Wurzel der Congruenz $\gamma^{\lambda-1} \equiv 1$, mod. λ, ferner allgemein γ_r der kleinste positive Rest, welchen γ^r läfst. für den Modul λ, und dann

$$\begin{array}{l}
1 + \gamma_e + \gamma_{2e} + \ldots . + \gamma_{(f-1)e} = \lambda s_0, \\
\gamma_1 + \gamma_{e+1} + \gamma_{2e+1} + \ldots . + \gamma_{(f-1)e+1} = \lambda s_1, \\
\gamma_2 + \gamma_{e+2} + \gamma_{2e+2} + \ldots . + \gamma_{(f-1)e+2} = \lambda s_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\gamma_{e-1} + \gamma_{2e-1} + \gamma_{3e-1} + \ldots . + \gamma_{fe-1} = \lambda s_{e-1}:
\end{array}$$

so sind $s_0, s_1, s_2, \ldots . s_{e-1}$ ganze Zahlen, weil diese Summen bekanntlich alle durch λ theilbar sind. Schreibt man nun das Product $\boldsymbol{P}(\alpha)$ in der Form

$$\boldsymbol{P}(\alpha) = f(\alpha)^1 \cdot f(\alpha^{\gamma^{-1}})^{\gamma_1} \cdot f(\alpha^{\gamma^{-2}})^{\gamma_2} \ldots . f(\alpha^{\gamma^{2-\lambda}})^{\gamma_{\lambda-2}},$$

so erhält man, wenn $\varphi(\eta)$ statt $f(\alpha)$ gesetzt wird,

$$(1.) \qquad \boldsymbol{P}(\alpha) = \varphi(\eta)^{\lambda s_0} \cdot \varphi(\eta_{-1})^{\lambda s_1} \cdot \varphi(\eta_{-2})^{\lambda s_2} \ldots . \varphi(\eta_1)^{\lambda s_{e-1}}.$$

Es ist aber, wie sich leicht zeigen läfst, im gegenwärtigen Fall nicht nur $\boldsymbol{P}(\alpha)$ eine wirkliche complexe Zahl, sondern auch die λ^{te} Wurzel daraus; denn es ist allgemein

$$\frac{\boldsymbol{P}(\alpha)\boldsymbol{P}(\alpha^k)}{\boldsymbol{P}(\alpha^{k+1})} = (\psi_k(\alpha))^\lambda;$$

und wenn $k+1$ einer der Zahlen $\gamma_e, \gamma_{2e}, \ldots . \gamma_{(f-1)e}$ gleich angenommen wird, so ist $\boldsymbol{P}(\alpha) = \boldsymbol{P}(\alpha^{k+1})$ für $f(\alpha) = \varphi(\eta)$, also auch

$$\boldsymbol{P}(\alpha^k) = (\psi_k(\alpha))^\lambda,$$

d. h. $\boldsymbol{P}(\alpha^k)$, und folglich auch $\boldsymbol{P}(\alpha)$ selbst die λ^{te} Potenz einer ***wirklichen***

complexen Zahl. Deshalb ist denn auch

$$\varphi(\eta)^{s_0}\cdot\varphi(\eta_{-1})^{s_1}\cdot\varphi(\eta_{-2})^{s_2}\ldots.\varphi(\eta_1)^{s_{e-1}}$$

eine ***wirkliche*** complexe Zahl. Es sei nun s_r die kleinste der Zahlen s_0, s_1, s_2, ... s_{e-1}, so ist diese wirkliche complexe Zahl noch durch die wirkliche Zahl $[\varphi(\eta)\varphi(\eta_{-1})\varphi(\eta_{-2})\ldots.\varphi(\eta_1)]^{s_r}$ theilbar, und es ist

$$(2.)\qquad \varphi(\eta)^{s_0-s_r}\cdot\varphi(\eta_{-1})^{s_1-s_r}\cdot\varphi(\eta_{-2})^{s_2-s_r}\ldots.\varphi(\eta_1)^{s_{e-1}-s_r} = \Phi(\eta)$$

gleich einer ***wirklichen*** complexen Zahl. Dieses Resultat ist in dem Fall, wo f (die Anzahl der in einer Periode enthaltenen Wurzeln) eine ***gerade*** Zahl ist, nichtssagend: denn alsdann sind die Zahlen s_0, s_1, s_2, ... s_{e-1} alle einander gleich, und man erhält nichts weiter, als dafs ***Eins*** eine wirkliche Zahl ist. Wenn aber f ungerade ist, so sind die Zahlen s_0, s_1, s_2, ... s_{e-1} nicht alle gleich, sondern es ist nur $s_0+s_{\frac{1}{2}e}=s_1+s_{\frac{1}{2}e+1}=s_2+s_{\frac{1}{2}e+2}=\ldots.=f$. Multiplicirt man also $\Phi(\eta)$ mit der reciproken complexen Zahl, welche $\Phi(\eta_{\frac{1}{2}e})$ ist, so erhält man

$$(3.)\qquad \Phi(\eta)\cdot\Phi(\eta_{\frac{1}{2}e}) = M^{f-2s_r}.$$

Dies ist das analoge Resultat zu dem von ***Jacobi*** gefundenen $\psi_k(\alpha)\cdot\psi_k(\alpha^{-1})=p$. Der merkwürdigste specielle Fall ist unstreitig der, wenn $e=2$, $f=\frac{1}{2}(\lambda-1)$ und, da f ungerade sein mufs, λ von der Form $4n+3$ ist. Hier kommen nur die beiden Perioden η und η_1 vor, deren Werthe bekanntlich $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-\lambda})$ sind; ferner ist $\Phi(\eta)=x+y\eta$, $\Phi(\eta_{\frac{1}{2}e})=x+y\eta_1$ und $(x+y\eta)(x+y\eta_1)=x^2-xy+\frac{1}{4}(\lambda+1)y^2$; auch ist hier λs_0 gleich der Summe der quadratischen Reste, und λs_1 gleich der Summe der quadratischen Nichtreste. Bezeichnet man diese Summen durch Σa und Σb, so erhält man

$$(4.)\qquad M^{\frac{1}{\lambda}(\Sigma b-\Sigma a)} = x^2-xy+\tfrac{1}{4}(\lambda+1)y^2;$$

das heifst: die Potenz mit dem Exponenten $\frac{1}{\lambda}(\Sigma b-\Sigma a)$ von einer jeden Zahl, welche überhaupt durch quadratische Formen der Determinante $-\lambda$ dargestellt werden kann, ist stets durch die Hauptform $x^2-xy+\frac{1}{4}(\lambda-1)y^2$ darstellbar. Dasselbe kann auch so ausgedrückt werden: Jede Classe quadratischer Formen der Determinante $-\lambda$, wenn sie $\frac{1}{\lambda}(\Sigma b-\Sigma a)$ mal mit sich selbst zusammengesetzt wird, giebt die Hauptclasse. Es ist dies dasselbe Resultat, aus welchem, zusammengehalten mit dem Satze §. 305. der Disqu. arithm. von Gaufs, ***Jacobi*** zuerst vermuthet hat, dafs die Zahl $\frac{1}{\lambda}(\Sigma b-\Sigma a)$ gleich der Anzahl der nicht äquivalenten Classen der quadratischen Formen der Determinante $-\lambda$ sein dürfte.

(S. dieses Journal Bd. IX. S. 189.) Die allgemeinere Formel (3.) giebt zu ähnlichen Vermuthungen über einen Zusammenhang der Zahlen $s_0, s_1, s_2, \ldots s_{\epsilon-1}$, namentlich der Zahl $f-2s_r$ mit der Anzahl der nicht äquivalenten complexen Zahlen für jeden Werth von λ Anlafs.

Die Wirklichkeit des Products $\boldsymbol{P}(\alpha)$ für alle beliebigen idealen Zahlen $f(\alpha)$ gewährt noch ein Mittel, zu finden, welche Potenz einer idealen Zahl zu einer wirklichen wird. Giebt man nämlich in dem Ausdrucke von $\boldsymbol{P}(\alpha)$ dem α die Werthe $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^{\lambda-1}$, so erhält man $\lambda-1$ Gleichungen, in welchen man $f(\alpha)$, $f(\alpha^2)$, etc. als Unbekannte betrachten kann; und aus diesen Gleichungen, welche für die Logarithmen dieser unbekannten Factoren nur linear sind, kann man, weil sie nicht ganz unabhängig von einander sind, zwar nicht $f(\alpha)$ selbst finden, aber man kann stets den Quotienten $\frac{f(\alpha)}{f(\alpha^{-1})}$, oder vielmehr eine bestimmte Potenz desselben finden, welche, durch $\boldsymbol{P}(\alpha)$, $\boldsymbol{P}(\alpha^2)$, etc. ausgedrückt, eine wirkliche complexe Zahl ist. Ist nun $\varphi(\alpha)$ eine ideale complexe Zahl, von der Art, dafs sie der Bedingung: $\varphi(\alpha)$ äquivalent $f(\alpha^{-1})\varphi(\alpha)$, genügt, für irgend eine Bestimmung der idealen Zahl $f(\alpha)$: so kann man durch Auflösung eines Systems linearer Gleichungen, oder vielmehr nur durch Ausrechnung der Determinante dieses Systems, stets eine Zahl n finden, welche der Bedingung genügt, dafs $(\varphi(\alpha))^n$ eine wirkliche complexe Zahl sei. Die wirkliche Ausrechnung hat folgende bestimmte Werthe des n gegeben: $n=1$ für $\lambda=5, 7, 11, 13, 17$ und 19, $n=3$ für $\lambda=23$, $n=2$ für $\lambda=29$, $n=9$ für $\lambda=31$, $n=37$ für $\lambda=37$, $n=11$ für $\lambda=41$, $n=211$ für $\lambda=43$, $n=5.139$ für $\lambda=47$.

Die vollständige Bestimmung derjenigen Potenzen idealer Zahlen, welche zu wirklichen werden, so wie auch die Bestimmung der Anzahl nicht äquivalenter idealer Zahlen, erfordert aber noch wesentlich andere Principien, als in der gegenwärtigen Abhandlung enthalten sind. Wir verfolgen diese wichtige Frage auch schon deshalb jetzt nicht weiter, weil, wie bereits erwähnt, die Veröffentlichung einer Arbeit von *Dirichlet* nahe bevorsteht, in welcher er dieselbe Frage für einen sehr nahe verwandten Gegenstand vollständig gelöset hat.

Breslau, im September 1846.

17.
Note sur la représentation d'un nombre par la somme de cinq carrés.

(Par Mr. *G. Eisenstein.*)

Mr. *Dirichlet,* à la fin de son beau mémoire sur les formes quadratiques *), a remarqué que par la combinaison de deux théories, dont on doit l'une à lui-même, l'autre à Mr. *Gauss,* on peut trouver des expressions très-simples et très-remarquables du nombre des représentations d'un entier donné par la somme de *trois* carrés. J'ai trouvé qu'il existe des formules absolument semblables pour le nombre des représentations d'un entier donné par la somme de *cinq* carrés.

Nous rapporterons ici ces formules pour les cas les plus simples. Désignons par $\varphi(m)$ le nombre des solutions de l'équation $x^2+y^2+z^2=m$, et par $\psi(m)$ le nombre des solutions de celle-ci: $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2=m$, m étant un nombre entier quelconque donné, et les variables pouvant avoir toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à ∞. Pour abréger, je suppose impair, et sans diviseur carré, l'entier m à décomposer, c'est-à-dire: je suppose m égal au produit d'un nombre quelconque de facteurs premiers impairs différents.

Celà posé, on trouve au moyen des recherches de Mr. *Dirichlet:*

$m\equiv 1 \pmod 4$, $\varphi(m)=24\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{4}(m-1)}\left(\frac{\mu}{m}\right)$; $m\equiv 3 \pmod 8$, $\varphi(m)=8\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)}\left(\frac{\mu}{m}\right)$;

où $\left(\frac{\mu}{m}\right)$ est le symbole généralisé de *Legendre;* et il faut poser $\left(\frac{\mu}{m}\right)=0$ pour toutes les valeurs de μ qui ne sont pas premières à m.

Mes propres recherches m'ont donné

$$m\equiv 1 \pmod 8,\quad \psi(m)=-80\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)}\left(\frac{\mu}{m}\right)\mu,\quad \text{(excepté } m=1\text{)};$$

$$m\equiv 3 \pmod 8,\quad \psi(m)=-80\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)}(-1)^{\mu}\left(\frac{\mu}{m}\right)\mu$$

$$=+320\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{4}(m-3)}\left(\frac{\mu}{m}\right)\mu+\tfrac{10}{3}m\varphi(m);$$

$$m\equiv 5 \pmod 8,\quad \psi(m)=-112\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)}\left(\frac{\mu}{m}\right)\mu;$$

$$m\equiv 7 \pmod 8,\quad \psi(m)=+80\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)}(-1)^{\mu}\left(\frac{\mu}{m}\right)\mu=320\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{4}(m-3)}\left(\frac{\mu}{m}\right)\mu.$$

Soient encore α; β les entiers impairs au dessous de m qui sont resp. $\equiv 1 \pmod 4$, $\equiv 3 \pmod 4$, on a

$$\tfrac{1}{80}\psi(2m)=m\left\{\Sigma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{m}\right)+(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}\Sigma\left(\frac{2}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{m}\right)\right\}-(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}\Sigma\left(\frac{2}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{m}\right)\beta.$$

Oct. 1847.

*) Recherches sur diverses applications de l'Analyse inf. à la Théorie des Nombres.

Note sur la r

Mr. *Dirichlet*, à
à remarqué que par
même, l'autre à Mr.
remarquables du no
trois carrés. J'ai tr
nombre des représe

Nous rapport
par $\varphi(m)$ le nombre
le nombre des solu
nombre entier quelc
entières depuis $-\infty$
carré, l'entier m à
nombre quelconque

Celà posé,

$m \equiv 1 \pmod{4}$, $\varphi($

où $\left(\frac{\mu}{m}\right)$ est le symb
toutes les valeurs d

Mes propres

$m \equiv 1 \pmod{8}$,

$m \equiv 3 \pmod{8}$,

$m \equiv 5 \pmod{8}$,

$m \equiv 7 \pmod{8}$,

Soient encor
$\equiv 1 \pmod{4}$, $\equiv$

$\frac{1}{80}\psi(2m) = m\{\Sigma($

Oct. 1847.

*) Recherches su

Fac simile einer

Se S.mo Sig.r D

In ordine a' riueriti co
inuiai fin del p.mo
il danaro all'Amic
quei libri di Mate
non prima che ieri n
questo auuiso all'A
piacque di comando
mi faccia ordinare
consegnargli, mentr
ossequio inchinando
Dell'A. V. Sez.ma

Di fir.e 26. Sebb.o
1666. absnc.ne

Handschrift von Viviani.

Ernpe

comandi dell'A.V. Ser.ma
:mo di Genn.o prossimo passato
ico di Cagli per la compra di
tem.ca; ma per varj accidenti
mi percennero. Ne porto
A.V. conforme pur si com=
ndarmelo con attender che
re a chi io debba quà
tre con riverentissimo
domele mi rassegno

Umil.mo Divot.mo Obbed.mo Servo
Vincentio Viviani

Fac-simile einer Handschrif...

Halle, d. 8. Decemb. 1...

Die in dem Eta...
beträchtliche Aus...
den Aufwärter ...
Sternwarte sel...
nothwendig. ...
würde, wenn ein ...
beobachtete, ein ...
seyn, als bisher ...
da der Professor ...
(wie nach Beschaf...
nicht wohl and...
nur in einzelne...
Beobachtungen ...
Sternwarte bey...
Für Bücher etc...
um so nothwend...
hiesige Universi...
mathematischen Fa...
dürftig ist.
Die Ausgabe für...
ist, wie aus d...
sich ergibt, nich...
auf dieselbe Art ...

...hrift von J. F. Pfaff.

1815

...tat angesetzte nicht
...usgabe von 12 ℛ. für
... ist zum Besten der
...lbst und ihrer Benutzung
... Für Licht und Feuerung
... Observator regelmäßig
... mehreres erforderlich
...her hinreichen konnte,
...or der Mathematik,
...offenheit der Umstände
...nders seyn konnte),
...nen seltenen Fällen
... anstellte, und die
...ey Vorlesungen benutzte.

...tens auszusetzen, möchte
...ndiger seyn, da die
...sitäts-Bibliothek im
...ach überhaupt sehr

...für die Instrumente
...dem bereits gesagten
...icht als ein alle Jahre
...t wiederkehrende anzusehen.

J. F. Pfaff,
Professor der Mathematik.

Crelle, Journal d. Math. Bd. LXXV. Heft 3.

Fac-simile einer Ha

Ew Hochwohlgeboren

mündlichen Auftrag
Hrn v Reichenbach in Münch
er einen dreyfüssigen W
kann, bestimmtere Nachr
nach den Preisen anderer
erkundigt, indem ich gl
öffentlichen Unterricht
Notiz gedient sein. Hr
Anzeige seiner jetzigen Pre
ich Ew Hochwohlgeboren
die Ehre habe, so wie sie

Berlin d 4t. Febr 1814

Handschrift von Tralles.)

[illegible] [illegible] [illegible] [

Crelle, Journal d. Math. Bd. 35 Heft 4.

Fac-simile einer Handschrif

Königsb

.....

.....

Das Journal für Mathematik, welches Ew. Hoch
allerdings zu Gesicht gekommen und ich gestehe
Sie darüber zweifelhaft sein können, wie der Eingang
v. M. anzudeuten scheint. Wie sollte ich mich n
kennen zu lernen, welche unserm Lande zur größt
von Steiner, Abel, Jacobi u. A. sind wahrlich
daß man nicht mit Wärme das Verdienst anerk
einen schicklichen Ort zu schaffen und zu er
gelegt werden können.

Ihre Aufforderung auch meiner Theilnahme
mit Dank. Allein Sie wissen, daß meine ~~Zeit~~ Thätigkeit so
gewidmet ist, daß selten Zeit übrig bleibt, e
wenn es in unmittelbarer Verbindung mit astr
kömmt, daß ich durch eine Untersuchung über
unverhältlich lange Zeit verlohren habe, daß
nomischen Geschäfte entweder liegen bleiben, od
mußten. Dieses Hindernis ist nun gehoben, und
Resultate meiner langen Arbeit, in der Akademie
mit der heutigen fahrenden Post abgegangene A
wird mir dadurch eine geschäftsfreiere Zukunft
andere reinmathematische Frucht tragen sollte,
Rechnen Ihr Anerbieten zu benutzen.

.....

ift von Bessel.

sberg d. 6 Januar 1828.

chwohlgeboren herausgeben, ist mir
he daß ich auch nicht glaube, daß
rang Ihres geehrten Briefes vom 15ten
nicht beeifert haben, eine Zeitschrift
lsten Ehre gereicht? — Die Aufsätze
lich nichts so alltäglich vorkommendes,
rkennen sollte, welches darin liegt,
erhalten, wo solche Arbeiten nieder-

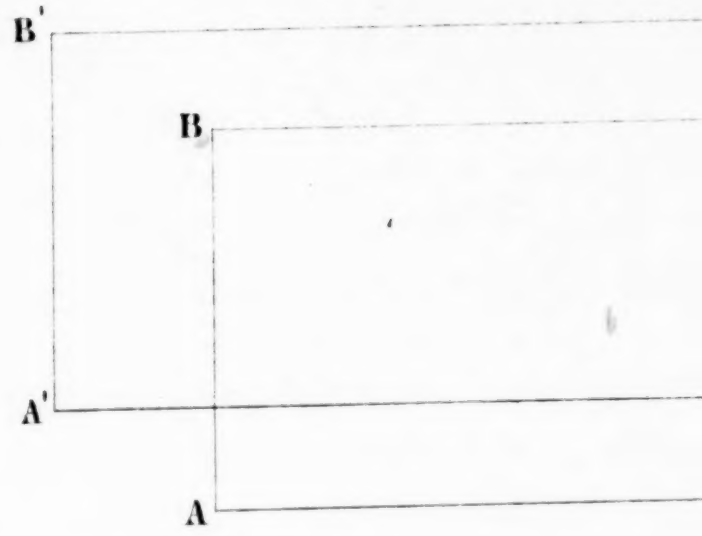
ne an Ihrer Zeitschrift, erkenne ich
eit so ausschließlich der Astronomie
etwas Mathematische zu treiben, ausser
stronomischen Geschäften steht. Dazu
Die Pendellängen, gerade jetzt so
aß sogar die allernothwendigsten astro-
oder doch hintenangesetzt werden
d Sie können, wenn Sie wollen, die
mie hören wo Herr Encke meine,
Abhandlung vortragen wird. Vielleicht
ft, und wenn diese eine oder die
e, so werde ich es mir zur Ehre

....

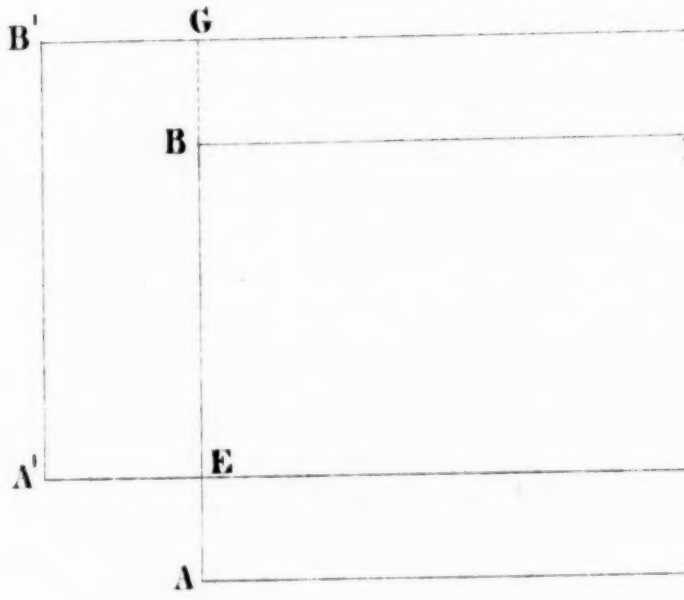
.....

F. W. Bessel

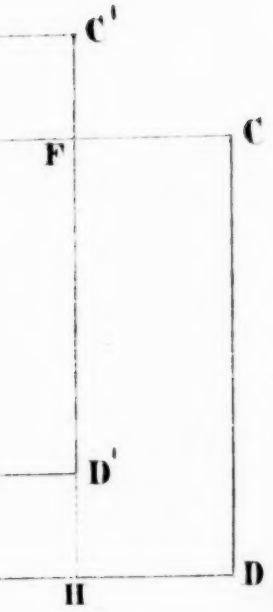
1.



2.



C'
C
D'
D


C'
C
F
D'
D
H